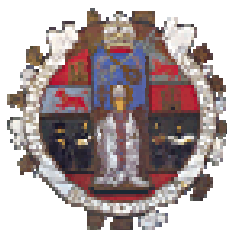


DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y DIDÁCTICA DE LAS CIÊNCIAS
EXPERIMENTALES

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA



**EVOLUÇÃO HISTÓRICA DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO
E O SEU TRATAMENTO NO ENSINO SECUNDÁRIO
PORTUGUÊS NOS SÉCULOS XX E XXI**

Tese de doutoramento de
ANA ELISA ESTEVES SANTIAGO

Realizada sob direcção de:
Dr. Modesto Sierra Vázquez
Drª María Teresa González Astudillo

Salamanca, 2008



UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y
DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES**

Dr. Modesto Sierra Vázquez, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.
Dra. M^a Teresa González Astudillo, Profesora Titular de Escuela Universitaria del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.

HACEMOS CONSTAR

Que la presente Memoria titulada **“Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI”**, ha sido realizada bajo nuestra dirección por Ana Elisa Esteves Santiago y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática e Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, lo firmamos el día de Junio de 2008

Fdo.: Dr. Modesto Sierra Vázquez

Fdo.: Dra. M^a Teresa González Astudillo

Aos meus pais

Ao meu irmão

Ao Rafael

Agradecimentos

Aos meus professores e directores, Dr. Modesto Sierra Vázquez e Dra. Maria Teresa González Astudillo pelos sábios ensinamentos e pelo constante apoio, empenho e dedicação ao longo deste longo percurso.

Aos directores e funcionários das bibliotecas que consultei, pela disponibilidade prestada.

Aos meus colegas do curso de doutoramento, em especial à Marta, pelo companheirismo e amizade que se sentiu ao longo do curso e pelos bons momentos que passamos.

As amigas Ana Paula Aires e Helena Henriques, pela ajuda e apoio que me foram dando.

Ao Professor José Antunes, pela sua preciosa ajuda ao fazer a revisão de todo o documento, pelos ensinamentos que me foi dando.

A todos os colegas, professores e investigadores que me ajudaram a esclarecer algumas questões.

Aos meus pais e ao meu irmão pelo incentivo à realização do Doutoramento e ao seu constante apoio e motivação ao longo destes anos.

Ao Rafael, pelo constante incentivo, apoio e compreensão e pela ajuda prestada nos problemas que me foram surgindo.

À Lurdes, pela hospitalidade que me fez sentir e por todo o apoio que me deu.

À minha família e amigos, a quem privei da minha companhia ao longo destes anos.

A todos aqueles que de alguma forma me ajudaram e incentivaram, muito obrigado.

INDICE

Introdução	1
1. Desenho da investigação	4
1.1. Definição do problema de investigação	4
1.2. Objectivos e hipóteses	5
1.2.1. Objectivos	5
1.2.2. Hipóteses	6
1.3. Metodologia	6
1.3.1. Metodologia	6
1.3.2. Etapas do trabalho	7
1.3.3. Plano de recolha dos dados e de trabalho	8
2. Análise histórica dos problemas de optimização	11
2.1. Período Grego: desde o século IV a. C. Até ao século IV	16
2.1.1. Elementos de Euclides	16
2.1.1.1. Ficha de referência da obra	16
2.1.1.2. Contextualização e intenção do autor	17
2.1.1.3. Caracterização da estrutura da obra	17
2.1.1.4. Problemas de optimização presentes na obra	18
2.1.1.5. Conclusão	29
2.1.2. La Collection Mathématique de Pappus de Alexandrie	31
2.1.2.1. Ficha de referência da obra	31
2.1.2.2. Contextualização e intenção do autor	31
2.1.2.3. Caracterização da estrutura da obra	32
2.1.2.4. Problemas de optimização presentes na obra	33
2.1.2.5. Conclusão	41
2.2. Nascimento: século XVI e XVII	42
2.2.1. Analyse des Infiniment Petits, pour l'intelligence des lignes courbes de L'Hôpital	43
2.2.1.1. Ficha de referência da obra	43
2.2.1.2. Contextualização e intenção do autor	43
2.2.1.3. Caracterização da estrutura da obra	43
2.2.1.4. Problemas de optimização presentes na obra	44
2.2.1.5. Conclusão	53

2.3.	Consolidação: século XVIII	55
2.3.1.	Cours de Mathématique de Bézout	55
2.3.1.1.	Ficha de referência da obra	55
2.3.1.2.	Contextualização e intenção do autor	56
2.3.1.3.	Caracterização da estrutura da obra	56
2.3.1.4.	Problemas de otimização presentes na obra	57
2.3.1.5.	Conclusão	64
2.4.	Institucionalização: século XIX	65
2.4.1.	Cours d'Analyse de l'École Polytechnique de Sturm	65
2.4.1.1.	Ficha de referência da obra	65
2.4.1.2.	Contextualização e intenção do autor	66
2.4.1.3.	Caracterização da estrutura da obra	67
2.4.1.4.	Problemas de otimização presentes na obra	68
2.4.1.5.	Conclusão	73
2.4.2.	Cours de Calcul Différentiel et Intégral de Serret	74
2.4.2.1.	Ficha de referência da obra	74
2.4.2.2.	Contextualização e intenção do autor	74
2.4.2.3.	Caracterização da estrutura da obra	75
2.4.2.4.	Problemas de otimização presentes na obra	75
2.4.2.5.	Conclusão	79
	Conclusões	80
3.	Análise dos programas oficiais e dos manuais escolares portugueses do século XX e XXI	85
3.1.	Introdução nos programas oficiais do estudo da derivada	97
3.2.	Introdução nos manuais escolares dos problemas de otimização	107
	A. Análise do programa oficial	107
	B. Análise dos manuais escolares	108
	C. Análise do período	113
3.3.	Introdução das matemáticas modernas	121
3.3.1.	A reforma de Sebastião e Silva (1963)	122
	A. Análise do programa oficial	122
	B. Análise dos manuais escolares	124

3.3.2.	A reforma de Veiga Simão (1973)	126
A.	Análise do programa oficial	126
B.	Análise dos manuais escolares	127
C.	Análise do período	136
3.3.3.	O período pós revolução	147
A.	Análise do programa oficial	147
B.	Análise dos manuais escolares	150
C.	Análise do período	164
3.4.	A Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986	177
3.4.1.	A reforma de Roberto Carneiro e Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986	177
A.	Análise do programa oficial	177
B.	Análise dos manuais escolares	181
C.	Análise do período	200
3.5.	Introdução do uso da calculadora gráfica nos programas oficiais	211
3.5.1.	O reajustamento de Marçal Grilo (1997)	211
A.	Análise do programa oficial	211
B.	Análise dos manuais escolares	214
C.	Análise do período	249
3.5.2.	A reforma de Santos Silva (2001)	262
A.	Análise do programa oficial	262
B.	Análise dos manuais escolares	266
	Conclusão	268
A.	Análise do programa oficial	268
B.	Análise dos manuais escolares	271
4.	Conclusões finais	279
4.1.	Realização dos objectivos da investigação	281
4.2.	Hipóteses de investigação. Resultados	283
4.3.	Limitações do trabalho	284
4.4.	Implicações para futuras investigações	284
	Bibliografia	286

Anexos

(Em CD)

Cópia dos problemas de optimização analisados

Livros Históricos

- **Anexo 1** : *Elementos* de Euclides
- **Anexo 2** : *La Collection Mathématique* de Pappus de Alexandrie
- **Anexo 3** : *Analyse des Infiniment Petits, pour l'intelligence des lignes courbes* de L'Hôpital
- **Anexo 4** : *Cours de Mathématique* de Bézout
- **Anexo 5** : *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de Sturm
- **Anexo 6** : *Cours de Calcul Différentiel et Intégral* de Serret

Manuais Escolares

- **Anexo 7**: A introdução nos manuais escolares dos problemas de optimização (1954)
- **Anexo 8**: A introdução das matemáticas modernas: A reforma de Veiga Simão (1973)
- **Anexo 9**: A introdução das matemáticas modernas: O período pós revolução
- **Anexo 10**: A reforma de Roberto Carneiro e Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986
- **Anexo 11**: A introdução do uso da calculadora gráfica nos programas oficiais: O reajustamento de Marçal Grilo (1997)

INTRODUÇÃO

Esta investigação tem como objectivo a realização de um estudo histórico acerca dos problemas de optimização ao longo de toda a História da Matemática e da História do Ensino da Matemática em Portugal nos séculos XX e XXI.

Ao longo deste texto, entenda-se *problema de optimização* como um problema em que se pretende determinar a solução óptima. Apesar de haver muitos métodos para resolver estes problemas, vamos restringir-nos aqueles que intervêm duas variáveis relacionadas mediante uma ligação a partir da qual se obtém uma função de uma só variável, definida num intervalo do conjunto dos números reais. Para a sua resolução é necessário: começar por definir a função a otimizar¹; exprimir essa função em ordem a uma só variável (recorrendo às restrições apresentadas no enunciado do problema); determinar os extremos da função e, por fim, interpretar os resultados face à natureza do problema.

O Ensino da Matemática, ao longo dos tempos, foi sendo sempre influenciado pelos avanços e descobertas que foram surgindo na área da Matemática. Assim, pretendemos, com a realização deste trabalho de investigação, fazer uma análise não só dos livros históricos de Matemática, mas também dos livros didácticos de Matemática para identificar os problemas de optimização presentes nessas obras. Pretendemos também fazer uma análise das formas de demonstração/resolução dos mesmos, bem como verificar quais os tipos de problemas nelas existentes.

Este trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro, intitulado *Desenho da Investigação*, começamos por apresentar a definição do problema de investigação. De seguida, expomos os objectivos a que se propõe esta investigação, bem como as hipóteses formuladas, depois indicamos a metodologia adoptada na realização desta investigação, assim como as fases em que se divide o trabalho. Por último, o plano de recolha de dados.

No segundo capítulo, sob o tema *Análise Histórica dos Problemas de Optimização*, explanamos a análise realizada às diversas obras históricas analisadas. Este capítulo

¹ Função de uma só variável

encontra-se dividido em quatro sub-capítulos, dedicando-se cada um deles a um período distinto da História dos problemas de optimização.

No primeiro sub – capítulo, *Período Grego*, descrevemos a análise de duas obras escritas entre o século IV a.C. e o século IV D.C.: os *Elementos*, de Euclides e a obra *La collection mathématique*, de Pappus d'Alexandrie.

No segundo, *Nascimento*, analisamos uma obra do século XVII, *Analyse des infiniment petits*, de L'Hôpital.

No terceiro, *Consolidação*, apreciamos uma obra do século XVIII, *Cours de mathématique*, de Bézout.

No quarto, *Institucionalização*, fazemos a análise de duas obras do século XIX: *Cours de Calcul Differentiel et Integral*, de Serret e *Cours D'Analyse de L'École Polytechnique*, de Sturm.

No terceiro capítulo, *Análise dos Programas Oficiais e dos Manuais Escolares Portugueses do Século XX e XXI*, passamos à análise dos programas oficiais que contemplam o estudo da derivada, bem como dos respectivos manuais escolares. Este capítulo foi dividido em cinco sub-capítulos, correspondendo cada um deles a um período.

No primeiro, *Introdução nos programas oficiais do estudo da derivada*, apresentamos a análise dos programas oficiais em que surgiu pela primeira vez o estudo da derivada. Uma vez que nenhum dos manuais apresenta problemas de optimização, não se efectuou a análise de nenhum manual.

No segundo, *Introdução das aplicações da derivada nos programas oficiais*, apresentamos a análise dos programas oficiais, bem como dos problemas de optimização presentes no manual que vigorava na época como livro único.

No terceiro, *Introdução das Matemáticas Modernas em Portugal*, apresentamos a análise dos programas, bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No quarto, *A Lei de Bases do Sistema Educativo*, apresentamos a análise dos programas oficiais bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No quinto, *Introdução da calculadora gráfica nos programas oficiais*, apresentamos a análise dos programas oficiais, bem como de um conjunto de manuais que caracterizam a época.

No último capítulo, *Conclusões finais*, apresentamos a realização dos objectivos de investigação; as hipóteses de investigação e os resultados; as limitações do trabalho e as implicações para futuras investigações.

Com a realização deste trabalho pretendemos contribuir para uma melhor compreensão da forma como este tipo de problemas surgiu e foi abordado. Iremos também perceber a partir de quando e de que forma estes fizeram parte dos programas oficiais e dos manuais escolares ao longo de todo o século XX e XXI.

1. DESENHO DA INVESTIGAÇÃO

Neste capítulo, *Desenho da investigação*, iremos começar por apresentar a definição do problema de investigação, os objectivos a que esta se propõe, bem como as hipóteses formuladas e por fim apresentamos a metodologia adoptada na realização desta investigação, as fases em que se divide o trabalho e, finalmente, o plano de recolha de dados.

1.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

Uma das aplicações do cálculo de derivadas está na resolução de problemas de optimização.

Antes do uso das calculadoras gráficas, no Ensino Secundário, estes problemas eram abordados depois do estudo das derivadas, ou seja, eram abordados no capítulo do Cálculo Diferencial como uma aplicação deste.

Recentemente, com a introdução do uso das calculadoras gráficas, no Ensino Secundário (a partir dos 15 anos), tornou-se possível a resolução deste tipo de problemas antes do estudo das derivadas.

Uma vez que, em Portugal, não há nenhum estudo deste tipo, com excepção de um trabalho acerca do conceito de derivada no Ensino Secundário, ao longo do século XX, nesta nossa dissertação pretende fazer-se um estudo acerca de quando surgiram na História da Matemática os problemas de optimização e quais os matemáticos que os estudaram, bem como da forma como estes eram trabalhados. Pretende-se, ainda, fazer um estudo histórico acerca da abordagem feita pelos programas oficiais e pelos manuais escolares, dos problemas de optimização, ao longo do século XX e início do século XXI.

1.2. OBJECTIVOS E HIPÓTESES

De seguida irá proceder-se à descrição dos objectivos a que se propõe este trabalho de investigação bem como a descrição das hipóteses.

1.2.1. OBJECTIVOS

Os objectivos a que se propõe esta investigação são:

- Fazer uma análise histórica dos problemas de optimização; ver como e quando surgiram na História da Matemática e ainda quais os matemáticos que os abordaram;
- Verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização;
- Analisar, em cada plano de estudos, a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo da Análise, mas especificamente ao estudo dos problemas de optimização.
- Analisar como foram abordados: os tipos de problemas propostos pelo Ministério e os tipos de problemas abordados pelos manuais escolares;
- Verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério;
- Observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário;
- Contribuir para um melhor conhecimento da História da Análise Matemática em Portugal;

1.2.2. HIPÓTESES

As hipóteses da investigação são:

1. Será que os problemas de optimização surgiram antes do conceito de derivada?
2. Será que as várias fases por que passou o conceito de derivada influenciaram a forma de resolução dos problemas de optimização?
3. Será que em alturas distintas eram abordados distintos tipos de problemas de optimização?

1.3. METODOLOGIA

Vamos agora fazer a descrição da metodologia utilizada na realização deste trabalho, proceder à descrição das várias etapas e ainda referir o plano de recolha dos dados.

1.3.1. METODOLOGIA

Vejamos então a metodologia utilizada.

Uma vez que se trata de um trabalho histórico, começamos por investigar os livros acerca de História da Matemática e depois os livros históricos de Matemática através de vários séculos.

Baseando-nos na classificação das modalidades de investigação, proposta por Bisquerra (1989), podemos dizer o seguinte:

- Quanto ao **processo formal**, utilizamos o raciocínio hipotético – dedutivo;
- Em relação ao **grau de abstracção**, trata-se de uma investigação básica, uma vez que não se pretende estabelecer aplicações práticas a partir do estudo de investigação;

- Quanto à **natureza dos dados**, é uma investigação qualitativa, já que os dados são filtrados pelos critérios do investigador;
- Quanto à **manipulação das variáveis**, é uma investigação descritiva, dado que não se manipula nenhuma variável;
- A respeito da **dimensão cronológica**, é uma investigação histórica, pois descreve fenómenos ocorridos no passado tendo como fontes documentais a legislação e os livros de texto da época;
- Quanto aos **objectivos**, pretende fazer-se a descrição e a explicação de que é objecto no nosso estudo;
- Considerando as **fontes**, trata-se de uma investigação bibliográfica, visto que se irá fazer uma busca, recompilação, organização, valoração e crítica acerca dos problemas de optimização. Em simultâneo trata-se também de uma investigação metodológica, pois explicita uma forma de integrar métodos descritivos, para abordar uma investigação histórica em educação sobre um tema específico de matemática: os problemas de optimização;
- Quanto à **temporização**, trata-se de uma investigação longitudinal porque engloba diferentes períodos da História da Matemática.

1.3.2. ETAPAS DO TRABALHO

As etapas seguidas para a realização desta investigação foram estabelecidas tendo em conta a Metodologia da Investigação Histórica. Segundo Escolano (1984), a História da Educação é uma disciplina histórica especializada num sector da realidade, o sector educativo. Defende ainda que a inclusão da História da Educação no âmbito da ciência histórica, como disciplina sectorial, leva à aceitação de que o seu método deve ser o método histórico, que se realiza nas seguintes fases: heurístico – crítica, hermenêutica e exposição.

Ruiz Berrio (1976) elaborou a seguinte sequência de etapas para realizar as três fases:

1. Delíneamento da investigação
 - Definição do problema. Critérios
 - Estado da questão
 - Primeira recolha de fundos documentais
 - Primeira delimitação da investigação
2. Elaboração de uma hipótese ou campo de hipóteses
3. Recolha dos dados ou fase de documentação
 - Selecção e classificação dos documentos
4. Crítica dos documentos
 - Crítica interna
 - Crítica externa ou crítica de erudição
5. Análise e interpretação dos documentos
6. Construção ou síntese histórica: explicação histórico – pedagógica
7. Exposição do trabalho de investigação

1.3.3. PLANO DE RECOLHA DOS DADOS E DE TRABALHO

Como se trata de uma investigação histórica, as fontes a utilizar foram essencialmente fontes documentais. Estas foram obtidas em várias instituições:

- Biblioteca Nacional e Bibliotecas Municipais, nomeadamente a Biblioteca Municipal de Coimbra;
- Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra;
- Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra;
- Biblioteca da Escola Secundária José Falcão;
- Biblioteca e Hemeroteca da Faculdade de Educação da Universidade de Salamanca.

Dado que é um trabalho histórico, começámos por estudar os livros históricos, depois fez-se a análise da legislação referente ao ensino da Matemática ao longo do século XX e XXI, passando a seguir à recolha, análise e classificação dos manuais escolares ao longo do referido século.

Como já referimos, este trabalho foi dividido em duas partes:

- 1ª Parte: Estudo histórico acerca das aplicações das derivadas: Problemas de Optimização.

Nesta parte, levámos a efeito um estudo, através dos livros de História da Matemática e História do Cálculo com o objectivo de identificar os matemáticos que, possivelmente, abordaram nas suas obras os problemas de optimização. Determinando assim as várias fases pelas quais passou o conceito de derivada.

E após a recolha das obras dos matemáticos identificados na pesquisa elaborada, localizámos as obras sobre as quais encontramos referência. Analisámos cada uma das obras encontradas com o objectivo de verificar, se, de facto, os autores abordaram nas suas obras os problemas de optimização.

Por fim, entre todas as obras localizadas que tratam os problemas de optimização, seleccionamos algumas das obras para, então, elaborarmos uma apreciação mais detalhada.

Ao longo da análise dos problemas de optimização, presentes nas obras, procedemos também a uma catalogação dos mesmos, bem como das respectivas demonstrações ou resoluções.

- 2ª Parte: Análise dos planos de estudo e dos manuais escolares.

Nesta parte fizemos uma análise e classificação dos vários planos de estudos que surgiram ao longo do século XX e XXI. Esta fase permitiu verificar quais os planos que abordavam os problemas de optimização e de que forma eram abordados. Analisámos ainda os vários manuais escolares que surgiram para cada plano de estudos, com o objectivo de verificar quais os que abordam os problemas de optimização, verificar em que contexto é feita a sua abordagem e classificar estes mesmos problemas. Pretendeu-se ainda verificar se estes iam de encontro ao que é referido nos programas oficiais.

Para tanto, procedemos à recolha de todos os planos de estudo que foram decretados ao longo do século para, posteriormente, os avaliar. Utilizámos também livros

de História de Portugal e História do Ensino em Portugal para vermos o enquadramento social, político e económico de cada uma das reformas.

Depois identificámos e localizámos os manuais escolares da disciplina de Matemática que surgiram para cada uma das reformas educativas ao longo de todo o século. Seguidamente seleccionámos algumas destas obras para então fazer a sua análise.

2. ANÁLISE HISTÓRICA DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Tal como referimos anteriormente, um dos primeiros passos da nossa investigação foi identificar os matemáticos e as obras que abordaram os problemas de optimização. Assim começámos por procurar nos livros de História da Matemática e de História do Cálculo essa mesma informação. Nos livros clássicos da Matemática podemos encontrar informação acerca de quando, de que forma e por quem foram abordados os Problemas de Optimização.

O livro de Boyer (1993), *História da Matemática*, foi um importante ponto de partida uma vez que aí pudemos encontrar informação acerca de quando surgiram os problemas de optimização, bem como referência aos matemáticos que os estudaram. De igual modo foi possível encontrar dados importantes não só acerca da evolução o Cálculo Diferencial como importantes referências bibliográficas que nos permitiram ir de encontro aos clássicos da Matemática que abordam o tema.

Outros livros de História da Matemática que nos permitiram completar a informação recolhida na primeira obra são os seguintes:

- *A history of Mathematics*, de Katz (1993)
- *História Concisa das Matemáticas*, de Struik (1989)
- *The Historical Developmet of the Calculus*, de Edwards (1979)
- *The History of the Calculus and its Conceptual Development*, de Boyer (1959)

Com base na informação que conseguimos recolher nos livros acima referidos, elaborámos um índice cronológico de autores que desenvolveram estudos na área do Cálculo Diferencial e, por esse motivo, julgamos estarem relacionados com o estudo de problemas de optimização.

A partir do índice cronológico, levamos a efeito uma pesquisa com o objectivo de identificar as obras existentes de cada um dos autores ou acerca dos mesmos. Formámos então uma tabela com todas as obras encontradas. Nessa tabela indicamos as seguintes informações: Autor, data de nascimento e falecimento do autor, título da obra ou obras do autor, ano e local de publicação, edição e por fim a localização da obra.

Indicámos a seguir o índice cronológico e a tabela de autores realizados.

ÍNDICE CRONOLÓGICO

SÉCULO	AUTOR
IV a.C.	EUCLIDES (330-260 a. C.)
I a.C.	PTOLOMEU, Claudio (168-90 a. C.)
IV	PAPPUS, de Alexandrie (290-350)
XVII	FERMAT, Pierre de (1601-1665) NEWTON, Isaac (1642-1727) BERNOULLI, Jacques (1654-1705) VARIGNON, Pierre (1654-1722) BERNOULLI, Jean (1667-1748) LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646-1716) PASCAL, Blaise (1623-1662) L'HÔPITAL, Guillaume François Antoine de, (1661-1704)
XVIII	BEZOUT, E. (1730-1783) EULER, Leonhard (1707-1783) LAGRANGE, Joseph Louis de (1736-1813)
XIX	LACROIX, Silvestre-François (1765-1843) CAUCHY, Augustin-Louis (1789-1875) STURM, Jacques Charles François (1803 – 1855) SERRET, Joseph Alfred (1819-1885) RIEMANN, Bernhard (1826-1866) LEBESGUE, Henri, (1875-1941)

A. OBRAS ACERCA DO AUTOR

SÉC.	OBRA SOBRE:	AUTOR	TÍTULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
IV a.C.	EUCLIDES (330-260 a.C.)	Thomas L Heath.	Elementos de Euclides The thirteen books of Euclid's Elements.	Lisboa: 1768 New York: 1956	2ª Ed.
IV	PAPPUS, A (290-350)	Paul Ver Eecke	La collection mathématique / Pappus d'Alexandrie	1933 ; Paris	
XIX	LACROIX, S.F. (1765-1843)	M. Hermité e J. A. Serret	Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral	1874 ; Paris: Gauthier-Villars	8ª Ed

B . OBRAS DO AUTOR

SÉC.	AUTOR	TÍTULO	ANO E LOCAL DE PUBLICAÇÃO	EDIÇÃO
XVII	BERNOULLI, J. (1667-1748)	Johannis Bernoulli opera omnia. - 4 vols.	1742; Lausannae & Genevae	
	L'HÔPITAL, G. (1661-1704)	Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes	1716 ; Paris	2ª Ed.
XVIII	BEZOUT, E. (1730-1783)	Cours de mathématique Elementos de analyse	1775; Paris 1793; Coimbra	 2ª ed.
	EULER, L. (1707-1783)	Introduction à l'analyse infinitésimale ; 2 v	Paris: 1987-1988	
	LAGRANGE, J. L. (1736-1813)	Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel	Paris: 1847	3ª Ed
		Leçons sur le calcul des fonctions, servant de commentaire et de supplément à la théorie des fonctions analytiques. Theorica das funções analyticas, que contem os principios do calculo	Paris: 1808 Lisboa: 1798	
XIX	LACROIX, S. F. (1765-1843)	Traité élémentaire de calcul différentiel et calcul intégral		
	CAUCHY, A. L. (1789-1875)	Résumé des leçons données	Paris: 1987	
		Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy	Paris: 1882-1938	
	STURM, J. C. F. (1803 – 1855)	Cours D'Analyse de L'École Polytechnique	Paris: 1884	7ª Ed
	SERRET, J. A. (1819-1885)	Cours de Calcul Differentiel et Integral	Paris: 1878	
	RIEMANN, B. (1826-1866)	Oeuvres mathématiques de Riemann	Paris: 1898	
	LEBESGUE, H. (1875-1941)	Oeuvres scientifiques	Genève : 1972	

Nota: As obras acima referidas cuja localização começa por UCBGBJ foram localizadas na Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra. A obra sob a sigla UCLEFI foi localizada na Biblioteca de Estudos Filosóficos da Universidade de Coimbra. Todas as outras obras acima referidas foram encontradas na Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Assim, com base nos registos presentes nos livros acerca de *História da Matemática*, podemos dividir a análise histórica dos problemas de optimização em 4 períodos:

1º Período – Período Grego: Desde o século IV a. C. até ao século IV D.C.;

2º Período – Nascimento: Século XVI e XVII;

3º Período – Consolidação: Século XVIII;

4º Período – Institucionalização: Século XIX;

Vamos agora apresentar o estudo elaborado, separadamente, de cada um dos períodos. A respeito de cada um dos quatro períodos procurámos verificar quais os autores que abordaram os problemas de optimização nas suas obras e quais os tipos de problemas de optimização presentes em cada uma delas, tentando fazer uma categorização dos mesmos.

Após um primeiro exame a cada uma das obras, seleccionámos para analisar, detalhadamente, uma ou duas dos respectivos autores da época. Para cada uma elaborámos uma ficha de referência da obra, contendo o nome do autor, a data de nascimento e falecimento do autor, o título, o ano, a editora da primeira edição e da edição consultada e por fim a localização da mesma. Seguindo-se a contextualização e intenção do autor, a caracterização da estrutura da obra e os problemas de optimização aí encontrados, bem como um comentário aos mesmos.

Na análise efectuada a cada um dos problemas, tivemos em conta os seguintes aspectos:

- Forma de Enunciado: Identificámos a forma como o problema surge enunciado
 - Proposição (PR): Problemas enunciados como uma proposição
 - Exemplo (EX): Problemas assinalados como exemplos
 - Problema (PB): Problemas enunciados como problema
 - Aplicação (AP): Problemas indicados como aplicação
 - Exercício (EXR): Problemas enunciados como exercício
- Tipo de problema: Identificámos o contexto em que este problema se enquadra
 - Geometria Plana (GP)
 - Geometria Espacial (GE)
 - Aritmética (AR)

- Física (FI)
- Astronomia (AS)

- Tipo de optimização: Identificámos o que se pretende optimizar no problema
 - Distância (OD)
 - Área (OAR)
 - Volume (OV)
 - Produto (OP)
 - Ângulo (OAN)
 - Razão (OR)
 - Tempo (OT)

- Tipo de resolução: Identificámos a forma como é feita a resolução. Se esta surge como uma demonstração, no caso em que o problema surge como uma proposição ou se apresenta a resolução, nos restantes casos.
 - Demonstração (DEM)
 - Resolução (RES)

Segue-se, a análise feita a cada uma das obras.

2.1. PERÍODO GREGO: DESDE O SÉCULO IV a. C. ATÉ AO SÉCULO IV

Verificámos através da nossa pesquisa que, de facto, antes de surgir o conceito de derivada já existiam e já se resolviam problemas de máximos e mínimos. Nesta altura os problemas que existiam eram problemas essencialmente geométricos: Geometria Plana ou Geometria Espacial.

Neste primeiro período fomos encontrar 3 autores relacionados com o nosso tema: Euclides (330 - 260 a.C.), Ptolomeu (168 – 90 a. C.) e Pappus (290-350).

Uma vez que o conceito de derivada e, consequentemente, o conceito de problemas de optimização são posteriores a este período, estes surgem e são resolvidos de uma outra forma, ou seja, sem que se faça uso do Cálculo Diferencial.

Vejamos de seguida quais os problemas de optimização encontrados nas obras de cada um dos autores referidos e analisemos também a forma como estes elaboram a sua resolução.

Vamos apenas analisar a obra de Euclides e de Pappus, uma vez que na sua obra, Pappus, apresenta uma compilação de vários trabalhos de outros autores e, em particular, de Ptolomeu.

2.1.1. ELEMENTOS DE EUCLIDES

2.1.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Euclides

Data de nascimento e falecimento do autor: $\approx$ 330 a. C. - 260 a. C

Título: *Elementos*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 300 a. C.

Autor da obra consultada: Thomas L. Heath

Título da obra consultada: *The thirteen books of Euclid's Elements*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1956, New York: Dover. - Traduzidos do texto de Heiberg – 2ª edição revista e com aumentos

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 01A75/EUC.Ele/V.1; 01A75/EUC.Ele/V.2; 01A75/EUC.Ele/V.3.

2.1.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Euclides (c. 330 a. C. - 260 a. C.) foi um dos primeiros geómetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.

Existem poucas informações sobre a sua vida. Foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a. C. - 283 a. C.), em Alexandria, mais conhecida por "Museu".

Embora se tenham perdido mais de metade dos seus livros, ainda restaram, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os *Elementos*. Publicados por volta de 300 a. C.. Aí está contemplada a Aritmética, a Geometria e a Álgebra (BOYER, 1993).

O trabalho de Euclides é muito vasto. As suas obras foram inicialmente traduzidas para árabe, depois para latim, e a partir destes dois idiomas para outras línguas europeias.

Embora alguns conceitos já fossem conhecidos anteriormente à sua época, o que impossibilita uma análise completa da sua originalidade, pode-se considerar o seu trabalho como genial. Ao recolher tudo o que então se conhecia, sistematiza os dados da intuição e substitui imagens concretas por noções abstractas, para poder raciocinar sem qualquer apoio intuitivo (BOYER, 1993).

2.1.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

Observemos como está estruturado o texto dos *Elementos*, nas versões que se ajustam melhor ao texto original.

O texto de Euclides, *Elementos*, está dividido em treze capítulos, chamados *Livros*. Em cada livro estão presentes pontos diferentes. Esses pontos são: definições, proposições, porismas, lemas, postulados e noções comuns (HEATH, 1956).

Os livros distinguem-se entre si pelo conteúdo. Vejamos qual o conteúdo de cada um dos livros:

- Os quatro primeiros livros e o sexto estudam a Geometria no Plano;
- O livro quinto está dedicado à Teoria da Proporção;
- Os livros sétimo, oitavo e nono, tratam da Teoria de Números;
- O livro décimo fala sobre os Irracionais;

- Os livros décimo primeiro, décimo segundo e décimo terceiro dissertam sobre a Geometria no Espaço (HEATH, 1956).

Ora é exactamente nos livros acerca de Geometria no Plano que vamos encontrar proposições que podem ser interpretadas como problemas de otimização.

2.1.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO PRESENTES NA OBRA

Ao longo desta obra encontramos algumas proposições que podem ser interpretadas como um problema de otimização. As quatro primeiras surgem no livro III: proposições 7, 8, 15 e 16 e estão relacionadas com o círculo. A quinta surge posteriormente no livro VI: proposição 27 está relacionada com as proporções de figuras planas. As proposições de Euclides são de dois tipos: Ou são construções (dividir uma recta, construir um quadrado) ou são teoremas enunciados em forma condicional, como é o caso das proposições relacionadas com problemas de otimização.

Vejamos agora a forma não só como Euclides as enuncia, mas também como as demonstra. Apresentamos também os resultados em que se baseia para as demonstrar e as aplicações posteriores que o autor faz das mesmas.

Livro III – Proposição 7 (enunciado = prótasis)

Se tomarmos um ponto no diâmetro de um círculo que não seja o centro do círculo e desde o ponto até ao círculo caem algumas rectas, a maior será aquela na qual se encontra o centro, e a mínima o resto da máxima para o diâmetro inteiro. E das restantes a mais próxima da recta que passa no centro é sempre maior do que as mais afastadas. Do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência senão duas rectas iguais, e estas cairão para uma e para outra parte daquela, que entre todas for a mínima. (Vol. II; pag.14)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e os ângulos formados por esses lados forem também iguais, as bases dos triângulos e os mais ângulos serão também iguais [I.4];
- Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];

- Num ponto de uma linha recta dada formar um ângulo rectilíneo dado [I.23];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24].

Vejamos agora como Euclides demonstra esta proposição, ou seja, que o diâmetro é a maior distância entre dois pontos da circunferência:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)²

Seja ABCD um círculo, e seja AD o seu diâmetro; Em AD tome-se o ponto F que não seja o centro do círculo, seja E o centro do círculo. A partir do ponto F para a circunferência ABCD tracemos as rectas FB, FC, FG.

Determinação (diorismós)³

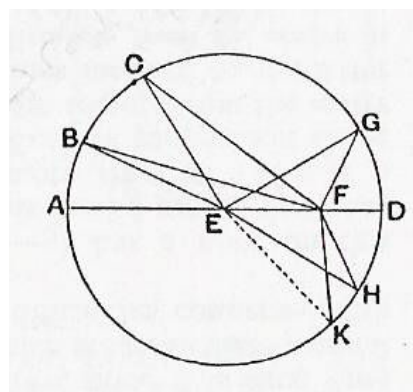
Eu digo que FA é a maior, e FD é a menor entre todas as rectas que vão de F para a circunferência. Digo também que FB é maior do que FC, e FC maior do que FG.

Construção (kataskeue)⁴

Tracemos agora BE, CE, GE. Como em qualquer triângulo dois lados são maiores do que o restante, EB, EF juntamente são maiores do que BF, mas AE é igual a BE, portanto AF é maior do que BF.

Demonstração (apódeixis)⁵

Além disso, como BE é igual a CE, e FE é comum, os dois lados BE, EF são iguais aos dois lados CE, EF. Mas o ângulo BEF também é maior do que o ângulo CEF; Portanto a base BF é maior do que a base CF. Pela mesma razão CF é maior do que FG.



² O enunciado da proposição é completamente geral enquanto que a exposição se refere ao caso particular do desenho sobre o que se vai fazer a demonstração

³ Na determinação indica-se qual é o objectivo que se pretende alcançar em função da figura que se apresenta como exemplo para traçar a demonstração. Costuma-se iniciar com as palavras "digo que..."

⁴ Completa-se a figura com os elementos necessários para desenvolver a demonstração

⁵ Apesar de no raciocínio se fazer referência a uma figura, as proposições em que se baseia são gerais pelo que a validade do raciocínio é também geral.

Além disso, como GF, FE juntamente são maiores do que EG, e EG é igual a ED, então as duas GF, FE são maiores do que ED. Seja EF subtraída de cada uma; Então a restante GF é maior do que a restante FD. Portanto FA é a maior, FD é a mais pequena, e FB é maior do que FC, e FC maior do que FG.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Digo ainda que do ponto F para a circunferência ABCD só se poderão traçar duas rectas iguais entre si, e que estas duas rectas cairão uma para uma e outra para outra parte da menor FD.

Construção (kataskeue)

Pela recta EF, e pelo ponto E contido nela, vamos construir o ângulo FEH igual ao ângulo GEF, e vamos unir FH.

Demonstração (apódeixis)

De seguida, como GE é igual a EH, e EF é comum, as duas GE, EF são iguais às duas HE, EF; e o ângulo GEF é igual ao ângulo HEF, portanto a base FG é igual à base FH.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse ainda que qualquer outra recta igual a FG não iria passar no círculo pelo ponto F.

Construção (kataskeue)

Tracemos agora FK, igual a FG

Demonstração (apódeixis)

Então, como FK é igual a FG, e FH igual a FG, então FK também é igual a FH, isto é, a mais próxima da recta que passa no centro será assim igual à mais afastada: o que é impossível. Portanto outra recta igual a GF não irá passar no ponto F.

Conclusão (sympérasma)

Assim só uma recta está nessas condições.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

- Se de um ponto tomado dentro de um círculo caírem na circunferência mais de duas rectas iguais entre si, o dito ponto será o centro do círculo [III. 19].

Livro III – Proposição 8 (enunciado = prótasis)

Se tomarmos um ponto exterior a um círculo e do ponto ao círculo traçarmos algumas rectas, uma das quais passe pelo centro e as restantes são traçadas ao acaso, das

rectas que caem na parte concava da circunferência, a maior é a que passa pelo centro, e das restantes sempre a mais próxima da que passa no centro é maior do que as mais afastadas. Mas das que caem na parte convexa da circunferência a menor é a que passa pelo centro, e das restantes a mais próxima à mais pequena é sempre menor que a mais afastada. E do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência mais de duas rectas iguais, e destas uma cairá para uma parte e a outra para a parte oposta a respeito da recta, que entre todas seja a mínima. (Vol. II; pag.17)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e os ângulos formados por esses lados forem também iguais, as bases dos triângulos e os mais ângulos serão também iguais [I.4];
- Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];
- Se sobre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas rectas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão um ângulo maior do que o ângulo que fica oposto ao lado, sobre cujos extremos estão postas as ditas rectas [I.21];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

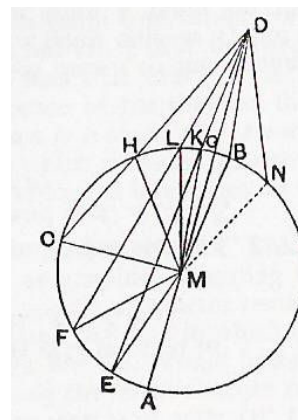
Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja ABC um círculo, e seja D um ponto tomado do exterior de ABC. Tracemos as rectas DA, DE, DF, DC, e seja DA a recta que passa no centro.

Determinação (diorismós)

Disse que, das rectas que caem na parte côncava da circunferência AEFC, a recta DA que passa no centro é a maior, e DE é maior do que DF e DF maior do que DC.



Demonstração (apódeixis)

Mas, das rectas que caem sobre a parte convexa da circunferência HLKG, a recta DG que passa pelo centro é a menor; e a mais próxima da menor DG é sempre menor do que a mais afastada, DK menor do que DL e DL menor do que DH.

Construção (kataskeue)

Tracemos o centro da circunferência ABC, seja ele M, tracemos as rectas ME, MF, MC, MK, ML, MH.

Demonstração (apódeixis)

Então, como AM é igual a EM, adicionemos a cada uma MD; Então AD é igual às duas EM, MD. Mas EM, MD juntamente são maiores do que ED, então AD também é maior do que ED. Além disso, como ME é igual a MF, e MD é comum, Então as duas EM, MD são iguais às duas FM, MD; E o ângulo EMD é maior do que o ângulo FMD; Então a base ED é maior do que a base FD. Da mesma forma podemos provar que FD é maior do que CD; Então DE é a maior, e DE é maior do que DF, e DF maior do que DC.

Agora, se MK, KD juntas são maiores do que MD, e MG é igual a MK; Tirando de uma e outra parte as duas MK, MG, fica GD é menor do que KD; e por consequência GD menor do que KD. Logo, GD é a menor. E, se em MD, um dos lados do triângulo MLD, duas rectas MK, KD são construídas dentro do triângulo, então as duas MK, KD juntas são menores do que as duas ML, LD. E MK é igual a ML, então a restante de DK é mais pequena que a restante de DL. Da mesma forma podemos provar que DL é também menor do que DH;

Conclusão (sympérasma)

Então DG é a mais pequena, e DK é menor do que DL, e DL menor do que DH.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Disse também que do ponto D não se poderão tirar, para a circunferência, senão duas rectas iguais, uma para uma e outra para outra parte da recta DG.

Construção (kataskeue)

Sobre a recta MD, e pelo ponto M, tracemos o ângulo DMB igual ao ângulo KMD e tire-se DB.

Demonstração (apódeixis)

Então, como MK é igual a MB, e MD é comum, os dois lados KM, MD são iguais aos dois lados BM, MD respectivamente; e o ângulo KMD é igual ao ângulo BMD;

Conclusão (sympérasma)

Então a base DK é igual à base DB.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse que outra recta igual a DK iria passar no círculo pelo ponto D.

Construção (kataskeue)

Se possível, tracemos essa recta DN.

Demonstração (apódeixis)

Então, como DK é igual a DB, DB também é igual a DN, seria, a mais próxima da menor DG igual à mais afastada: o que foi provado que é impossível.

Conclusão (sympérasma)

Então, não existem mais de duas rectas iguais que passam no círculo ABC pelo ponto D, uma em cada lado de DG a mais pequena.

Posteriormente não se encontra nenhuma aplicação desta proposição.

Livro III – Proposição 15 (enunciado = prótasis)

Num círculo o diâmetro é a recta maior e das restantes, a mais próxima ao centro é sempre maior do que a mais afastada. (Vol. II; pag.36)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro [I.20];
- Se dois triângulos tiverem dois lados iguais, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais for maior, e o outro for menor, a base que estiver oposta ao ângulo maior será maior que a outra base oposta ao ângulo menor [I.24];
- Em todo o círculo as rectas iguais distam igualmente do centro, e as que distam igualmente do centro são iguais [III.14];
- Teorema de Pitágoras. [I. 47]

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja ABCD um círculo e seja AD o seu diâmetro e o ponto E o centro; e seja BC a mais próxima do diâmetro AD, e FG a mais afastada;

Determinação (diorismós)

Eu disse que AD é a maior e que BC é maior do que FG.

Construção (kataskeue)

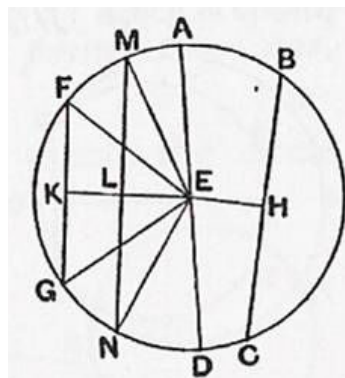
Pelo centro E, tracemos EH, EK perpendiculares a BC, FG, e também os semi-diâmetros EB, EC, EF.

Demonstração (apódeixis)

Sendo AE igual a EB, e DE igual a EC, então AD é igual às duas BE, EC tomadas juntas. Mas BE, EC são maiores que BC. Logo AD é maior do que BC. Como BC está mais perto do centro do que FG, então EK é maior do que EH. Mas BC é o dobro de BH, e FG é o dobro de FK; e os quadrados de EH, HB são iguais aos quadrados de EK, KF, dos quais o quadrado de EH é menor do que o quadrado de EK, pois EH é menor do que EK.

Conclusão (sympérasma)

Logo, o quadrado de BH será maior do que o quadrado de FK, e assim será BH maior do que FK e BC maior do que FG.



Segunda Parte

Exposição (ékthesis)

Seja BC maior do que FG.

Determinação (diorismós)

Digo, que a recta BC estará mais perto do centro do que a recta FG, isto é, feita a mesma construção, será EH menor do que EK.

Demonstração (apódeixis)

Porque sendo BC maior do que FG, será BH maior do que FK. Mas os quadrados de BH, HE são iguais aos quadrados de FK, KE, dos quais o quadrado de BH é maior que o quadrado de FK, por ser BH maior do que FK.

Conclusão (sympérasma)

Logo, o quadrado de EH será menor que o quadrado de EK, e por consequência será EH menor do que EK.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

- Dadas duas esferas concêntricas, inscrever na esfera maior um sólido poliedro, cuja superfície não toque a esfera menor [XII. 17].

Livro III – Proposição 16 (enunciado = prótasis)

A recta desenhada pelo extremo do diâmetro de um círculo formando ângulos rectos com o diâmetro, irá cair fora do círculo, e não se irá interpor outra recta no espaço entre a recta e a circunferência e o ângulo do semicírculo é maior, e o que fica é menor, do que qualquer ângulo rectilíneo agudo. (Vol. II; pag.37)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que estão sobre a base são iguais; e produzidos os lados iguais, os ângulos que se formam debaixo da base também são iguais [I.5];
- Dois ângulos de um triângulo qualquer, tomados de qualquer modo, são menores que dois ângulos rectos [I.17];
- Em qualquer triângulo, o ângulo maior fica oposto ao lado maior [I.19].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja ABC um círculo, D o seu centro e AB o seu diâmetro;

Determinação (diorismós)

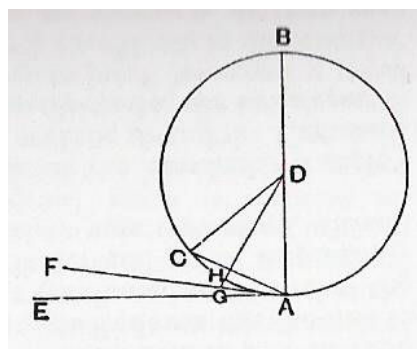
Eu disse que as rectas traçadas a partir de A formando ângulos rectos com AB a partir da extremidade irão cair fora do círculo.

Construção (kataskeue)

Suponhamos que não é verdade, mas, se possível, de centro no círculo, como a recta AC. Tire-se DC.

Demonstração (apódeixis)

Como DA é igual a DC, o ângulo DAC é também igual a ACD. Mas o ângulo DAC é recto. Então o ângulo ACD também é recto; Assim, no triângulo ACD, os dois ângulos



DAC, ACD são iguais a dois ângulos rectos, o que é impossível. Então a recta traçada a partir do ponto A nos ângulos rectos até BA não irá cair dentro do círculo. De forma semelhante podemos provar que não irá cair sobre a circunferência;

Conclusão (sympérasma)

Então cai fora da circunferência, como AE.

Segunda parte

Determinação (diorismós)

Eu disse depois que no espaço entre a recta AE e a circunferência CHA não pode ser interposta outra recta.

Construção (kataskeue)

Se possível, deixemos que outra recta se interponha, seja ela FA, e seja DG traçada a partir do ponto D perpendicular a FA.

Demonstração (apódeixis)

Então, como o ângulo AGD é recto, e o ângulo DAG é menor do que um ângulo recto, AD é maior do que DG. Mas DA é igual a DH; então DH é maior do que DG, o menor que o menor: o que é impossível.

Conclusão (sympérasma)

Então não pode ser interposta outra recta no espaço entre a recta e a circunferência.

Terceira parte

Determinação (diorismós)

Eu disse, além disso, que o ângulo do semicírculo contido entre a recta BA e a circunferência CHA é maior do que qualquer ângulo agudo rectilíneo, e o restante ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE é menor do que qualquer ângulo agudo rectilíneo.

Demonstração (apódeixis)

Se existe um qualquer ângulo rectilíneo maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, e qualquer ângulo rectilíneo menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE, então dentro do espaço entre a circunferência e a recta AE irá interpor-se uma recta que irá fazer um ângulo contido entre as rectas que será maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, e um outro ângulo contido entre rectas que é menor do que o

ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE. Mas tal recta não se pode interpor;

Conclusão (sympérasma)

Então não existe nenhum ângulo agudo contido entre as rectas que seja maior do que o ângulo contido entre a recta BA e a circunferência CHA, também não existe nenhum ângulo agudo contido entre as rectas que seja menor do que o ângulo contido entre a circunferência CHA e a recta AE.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar os resultados seguintes:

- Sobre uma linha recta dada descrever um segmento de círculo, no qual segmento possa existir um ângulo igual a outro ângulo rectilíneo dado [III. 33];
- Se de um ponto qualquer fora de um círculo se tirarem duas rectas, das quais uma corte o círculo, e a outra chegue somente até à circunferência; e se o rectângulo compreendido pela recta inteira que corta o círculo e pela parte dela que fica entre o dito ponto e a parte convexa da circunferência, for igual ao quadrado da recta incidente sobre a circunferência, será a recta incidente tangente ao círculo [III. 37];
- Inscrever um círculo num quadrado dado [IV. 8];
- Inscrever um círculo num pentágono dado equilátero e equiângulo [IV. 13].

Esta proposição utilizou-se posteriormente como definição de recta tangente a uma curva

Mais à frente, no livro VI, podemos encontrar mais uma proposição que se pode interpretar como um Problema de Optimização.

Livro VI – Proposição 27 (enunciado = prótasis)

De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma recta e com os defeitos⁶ de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita recta, e

⁶ O método de construção do paralelogramo cuja área seja equivalente à de uma recta com uma longitude dada, diz-se que se faz por justaposição (parabole ton chorion) diz-se que é por excesso (hipérbole) si a área é maior que a longitude da linha e por defeito (elleipsis) se a área é menor que a longitude da linha. Estas denominações transportaram-se posteriormente às cônicas. Esta proposição, juntamente com a 28 e a 29 foi considerada como o equivalente geométrico da forma algébrica mais generalizada de equações quadráticas quando tem uma raiz real positiva. Constitui o fundamento do livro X e do estudo realizado por Apolónio das cônicas

semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma recta, e é semelhante à figura paralelograma que falta. (Vol. II; pag.257)

Para demonstrar esta proposição Euclides baseia-se nos seguintes resultados apresentados e demonstrados anteriormente:

- Os paralelogramos que estão postos sobre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais [I.36];
- Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si [I.43];
- Se de um paralelogramo for tirado outro paralelogramo semelhante ao total, e semelhantemente posto, e que tenha um ângulo comum ao mesmo total, o paralelogramo que for tirado, existirá ao redor da diagonal do paralelogramo total [VI.26].

Vejamos como Euclides demonstra esta proposição, ou seja, para um mesmo perímetro o paralelogramo com maior área é o quadrado:

Primeira parte

Exposição (ékthesis)

Seja AB uma recta bissectada por C. Apliquemos à recta AB o paralelogramo AD com a falta da figura paralelogramica DB descrita sobre a metade de AB, seja ela CB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que, de todos os paralelogramos aplicados em AB e com as faltas de figuras paralelogramicas semelhantes e de forma semelhante situada em BD, AD é o maior.

Construção (kataskeue)

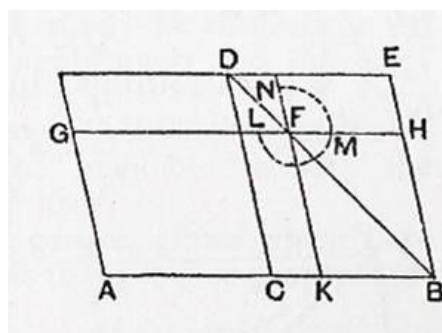
Apliquemos à recta AB o paralelogramo AF com a falta da figura paralelogramica FB semelhante e situada de forma semelhante a DB;

Determinação (diorismós)

Eu disse que o paralelogramo AD era maior do que o paralelogramo AF.

Demonstração (apódeixis)

Seja primeiramente a base AK do paralelogramo AF maior do que a recta AC. Como o paralelogramo DB é semelhante ao paralelogramo FB, então eles têm a mesma diagonal. Tracemos essa diagonal DB, produzindo a recta KF até ao ponto L. Como o



paralelogramo CF é igual a FE, e FB é comum, então a totalidade de CH é igual à totalidade de KE. Mas CH é igual a CG, pois AC também é igual a CB. Então GC também é igual a EK. Juntemos-lhe o paralelogramo CF; Então o paralelogramo AF é igual ao gnômon LMN, e por isso o paralelogramo CE, isto é, o paralelogramo AD será maior do que o paralelogramo AF.

Em segundo lugar seja a base AK do paralelogramo AF menor do que a recta AC. Suposta a mesma construção, como os paralelogramos DH, DG são iguais, pois HM é igual a MG, então DH é maior do que LG. Mas DH é igual a DK. Logo DK é maior do que LG.

Conclusão (sympérasma)

Por isso juntando a uma e outra parte o mesmo paralelogramo AL, o paralelogramo DB, ou seja AD, é maior do que o paralelogramo AF.

Posteriormente, Euclides utiliza esta proposição para demonstrar o resultado seguinte:

- Aplicar a uma linha recta dada um paralelogramo igual a um rectilíneo dado, e com o defeito de uma figura paralelogramica semelhante à outra dada. Mas o rectilíneo dado, ao qual se quer que seja igual ao paralelogramo que se pede, não deve ser maior que o paralelogramo, que se aplica à metade da recta dada, sendo semelhantes entre si os defeitos, tanto do paralelogramo que se pede com o defeito da figura paralelogramica semelhante à outra dada [VI. 28].

2.1.1.5. CONCLUSÃO

Podemos verificar que Euclides, ao longo das suas demonstrações, denomina os segmentos de recta por rectas. Assim, sempre que se lê linha recta, devemos ler segmento de recta.

Verificamos também, através da análise destas proposições, que todos os problemas de optimização apresentados são problemas de Geometria Plana. Mais concretamente, problemas sobre optimização de áreas, de distâncias ou de ângulos.

Estes não aparecem enunciados como um problema, mas sim como uma proposição e são demonstrados tendo como base o método de redução ao absurdo. Para isso utiliza proposições prévias fundamentalmente relacionadas com a igualdade de triângulos e relações entre os ângulos de um triângulo.

Nesta obra, as ilustrações são apresentadas ao longo do texto, mas, como se trata de uma tradução da obra original, não podemos concluir se nesta se apresentavam da mesma forma.

Actualmente não seria necessário fazer uma demonstração/resolução tão extensa, já que bastaria determinar a equação que define a área ou a distância e calcular os seus extremos através da derivada da função.

Transportando estes factos para o ensino dos problemas de optimização, no Ensino Secundário, verificamos que é possível abordar os problemas de optimização antes de os alunos conhecerem o conceito de derivada.

2.1.2. LA COLLECTION MATHEMATIQUE DE PAPPUS DE ALEXANDRIE

2.1.2.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Pappus de Alexandria

Data de nascimento e falecimento do autor: 290-350

Título: *La collection mathématique*

Ano, editora e lugar da primeira edição: século IV

Autor da obra consultada: Paul Ver Eecke

Título da obra consultada: *Pappus D'Alexandrie: La collection Mathématique*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1933, Paris: Desclée de Brouwer - 2 vol.

Obra traduzida pela primeira vez do Grego para o Francês com introdução e notas do autor

Localização da obra consultada: Biblioteca do Instituto de Estudos Filosóficos da Faculdade de Letras da Universidade de Coimbra. Cota: UCLEFI C-6-2/3.

2.1.2.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Pappus de Alexandria foi o último dos grandes géometras gregos e um dos seus teoremas é citado como sendo a base da moderna geometria projectiva.

Existem poucos registos sobre a sua vida, sendo que as datas apresentadas advêm de referências bibliográficas ao seu nome e aos seus feitos. À parte destes detalhes pouco mais se sabe, aparentemente viveu em Alexandria toda a sua vida, talvez tenha sido encorajado a estudar certos problemas matemáticos por um amigo, Hierius, e talvez tenha ensinado numa escola de Alexandria.

Os seus mais importantes legados em geometria foram a *Sinagoga* e a *Colecção Matemática*, sendo este último um grupo de oito livros que provavelmente foi escrito por partes, pois cada livro trata de diferentes tópicos e cada um conta com a sua própria introdução e com notas históricas sobre o assunto (BOYER, 1993).

2.1.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A *Colecção Matemática*, como já referimos é composta por um grupo de oito livros, tratando cada livro, diferentes tópicos e tendo cada um a sua própria introdução e notas históricas sobre o assunto.

Assim, o primeiro livro, que se encontra perdido, trata de assuntos de aritmética e as partes do segundo, que sobreviveram ao tempo, tratam do método de Apolónio referente a "grandes" números. O método expressa números, como potências de uma miríade, isto é, como potências de 10 000.

O terceiro livro da colecção está dividido em quatro partes. A primeira é referente ao problema de encontrar duas médias proporcionais entre duas linhas rectas dadas. Na segunda segue-se a construção das médias aritméticas, geométricas e harmónicas. Na terceira é descrita uma colecção de paradoxos, aos quais são dados créditos a Erycinos e, finalmente, a quarta parte mostra como cada um dos cinco poliedros regulares pode ser inscrito numa esfera.

O quarto livro contém propriedades das curvas, em que se inclui a espiral de Arquimedes e as quadraturas de Hippias. Neste livro também se encontram descritos os métodos de trissecação.

No quinto livro discutem-se os treze sólidos semi-regulares descobertos por Arquimedes. Ele compara as áreas de figuras com perímetro igual e volumes de sólidos com igual superfície, provando que a esfera tem um maior volume que qualquer sólido regular com a mesma área de superfície. Prova também que, dados dois sólidos regulares com igual área de superfície, aquele com maior número de faces tem um maior volume.

Os livros seis e sete são uma referência a livros de outros autores, como por exemplo, Euclides, Teodósio e Eratóstenes. No sexto livro surge também um comentário aos livros de Astronomia da obra *Pequena Astronomia*. Para além da revisão destes textos, Pappus aponta e corrige erros prévios. Ele escreveu depois sobre o *Tesouro da Análise*. É também neste livro que surge o "Problema de Pappus", problema esse que teve grande impacto no desenvolvimento da geometria. Foi discutido, posteriormente, por Descartes e Newton e aquele que é agora conhecido como o Teorema de Guldin, foi provado aqui por Pappus.

Por fim, no oitavo e último livro, Pappus escreveu sobre mecânica (BOYER, 1993).

2.1.2.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO PRESENTES NA OBRA

Ao longo desta obra encontramos algumas proposições que podem ser interpretadas como um problema de optimização. As primeiras surgem no livro V, onde aparecem quatro proposições acerca do nosso tema, as proposições 5, 10, 18 e 57. Seguidamente, no livro V encontramos a proposição 44. E, por fim, no livro VI, a proposição 73.

A proposição 57 do livro V não é um problema de optimização, mas sim um problema de comparação.

Vejamos agora a forma como Pappus as enuncia, bem como a forma como as demonstrou.

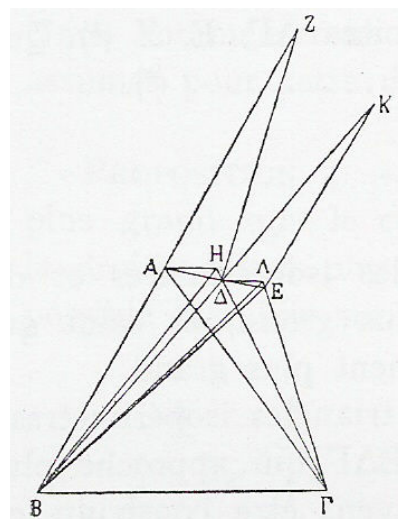
Livro V – Proposição 5

Entre os triângulos isoperimétricos e com a mesma base, o triângulo isósceles é o maior, e o que mais se aproxima do triângulo isósceles é continuamente maior. (Tomo I; pag.247)

Sigamos a demonstração apresentada por Pappus:

Tracemos sobre a base $B\Gamma$, os triângulos isoperimétricos: o triângulo isósceles $AB\Gamma$ e o triângulo $B\Delta\Gamma$ que se aproxima mais do triângulo isósceles do que o triângulo $BE\Gamma$; digo que o triângulo $AB\Gamma$ é maior do que o triângulo $B\Delta\Gamma$ e maior do que o triângulo $BE\Gamma$.

Prolonguemos a recta BA ; coloquemos a recta AZ igual à recta ΓA e transportemos as rectas de junção $Z\Delta$, ΔA . Então, como as rectas $Z\Delta$, $B\Delta$ são maiores do que a recta BZ , elas são também maiores do que as rectas BA , $A\Gamma$ (pois a recta $A\Gamma$ é igual à recta AZ). Mas as rectas BA , $A\Gamma$ são iguais às rectas $B\Delta$, $\Delta\Gamma$. Se cortarmos de um lado e doutro a recta $B\Delta$, a restante recta $Z\Delta$ é maior do que a recta $\Delta\Gamma$. Ora, as duas rectas ZA , $A\Delta$, são respectivamente iguais às duas rectas ΓA , $A\Delta$, e a base $Z\Delta$ é maior do que a base $\Delta\Gamma$; então, o ângulo compreendido entre ZA , $A\Delta$ é maior do que o ângulo compreendido entre ΓA , $A\Delta$; então o ângulo entre ZA , $A\Gamma$ é maior do que o dobro do ângulo



compreendido entre ΔA , $A\Gamma$; assim, o ângulo compreendido entre ZA , $A\Gamma$ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΔA , $A\Gamma$. Mas, ele é o dobro do ângulo compreendido entre AB , $B\Gamma$, isto é, o ângulo compreendido entre $A\Gamma$, ΓB (visto que o triângulo é isósceles); assim o ângulo compreendido entre ΔA , $A\Gamma$ é também maior do que o ângulo compreendido entre ΔA , $A\Gamma$. Tracemos o ângulo compreendido sobre as rectas ΓA , AH igual ao ângulo compreendido entre as rectas $A\Gamma$, ΓB ; segue-se que a recta AH é paralela à recta $B\Gamma$ pois os ângulos alternos são iguais. De seguida, prolonguemos a recta ΓA até ao ponto H , e transportemos as rectas de junção BH , é claro que o triângulo $AB\Gamma$ é maior do que o triângulo $B\Delta\Gamma$, visto que o triângulo $AB\Gamma$ é equivalente ao triângulo $BH\Gamma$.

Mais uma vez, prolonguemos a recta $B\Delta$ até ao ponto K ; coloquemos a recta ΔK igual à recta $\Delta\Gamma$, e transportemos as rectas de junção KE , ΔE . Como as rectas BE , EK são maiores do que a recta BK , o mesmo acontece com as rectas $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, o mesmo acontece com as rectas BE , $E\Gamma$, se cortarmos de ambos os lados da recta BE , a recta restante EK é maior do que a recta $E\Gamma$. Ora, as duas rectas $K\Delta$, ΔE são respectivamente iguais às duas rectas ΓA , ΔE , e a base KE é maior do que a base $E\Gamma$; então, o ângulo compreendido entre as rectas $K\Delta$, ΔE é maior do que o que está compreendido entre as rectas ΓA , ΔE ; assim, o ângulo compreendido entre $K\Delta$, $\Delta\Gamma$ é maior do que o dobro do ângulo compreendido entre ΓA , ΔE . Ora, este mesmo ângulo compreendido entre $K\Delta$, $\Delta\Gamma$ é mais pequeno do que o dobro do ângulo compreendido entre $\Delta\Gamma$, ΓB (pois o ângulo compreendido entre $\Delta\Gamma$, ΓB é maior do que aquele que está compreendido entre ΔB , $B\Gamma$, pois os ângulos compreendidos entre AB , $B\Gamma$ e entre $A\Gamma$, ΓB são iguais); então o ângulo compreendido entre $\Delta\Gamma$, ΓB é maior do que aquele que está entre ΓA , ΔE . Assentemos sobre a recta $\Delta\Gamma$ e sobre o ponto Δ , um ângulo compreendido sobre as rectas ΓA , $\Delta\Lambda$ igual ao ângulo compreendido entre $\Delta\Gamma$, ΓB . ORA, é claro que a recta $\Delta\Lambda$, paralela à recta $B\Gamma$ por causa dos ângulos alternos, situar-se-á entre as rectas ΔE , ΔK ; então, se a recta ΓE se prolongar até à paralela $\Delta\Lambda$ que se intersecta no ponto Λ , e se transportarmos a recta de junção $B\Lambda$, o triângulo $B\Gamma\Lambda$ será equivalente ao triângulo $B\Delta\Gamma$;

Dessa forma o triângulo $AB\Gamma$ é maior do que o triângulo $BE\Gamma$ que é mais pequeno do que o triângulo $B\Delta\Gamma$.

Neste primeiro problema de Geometria Plana o autor pretende otimizar a área de um triângulo dado o seu perímetro e a medida da base. Na demonstração o autor usa um método construtivo, comparando segmentos de recta, ângulos e triângulos.

Livro V – Proposição 10

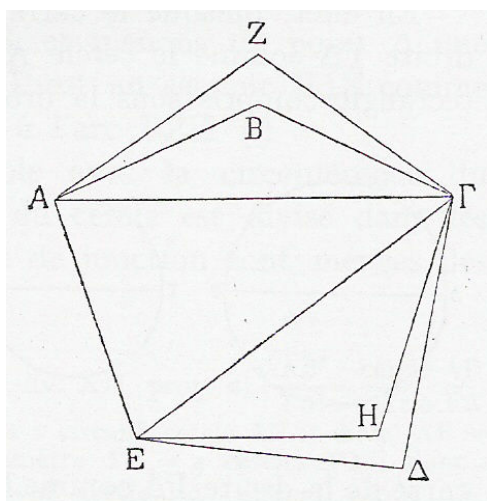
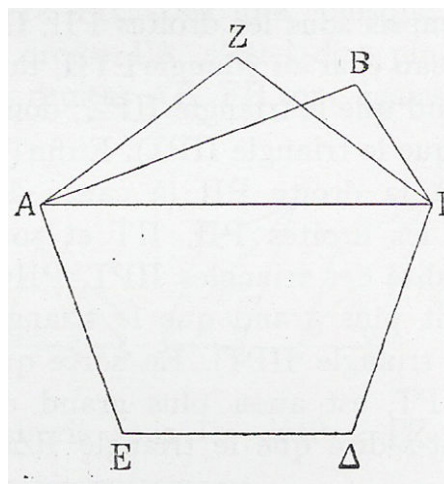
Entre as figuras rectilíneas com o mesmo perímetro e o mesmo número de lados, a maior é a que é equilateral e equiangular⁷. (Tomo I; pag.258)

Analisemos a demonstração apresentada por Pappus:

Seja $AB\Gamma\Delta E$ o maior dos pluriláteros com o mesmo perímetro e o mesmo número de lados; eu digo que ele é equilátero.

Com efeito, suponhamos que não o é; mas que as rectas AB , $B\Gamma$ são, se possível, desiguais, e transportemos a recta de junção $A\Gamma$ de forma a construir o triângulo isósceles $AZ\Gamma$, de forma que as rectas AZ , $Z\Gamma$ sejam iguais à soma das rectas AB , $B\Gamma$. Assim, como demonstramos anteriormente que o triângulo isósceles é o maior dos triângulos isoperimétricos construídos sobre a mesma base, concluímos que o triângulo $AZ\Gamma$ é maior do que o triângulo $AB\Gamma$. Acrescentemos de uma e de outra parte o quadrilátero $A\Gamma\Delta E$; temos uma área $Z\Gamma\Delta EA$ maior do que a área maior $AB\Gamma\Delta E$, com o mesmo perímetro que a outra e tendo o mesmo número de lados; o que é impossível. Em consequência, $AB\Gamma\Delta E$ é equilátero. E fica claro que o plurilátero mais

equilátero
é
continuamente maior.



Digo também que o plurilátero $AB\Gamma\Delta E$ é também equiangular.

Com efeito, suponhamos que não é verdade; mas que o ângulo B é maior do que o ângulo Δ , se possível. Assim, a recta $A\Gamma$ é também maior do que a recta ΓB . Assim, a recta $A\Gamma$ é também maior do que a recta ΓE (pois a soma das rectas AB , $B\Gamma$ é igual à soma das rectas $\Gamma\Delta$, ΔE). Tracemos, sobre as rectas

⁷ Esta proposição está demonstrada no opúsculo de Zénodoro, onde esta constitui a proposição II. Pappus reproduz a demonstração de Zénodoro com a mesma estrutura, mas de uma forma um pouco mais explícita.

desiguais $A\Gamma$, ΓE , os triângulos semelhantes isósceles $AZ\Gamma$, ΓHE , determinemos a soma dos lados AZ , $Z\Gamma$, ΓH , HE igual à soma dos lados AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE , como o demonstramos numa proposição anterior. Em consequência, a soma dos triângulos estabelecidos $AZ\Gamma$, ΓHE será maior do que a dos triângulos primitivos $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ (resultado demonstrado em proposições anteriores). E se acrescentarmos de uma e de outra parte do triângulo $A\Gamma E$, ele apresentar-se-á de igual forma, o que não pode ser; assim o plurilátero $AZ\Gamma HE$ será maior do que o maior plurilátero $AB\Gamma\Delta E$ tendo o mesmo perímetro que ele. Em consequência, o plurilátero $AB\Gamma\Delta E$ é equiangular (Mas é também equilátero); assim entre as figuras rectilíneas isoperimétricas e com o mesmo número de lados, a maior é equilátera e equiangular.

E é evidente que o círculo é a maior das figuras isoperimétricas, pois nós demonstramos que é maior do que uma figura regular, ou seja, equilátera e equiangular.

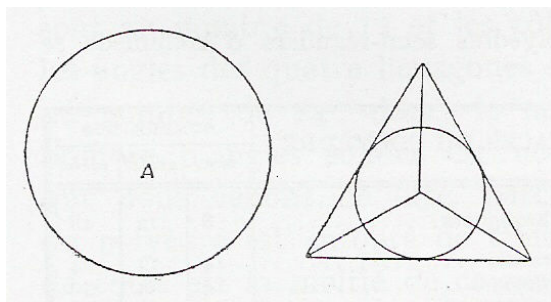
Neste segundo problema, de Geometria Plana, o autor pretende otimizar a área de um polígono dado o seu perímetro. Na demonstração o autor usa o método de redução ao absurdo, trabalhando com a decomposição da figura em triângulos.

Livro V – Proposição 18

Consideremos uma esfera com o seu centro A, e consideremos uma das cinco figuras de que falamos⁸, com a superfície total equivalente à da esfera; eu digo que a esfera é maior. (Tomo I; pag.276)

Vejamos a demonstração apresentada por Pappus:

Com efeito, imaginemos uma esfera inscrita num poliedro de maneira a ficar tangente que a envolvem; verifica-se que a superfície do poliedro é maior do que a superfície da esfera inscrita, pois ele envolve-a. Mas a superfície do poliedro é equivalente à superfície da esfera A; Assim a superfície da esfera A é também maior do que a superfície da esfera inscrita no poliedro, e o raio da esfera A é também maior do que o raio da esfera inscrita. Ora, a superfície da esfera A é equivalente à superfície do poliedro; então, o cone cuja base é o círculo



⁸ Os cinco sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro

equivalente à superfície da esfera A (e com a altura igual ao raio da esfera A) é maior do que a pirâmide cuja base é rectilínea equivalente à superfície do poliedro, e cuja altura é o raio da esfera inscrita no poliedro. Mas este cone é equivalente à esfera A (Este resultado está demonstrado por Arquimedes no livro *De la Sphère et du Cylindre*); enquanto que esta pirâmide é equivalente ao poliedro; consequentemente, a esfera A é maior do que o poliedro proposto.

Verificamos que nesta proposição, de Geometria Espacial, o autor pretende verificar que a esfera é o sólido com maior volume, comparado com os cinco sólidos platónicos com a mesma área. A demonstração é feita por construção, comparando o volume da superfície esférica com o volume do poliedro circunscrito à esfera e utilizando uma segunda esfera com a área do poliedro. Utiliza ainda um cone cuja base é equivalente à superfície da segunda esfera e a altura é o raio da segunda esfera e uma pirâmide cuja base é equivalente à superfície do poliedro e cuja altura é igual ao raio da esfera inscrita no poliedro.

A proposição apresentada a seguir não é sobre optimização, é uma proposição onde se estabelece uma comparação entre o número de bases de cada uma das cinco figuras poliédricas e o respectivo volume. Por esse motivo não apresentamos a respectiva demonstração.

Livro V – Proposição 57

Entre as cinco figuras denominadas poliédricas, a que é mais poliédrica (com as bases mais numerosas) é continuamente maior, e reconheceremos da forma seguinte que dessas cinco figuras, é impossível encontrar outras que estejam compreendidas entre os polígonos equilaterais iguais e semelhantes. (Tomo I; pag.363)

Livro VI – Proposição 44

De um ponto elevado A, tracemos sobre o plano subjacente um segmento AB não perpendicular a esse plano, e tracemos desde o ponto A uma perpendicular a esse plano; que o intersecta no ponto I; tracemos também IB. Eu digo que o ângulo compreendido entre AB e BI é menor do que todos os que são estão compreendidos entre AB e qualquer um dos segmentos que passem em B contidas no plano subadjacente; e o ângulo mais próximo de este ângulo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado,

Examinemos a demonstração apresentada por Pappus:

[illegible]

Eu digo também que o ângulo mais próximo de este ângulo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado.

⁹ Subentende-se: que estão compreendidos sobre AB é qualquer outra recta que passam em B no plano subjacente.

38

entre as rectas BA , $A\Delta$, é maior do que o que está compreendido entre as rectas BA , AE . Consequentemente, o ângulo compreendido entre as rectas AB , $B\Delta$, é mais pequeno do que o ângulo compreendido entre as rectas AB , BE . Demonstraremos em paralelo que o ângulo mais próximo do ângulo entre as rectas AB , $B\Gamma$ é continuamente mais pequeno que o que está mais afastado.

Enfim, eu digo que dois ângulos iguais não se estabelecem de um e de outro lado do ângulo.

Estabeleçamos sobre a recta ΓB , no ponto B , no plano subjacente, um ângulo compreendido sobre as rectas ΓB , BZ igual ao ângulo compreendido entre as rectas ΔB , $B\Gamma$; tracemos a partir do ponto Γ a perpendicular ΓZ sobre a recta BZ , e tracemos a recta de junção AZ . Como o ângulo compreendido entre as rectas ΓB , $B\Delta$ é igual ao que está compreendido entre as rectas ΓB , BZ ; e o ângulo recto compreendido entre as rectas $\Gamma\Delta$, ΔB é igual ao ângulo recto compreendido entre as rectas ΓZ , ZB , e a recta ΓB é o lado comum dos triângulos, conclui-se que a recta $B\Delta$ é igual à recta BZ e a recta $\Gamma\Delta$ é igual à recta ΓZ ; assim, a recta $A\Delta$ é também igual à recta AZ . Então, como a recta ΔB é igual à recta BZ ; e a recta BA é comum e a base ΔA é igual à base AZ , conclui-se que o ângulo compreendido entre as rectas AB , $B\Delta$ é igual ao ângulo compreendido entre as rectas AB , BZ . Demonstraremos em paralelo não estabelece outro ângulo igual ao que está compreendido entre as rectas AB , $B\Delta$.

O ângulo compreendido entre as rectas AB , $B\Gamma$ é então o mais pequeno; o ângulo que está mais próximo é continuamente mais pequeno do que o que está mais afastado, e dois ângulos iguais não se estabelecem de um e do outro lado deste ângulo.

Neste problema, de Geometria Espacial, o autor pretende determinar o ângulo mínimo entre uma recta e um plano. Também esta demonstração é feita por construção, traçando perpendiculares e comparando rectas e ângulos.

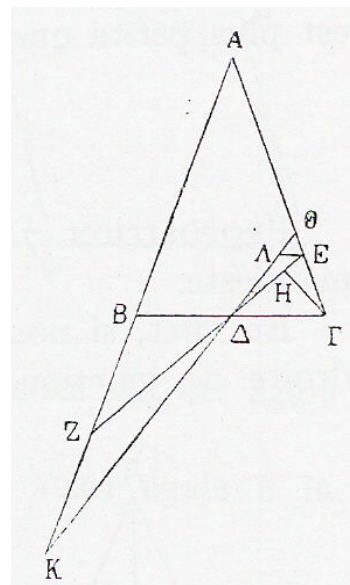
Livro VII – Proposição 73

Consideremos a recta BA igual à recta AT , e cortemos a recta BT , em duas partes iguais no ponto A ; eu digo que a recta BT , é a mais pequena de todas as rectas que passam pelo ponto A . (Tomo II; pag.608)

Vejamos a demonstração apresentada por Pappus:

Com efeito, tracemos uma outra recta EZ , e prolonguemos a recta AB até ao ponto Z ; eu digo que a recta EZ é maior do que a recta ΓB . Como o ângulo

compreendido entre as rectas AB , $B\Gamma$, ou seja, o ângulo Γ , é maior do que o ângulo compreendido entre as rectas BZ , ZE , é possível cortar ao ângulo Γ um ângulo igual ao ângulo compreendido entre as rectas BZ , ZE . Que o ângulo compreendido entre as rectas $\Delta\Gamma$, Γ seja igual a este último ângulo. Assim, a recta $\Gamma\Delta$, está para a recta ΔH como a recta $Z\Delta$ está para a recta ΔB . Ora a recta $Z\Delta$ é maior do que a recta ΔB ; então, a recta $\Gamma\Delta$ é também maior do que a recta ΔH . Consequentemente, como a recta $Z\Delta$ é maior do que a recta ΔB , ou seja, a recta $\Delta\Gamma$, mas a recta $\Delta\Gamma$ é maior do que a recta ΔH , [Deduz-se que a recta $Z\Delta$ é a maior e a recta ΔH é a mais pequena]. Então, como as quatro rectas $Z\Delta$, ΔB , $\Delta\Gamma$, ΔH são em proporção, que a recta



$Z\Delta$ é a maior e a recta ΔH a mais pequena, deduz-se que a recta ZH é maior do que a recta $B\Gamma$; de forma que a recta $B\Gamma$, mais pequena que a recta ZH , é mais pequena do que a recta EZ . Demonstraremos em paralelo que a recta $B\Gamma$ é mais pequena do que todas as rectas que passam pelo ponto Δ . Consequentemente, a recta $B\Gamma$ é a mais pequena de todas as rectas que passam no ponto Δ . Eu digo agora que aquela que está mais próxima é mais pequena do que aquela que está mais afastada.

Com efeito, tracemos transversalmente uma outra recta ΘK , e estabeleçamos o ângulo compreendido entre as rectas ΔE , $E\Lambda$ igual ao ângulo K . Então, a recta $K\Delta$ é de novo, maior do que a recta $Z\Delta$ e a recta $E\Delta$ maior do que a recta $\Delta\Lambda$; deste modo a recta inteira $K\Lambda$ é maior do que a recta EZ . Em consequência, a recta ΘK é, maior do que a recta EZ ; deste modo a recta ZE é mais pequena do que a recta ΘK . Assim, a recta $B\Gamma$, é mais pequena do que todas as rectas que passam por Δ , e aquela que está mais próxima é mais pequena do que aquela que está mais afastada.

Neste problema, de Geometria Plana, pretende-se optimizar a distância entre um ponto e uma recta. A demonstração é feita por construção e, também nesta demonstração, o autor utiliza a comparação de medidas de segmentos de recta e de ângulos para chegar à solução óptima.

2.1.2.5. CONCLUSÃO

Podemos verificar que, tal como Euclides, Pappus não tem enunciados de problemas ou exercícios, mas sim de proposições.

As proposições apresentadas e demonstradas por Pappus são problemas de Geometria Plana e Geometria Espacial, ou seja, são problemas de optimização de áreas, de volumes ou de ângulos.

Pappus não faz a distinção entre rectas, semi-rectas ou segmentos de recta e a todos denomina de rectas.

Verificamos também que, nas demonstrações, não se usa a derivada, uma vez que também, nesta altura, o conceito ainda não tinha surgido. As demonstrações são demonstrações feitas de forma construtiva ou usando a redução ao absurdo. Usa a comparação entre medidas de ângulos, medida de lados e semelhança de triângulos.

Na obra de Pappus encontramos, para além de proposições de optimização, proposições onde se estabelece uma comparação/relação entre figuras geométricas.

2.2. NASCIMENTO: SÉCULO XVI E XVII

Foi no século XVII que, por volta de 1635, começaram a surgir distintos métodos de construção de linhas tangentes a curvas. Posteriormente, no último terço do mesmo século, a combinação entre estes métodos de cálculo de tangentes e problemas sobre áreas produziram o Cálculo como um novo e unificador método de Análise Matemática.

Fermat (1601-1665) foi o autor do método de construção de tangentes a curvas. Assim, este foi o primeiro matemático a resolver problemas de máximos e mínimos, usando tangentes, mas, infelizmente, nunca explicou a base teórica do método com clareza suficiente.

Posteriormente a Fermat, realizaram estudos nesta área, outros distintos matemáticos da época. John Wallis (1616-1703) estendeu a Álgebra numa verdadeira Análise, escreveu em 1665 o livro *Arithmetica Infinitorum*. Christian Huygens (1629-1695) achou os pontos máximos, pontos mínimos e os pontos de inflexão e também conseguiu esboçar correctamente a curva $y^n = kx^n(a-x)^b$. Também Isaac Newton (1642-1727) desenvolveu estudos nesta área, tendo escrito o mais admirado tratado científico de todos os tempos, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Os irmãos Bernoulli, Jacques Bernoulli (1654-1705) Jean Bernoulli (1667-1748) deram também um grande contributo nesta área. O segundo escreveu dois pequenos livros didácticos sobre cálculo diferencial e integral que foram posteriormente publicados. Pierre Varignon (1654-1722) escreveu o livro *Eclaircissement sur L'Analyse des infiniment petits*, 1725, que era um comentário à obra escrita por L'Hôpital. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) publicou em 1684 a primeira exposição sobre Cálculo Diferencial intitulada, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*¹¹, fez uma abordagem geométrica baseada na abordagem cinemática de Newton.

O matemático L'Hôpital (1661-1704) escreveu a obra *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publicada pela primeira vez em Paris, no ano de 1696. Esta foi a obra que seleccionámos para analisar neste período. Sabe-se que L'Hôpital foi aluno de Jean Bernoulli e, por esse motivo, não se sabe ao certo qual o conteúdo da obra que é, de facto, da sua autoria.

¹¹ Novo método para determinar máximos e mínimos, assim como tangentes, método que não entrava as expressões fraccionárias ou irracionais, acompanhado com o cálculo original que se aplica.

2.2.1. ANALYSE DES INFINIMENT PETITS, POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES DE L'HÔPITAL

2.2.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital

Data de nascimento e falecimento do autor: 1661-1704

Título: *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1988; ACL – éditions ; Paris

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1696; Imprimerie Royale; Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 01A75/L'HO.

2.2.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Guillaume-François-Antoine de l'Hôpital (1661-1744) nasceu em Paris, França e era de origem aristocrata. Foi oficial do exército durante a juventude, mas abandonou a carreira militar devido a problemas de visão.

Foi matemático competente e realizou trabalhos na área da Análise Matemática e da Geometria. Pertenceu ao círculo de Malebranche, onde conheceu em 1691 o jovem Johann Bernoulli.

Impressionado com o cálculo de Leibniz e com os conhecimentos que Bernoulli tinha sobre este, contratou-o para seu professor.

No início, as aulas decorriam em forma de conversação, mas l'Hôpital propôs que Bernoulli lhe proporcionasse as aulas por escrito. Essas lições e outras informações, fornecidas pelo seu professor, terão sido a base do livro de l'Hôpital. (Fernández, 2004)

2.2.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra de l'Hôpital está dividida em 10 secções. A primeira é dedicada às regras do cálculo de diferenças. A segunda fala do cálculo de diferenças para calcular tangentes de todo o tipo de linhas curvas. A terceira trata do cálculo de diferenças para

calcular máximos e mínimos. A quarta é dedicada ao cálculo de diferenças para calcular pontos de inflexão e pontos de retrocesso. A quinta trata do cálculo de diferenças para o cálculo de desenvolvimentos. Na sexta e na sétima trata do cálculo de diferenças para calcular causticas por reflexão e por refração. A oitava trata do cálculo de diferenças para calcular pontos de linhas curvas que tocam uma infinidade de linhas dadas de posição, rectas ou curvas. A nona é dedicada à solução dos problemas que dependem dos métodos precedentes. E a décima é dedicada a uma nova forma de utilizar o cálculo de diferenças em curvas geométricas, baseado no método de Descartes e Hudde.

Em cada uma das dez secções podemos encontrar definições, proposições, corolários, problemas, regras, advertências e comentários.

Os gráficos utilizados não se encontram junto do respectivo enunciado, mas sim compiladas ao longo das várias secções.

2.2.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Uma vez que esta obra de L'Hôpital é dedicada ao cálculo de diferenças, a sua estrutura é completamente distinta da estrutura das obras analisadas anteriormente.

Assim, podemos encontrar nesta obra uma secção, a secção III: *Usage du calcul pour trouver les plus grandes et les moindres appliqués, ou se réduisent les questions de maximis & minimis*¹² que é apenas dedicada a máximos e mínimos, onde podemos encontrar alguns problemas de optimização.

Entre os treze exemplos apresentados, nesta secção, por L'Hôpital, existem 7 que são problemas de optimização de uma variável. Analisemos agora cada um desses exemplos.

Exemplo IV

Cortar a linha dada AB num ponto E, de forma que o produto do quadrado de uma das partes AE pela outra EB, seja o maior de todos os outros produtos formados da mesma forma. (pag.44)

¹² Uso do cálculo de diferenças para calcular máximos e mínimos

Resolução:

Denominemos a medida desconhecida AE por x , e a medida dada AB por a ; iremos ter $AE^2 \times EB = axx - x^3$, que deverá ter um máximo.

É porque iremos imaginar uma linha curva MDM , tal que a relação de aplicar $MP(y)$ ao corte $AP(x)$ será exprimido pela equação $y = \frac{axx - x^3}{aa}$ e iremos procurar um

ponto E tal que a aplicação ED seja a maior de todas as semelhantes PM ;

o que dá $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = 0$, de onde se tira $AE(x) = \frac{2}{3}a$.

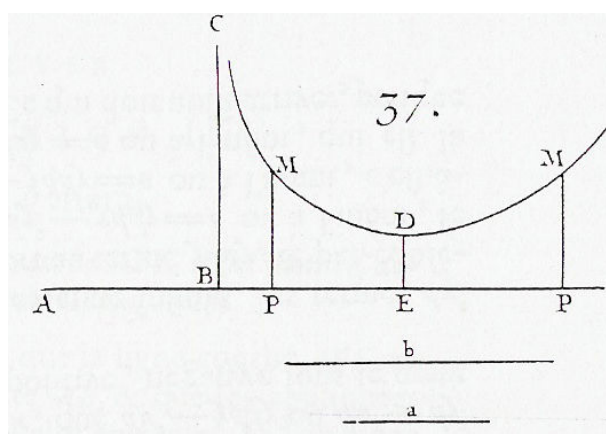
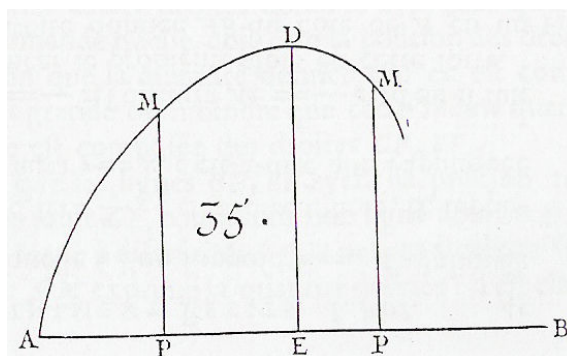
Se virmos que, em geral $x^m \times \overline{a-x}^n$ é o maior (m e n podem ter os valores que queiramos), sai que a diferença deste produto é igual a zero ou ao infinito, o que dá $mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^m = 0$, que dividido por $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}dx$, dá $am - mx - xn = 0$ e $AE(x) = \frac{m}{m+n}a$.

Se $m=2$ e $n=-1$, tem-se $AE(x) = 2a$, e o problema será enunciado assim.

Prolongar a linha dada AB do lado de B até a um ponto E , de forma que a quantidade $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ seja um mínimo, e não um máximo, porque a equação da curva MDM

irá ser $\frac{xx}{x-a} = y$ na qual se supusermos $x = a$ a aplicação PM que divide BC irá ser $\frac{aa}{0}$, ou seja infinito, e suponhamos x infinito, tem-se $y = x$, ou seja a aplicação será também infinita.

Se $m=1$ e $n=-2$, tem-se $AE = -a$, donde tiramos que o problema deverá ser enunciado desta forma.



Prolongar a recta dada AB do lado de A até ao ponto E , como a quantidade $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ é a maior de todas as outras quantidades semelhantes $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$.

Neste problema, de Geometria Plana/Aritmética, o autor pretende otimizar um produto da medida de duas partes de um segmento. Para a resolução deste problema o autor começa por equacionar o problema, utilizando a noção de distância e calcula, de seguida, os zeros do diferencial apresentando depois o resultado.

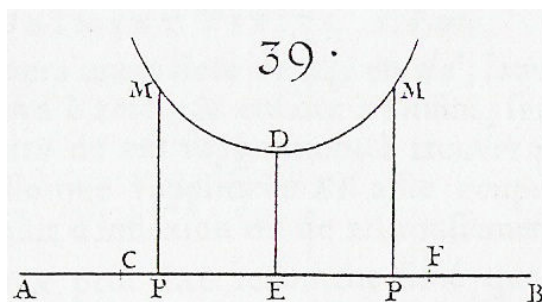
Exemplo V

A linha recta AB é dividida em três partes AC , CF , FB , corte-se a parte do meio CF no ponto E , de forma que a razão do rectângulo $AE \times EB$ pelo rectângulo $CE \times EF$ seja a mais pequena do que todas as outras razões formadas da mesma forma. (pag.45)

Resolução:

Sejam, AC , a ; CF , b ; CB , c ; e o desconhecido CE , x . Tem-se $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, e o que parte a razão de $AE \times EB$ ora será que $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$

deverá ser um mínimo. Isto é porque se imaginarmos uma linha curva MDM , tal que



a relação da aplicação PM (y) com a cortada CP (x) é expressa pela equação

$y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$, a questão reduz-se a descobrir para x um valor CE tal que a

aplicação ED seja a mínima de todas as semelhantes PM . Iremos formar (calculamos as diferenças, e dividimos por dx) a igualdade $cxs - axx - bxx + 2acx - abc = 0$, a cujo

calculado de raízes se reduz a questão. Se $c = a + b$, tem-se $x = \frac{1}{2}b$.

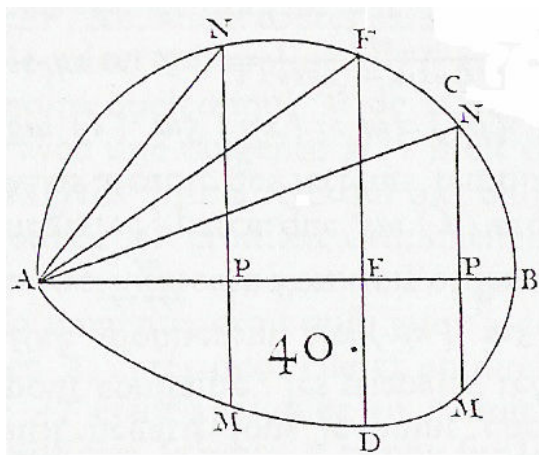
Verificamos que neste problema, semelhante ao anterior, o autor pretende otimizar uma razão em vez de um produto. A resolução é feita de modo idêntico à do problema anterior.

Exemplo VI

Entre todos os cones que podem ser inseridos numa esfera, determinar o que tem a maior superfície convexa. (pag.45)

Resolução:

A questão reduz-se a determinar sobre o diâmetro AB do semicírculo AFB o ponto E, de forma que traçando a perpendicular EF e ligando AF, o rectângulo $AF \times FE$ seja o maior de todos os semelhantes $NA \times NP$. Se considerarmos que o semicírculo AFB faz uma revolução inteira em torno do diâmetro AB, fica claro que ele vai descrever uma esfera, e que os triângulos rectângulos AEF, APN irão descrever os cones inscritos nesta esfera, assim, as superfícies convexas descritas pelas cordas AE, NA, são entre elas como os rectângulos $AF \times FE, NA \times NP$.



Seja portanto a incógnita $AE = x$, a conhecida $AB = a$, tem-se, pela propriedade do círculo, $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$; e portanto, $AF \times FE = \sqrt{aaxx - ax^3}$ que deverá ser um máximo. É porque nós imaginamos uma linha curva MDM tal que a relação da aplicação MP (y) com a cortada AP(x) é exprimida pela equação $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; e tomamos o ponto E, porque a aplicação ED é maior do que todas as semelhantes PM. Temos a diferença $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0$, de onde se tira $AE(x) = \frac{2}{3}a$.

Neste problema, de Geometria Espacial, o autor pretende otimizar a área de um cone inscrito numa esfera. Para resolver este problema o autor começa por observar que a determinação da área máxima do cone se reduz à determinação da área máxima do triângulo formado pelo raio, altura e geratriz do cone. Aplica depois o Teorema de Pitágoras para relacionar os lados deste triângulo com base no diâmetro da esfera. Por fim chega à função que lhe permite otimizar a área do triângulo, função irracional, calculando de seguida o diferencial e os zeros do diferencial.

Exemplo VII

Procuramos entre todos os paralelepípedos iguais a um cubo dado a^3 , e que um dos seus lados é a recta dada b , aquele que tem a menor superfície. (pag.46)

Resolução:

Seja x um dos dois lados que procuramos, o outro será $\frac{a^3}{bx}$; e tomemos os planos alternativos de três lados b , x , $\frac{a^3}{bx}$ do paralelepípedo, a sua soma será $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ metade da sua superfície que deve ser um mínimo. É porque gera como de costume uma linha curva que tem como equação $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$ tomaremos a diferença $\frac{bdx}{a} + \frac{aadx}{xx} = 0$ de onde tiramos $xx = \frac{a^3}{b}$ e $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; como os três lados do paralelepípedo que satisfazem a questão, iram ser, o primeiro b , o segundo $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, e o terceiro $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. De onde verificamos que os dois lados que procuramos são iguais entre eles.

Exemplo VIII

Procuramos entre todos os paralelepípedos que são iguais a um cubo dado a^3 , aquele que tem a menor superfície. (pag.47)

Resolução:

Seja x um dos lados desconhecidos, é claro pelo exemplo precedente, que os outros dois lados são, cada um deles $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$; e partamos a soma dos planos alternativos que é a metade da superfície, irá ser $\frac{a^3}{x} - 2\sqrt{a^3x}$ que deverá ser um mínimo. É porque a diferença $-\frac{a^3dx}{xx} + \frac{a^3dx}{\sqrt{a^3x}} = 0$, de onde tiramos $x = a$; e por consequência os outros dois lados serão também cada um iguais a a ; assim o cubo satisfaz a questão.

Nestes dois problemas o autor pretende determinar, entre os paralelepípedos com o mesmo volume o que tem menor área. No primeiro caso é dada a medida de um dos lados do paralelepípedo concluindo-se depois que os outros lados terão de ser iguais. No segundo problema não é dada a medida de nenhum dos lados mas utiliza-se o facto de, pela alínea anterior, dois dos lados terem a mesma medida. Na sua demonstração o autor começa por determinar a função que nos dá metade da área total somando a área de cada uma das três faces distintas, de seguida determina o diferencial e os seus zeros concluindo depois o pretendido.

Exemplo XI

Um viajante parte de um lugar C para ir para o lugar F, deve atravessar dois campos separados por uma linha recta AEB. Suponhamos que ele percorre dentro do campo do lado de C o espaço a no tempo c, e no outro lado de F o espaço b no mesmo tempo c; procuramos por que ponto E na recta AEB ele deve passar, a fim de empregar o menor tempo possível para chegar de C a F. (pag.49)

Resolução:

Se fizermos $a.CE(u) :: c. \frac{CU}{a}$ e $b.EF(z) :: c. \frac{CZ}{b}$

fica claro que $\frac{CU}{a}$ exprime os tempos que o

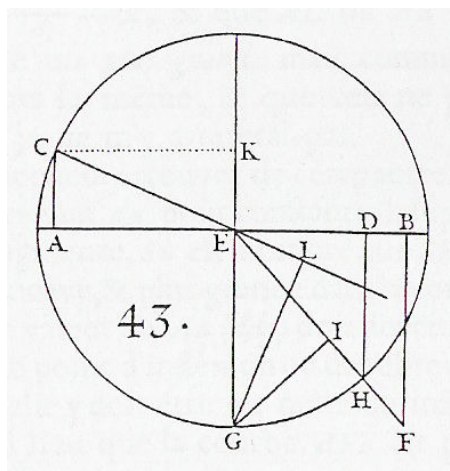
viajante emprega a percorrer a recta CE, e $\frac{CZ}{b}$

exprime o que emprega a percorrer EF; assim

$\frac{CU}{a} + \frac{CZ}{b}$ deve ser um mínimo. De onde se segue¹³

que colocando EG perpendicular sobre a linha AB; o seno do ângulo GEC deve estar para o seno do ângulo GEF, como a está para b.

Posto isto, se descrevermos do ponto E com centro no intervalo EC o círculo CGH, e tracemos sobre a recta AEB as perpendiculares CA, HD, FB e sobre CE, EF as perpendiculares GL, GI; tem-se $a.b :: GL.GI$. Ora $GL = AE$ e $GI = ED$ porque os triângulos rectângulos GEL e ECA, GEI e EHD são iguais e semelhantes entre eles, como é fácil de verificar. É porque se designarmos o desconhecido AE, x; tem-se $ED = \frac{bx}{a}$ e designando os



¹³ Exemplo IX

conhecidos $AB, f; AC, g; BF, h$; os triângulos semelhantes EBF, EDH irão dar $EB(f-x).BF(h) :: ED\left(\frac{bx}{a}\right).DH = \frac{bhx}{af-ax}$. Mas porque os triângulos rectângulos EDH, EAC , que

tem as hipotenusas EH, EC iguais, tem-se $\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2$, ou seja, em termos analíticos $\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - aafx + aaxx} = xx + gg$. De forma que subtraindo as fracções e

ordenando a igualdade, vem

$$\begin{aligned} aax^4 - 2aafx^3 + aaffxx - 2aafggx + aaffgg &= 0 \\ -bb + 2bbf + aagg \\ &-bbff \\ &-bbhh \end{aligned}$$

Podemos também determinar esta equação da maneira que segue, sem recorrer ao exemplo IX.

Denominemos os conhecidos $AB, f; AC, g; BF, h$; e o desconhecido AE, x ; tem-se $a.CE(\sqrt{gg+xx}) :: c.\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} = au$ tempo que o viajante emprega a percorrer a recta CE .

E da mesma forma $b.EF(\sqrt{ff-2fx+xx+hh}) :: c.\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b} = au$ tempo que o viajante

emprega a percorrer a recta EF . O que faz $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b} = a$ um mínimo;

e portanto a sua diferença $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cxdx - cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}} = 0$, de onde se tira, dividindo

por cdx e subtraindo os incomensuráveis, a mesma igualdade que acima, então uma das raízes fornecerá a AE o valor que procuramos.

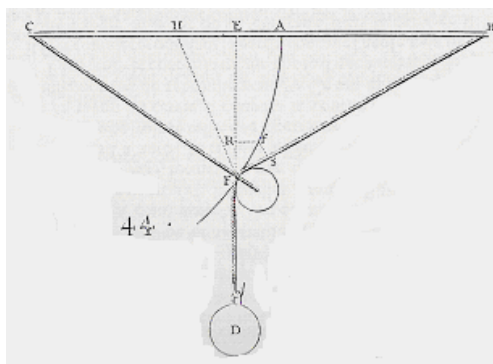
Este é um problema da vida real ligado à Física em que se pretende determinar o tempo mínimo para percorrer um percurso de duas partes que se percorrem a velocidades distintas. A demonstração é feita utilizando a relação entre ângulos e lados de triângulos rectângulos, a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras para determinar a função a optimizar. Determinando por fim o diferencial e os respectivos zeros.

Exemplo XII

Seja uma roldana F que pende livremente no extremo de uma corda CF fixa em C , com um peso D suspenso da corda DFB que passa por cima da roldana F , e que está fixa em B , de forma que os pontos C, B situados na mesma linha horizontal CB . Suponhamos que a roldana e as cordas não sofrem nenhuma gravidade, perguntamos em que ponto o peso D ou a roldana F deve parar. (pag.51)

Resolução:

É claro, pelos princípios da Mecânica que o peso D irá descer o mais baixo que lhe for possível, em baixo da horizontal CB ; donde se deduz que a linha que tem o peso DFE tem um máximo. É porque denominando os dados CF , a ; DFB , b ; CB , c ; e o desconhecido CE , x ; tem-se $EF = \sqrt{aa - xx}$, $FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$ e $DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}$ que deve ter



um máximo; e partindo a sua diferença $\frac{cdx}{\sqrt{aa + cc - 2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa - xx}} = 0$ de onde se tira

$2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = 0$, e dividindo por $x - c$, vem $2cxx - aax - aac = 0$, então uma das raízes fornece a CE um valor tal que a perpendicular ED passa pela roldana F e o peso D que estão em repouso¹⁴.

Neste problema Físico o autor pretende otimizar uma distância. Nesta resolução o autor aplica conhecimentos da Mecânica e o Teorema de Pitágoras para otimizar o segmento DFE . Por fim o autor determina o diferencial da função e os respectivos zeros.

Exemplo XIII

Dada a elevação do pólo, achar o dia com o menor crepúsculo. (pag.52)

Resolução:

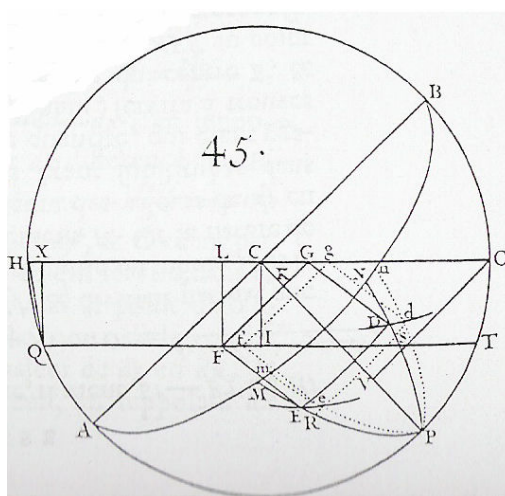
Seja C o centro da esfera; $APTOBHQ$ o meridiano; HD do o horizonte; QE e T o círculo corpúscular paralelo ao horizonte; $AMNB$ o equador; $FEDG$ a porção da paralela ao

¹⁴ Não apresentamos a outra parte da demonstração uma vez que envolve equações com mais do que uma variável, tema que não faz parte do nosso trabalho de investigação.

equador, que descreve o Sol no dia do mínimo crepúsculo, contido entre os planos do horizonte e o círculo crepuscular; P o pólo astral;

PEM , PDN os quartos dos círculos de declinação. O arco HQ onde OT a partir do meridiano compreendido entre o horizonte e o círculo crepuscular, e o arco OP de elevação do pólo são dados; e consequentemente os seus senos rectos CI ou FL ou QX , e OV .

Procuramos os senos CK do arco EM ou DN da declinação do Sol no momento em que descreve a paralela ED .



Se imaginarmos uma outra porção $fedg$ duma paralela ao equador, infinitamente próxima de $FEDG$, com os quartos de círculo Pem , Pdn , é claro que o tempo que o Sol emprega a percorrer o arco ED , deve ser um mínimo, a diferença do arco MN que é a medida, e que desvia mn no momento em que ED desvia ed , deve ser nulo; de onde se verifica que os arcos pequenos Mm e Nn , e por consequência os arcos pequenos Re , Sd serão iguais entre eles. Ora os arcos RE , SD estão compreendidos entre as mesmas paralelas ED , ed , são também iguais, e os ângulos em S e em R são rectos. Assim os pequenos triângulos rectângulos ERe , Dsd (que consideramos como rectilíneos¹⁵ porque os seus lados são infinitamente pequenos, serão iguais e semelhantes; e por consequência as hipotenusas Ee , Dd irão ser também iguais entre elas.

Posto isto, as rectas DG , EF , dg , ef secções comuns dos planos $FEDG$, $fedg$ paralelos ao equador com o horizonte e o círculo crepuscular, serão perpendiculares sobre os diâmetros HO , QT , pois os planos de todos estes círculos são perpendiculares cada um sobre o plano do meridiano, e as pequenas rectas FG , fg são paralelas. Assim $\sqrt{Dd^2 - Gg^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{Ee^2 - Ff^2}$ ou $fe - FE$. Ora é claro pelo que ficou demonstrado

¹⁵ Secção I, Art. 3: On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité des lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce que est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de cotés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils sont entr'eux, la courbe de la ligne. On demande par exemple que la proportion de courbe Mm e l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

no artigo 50¹⁶ que se metermos à descrição dentro de um semi-círculo duas aplicações infinitamente próximas, o pequeno arco que elas formam, será à sua diferença, como o raio está para o corte depois do centro; o que dá aqui (por causa dos círculos *HDO*, *QET*) $CO.CG :: Dd$ ou $Ee.DG - dg$ ou $fe - FE :: IQ.IF :: CO + IQ$ ou $OX.CG + IF$ ou GL . Mas por causas dos triângulos rectângulos semelhantes *CVO*, *CKG*, *FLG*, tem-se $CO.CG :: OV.GK$. E $GK.GL :: CK.FL$ ou QX . Então $OV.CK :: OX.XQ :: XQ.XH$ pela propriedade do círculo: ou seja se tomarmos *QX* pelo raio ou seno total no triângulo rectângulo *QXH*, então o ângulo *HQX* é de 9 graus porque os Astrónomos fazem o arco *HQ* de 18 graus, teremos como o seno total está para a tangente de 9 graus, da mesma forma o seno da elevação do pólo está para o seno de inclinação astral do Sol no tempo de mais pequeno crepúsculo. Donde se conclui que se subtrairmos 0,8002875 do logaritmo do seno de elevação do pólo, o resto será o logaritmo do seno procurado.

Este é um problema muito diferente dos anteriores. É um problema de Astronomia com uma demonstração feita por construção. Na demonstração o autor utiliza noções de Astronomia, relações entre ângulos e lados de triângulos e a semelhança de triângulos.

2.2.1.5. CONCLUSÃO

Esta é a primeira obra que analisamos em que se usa o Cálculo Diferencial para calcular o máximo ou o mínimo de uma qualquer função.

Nela enuncia os problemas de optimização como exemplos, apresentando de seguida a respectiva resolução. As ilustrações estão compiladas em páginas posteriores e não apresentadas ao longo de texto.

Para fazer a sua resolução o autor começa por equacionar a situação posta. Depois calcula a derivada da função e os zeros da derivada. Por fim conclui, que nesse ponto, a função tem um máximo ou um mínimo e apresenta a resposta ao problema posto.

Verificamos ainda que, na referida obra, são abordados os problemas de Geometria Plana, problemas de Geometria Espacial, problemas Aritméticos e também

¹⁶ Exemple III.: Soit une demi roulette AMF, dont la base BF est moindre que la demi circonférence ANB du cercle générateur que a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E sur le diamètre AB, en sorte que l'appliquée ED soit la plus grande qu'il est possible.

problemas da área da Física e da Astronomia. Pretende-se optimizar distâncias, áreas, produtos ou tempo.

Concluimos, assim, que alguns dos exemplos são problemas da vida real.

2.3. CONSOLIDAÇÃO: SÉCULO XVIII

No século XVIII deu-se a consolidação do Cálculo Diferencial e surgiram também alguns matemáticos relacionados com o nosso tema.

Leonhard Euler (1707-1783) já utilizava as notações que se usam actualmente. Escreveu a obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748) que foi um dos livros didácticos mais conhecidos. Publicou ainda a obra *Mechanica* (1736), *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-70).

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) também escreveu algumas obras nesta área. Publicou a obra *Lectures on Elementary Mathematics* e a obra *Théorie des fonctions analytiques*. Também as obras de Lagrange foram editadas noutras línguas, entre elas a Língua Portuguesa.

Etienne Bézout (1730-1783) escreveu a obra *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine* (1764). Esta é composta de seis volumes dedicando-se cada um deles a temas distintos da Matemática. Em 1770-72 teve várias edições, sendo traduzida para outras línguas. É esta que vamos analisar neste período.

2.3.1. COURS DE MATHÉMATIQUE DE BÉZOUT

2.3.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Etienne Bézout

Data de nascimento e falecimento do autor: 1730 – 1783

Título: *Cours de mathématiques, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1764, Imp. H. Offray: Avignon

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1775

Localização da obra consultada: Biblioteca Joanina da Universidade de Coimbra.

Cota: 4-2-7-27

2.3.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Etienne Bézout foi um Matemático francês, que nasceu em Nemours, em 1730 e faleceu em Paris em 1783. Ingressou na Academia das Ciências aos vinte e oito anos, distinguindo-se sempre pelo seu talento privilegiado e vasta cultura.

Foi autor de uma importante obra, parte da qual vamos analisar: *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, avec un traité de navigation* (1764-69), e *Cours de mathématiques à l'usage du corps royal de l'artillerie*. (1770-72). Os livros de Bézout foram durante muito tempo adoptados nas escolas portuguesas, e em Coimbra foram publicadas traduções de algumas das suas obras, feitas por Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá: *Elementos de Geometria*, *Elementos de Trigonometria Plana*, *Elementos de Análise* e *Elementos de Aritmética*.

2.3.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra *Cours de mathématiques* (, a l'usage des gardes du pavillon et de la marine) é composta por 6 volumes, abarcando cada um, temas distintos na área da Matemática. O primeiro volume, *Eléments d'Arithmétique*, trata de Aritmética, o segundo, *Contenant les Eléments de Géométrie, la Trigonométrie Rectiligne & la Trigonométrie Sphérique*, é dedicado à Geometria e à Trigonometria, o terceiro, *Contenant l'Algèbre & L'application de cette Science à l'Arithmétique & à la Géométrie*, contempla o cálculo de quantidades algébricas e a aplicação da Álgebra à Aritmética e à Geometria, o quarto, *Contenant les Principes Generaux de la Mechanique, precedes des Principes de Calcul que servent d'introductions aux Sciences Physico-Mathematiques*, é dedicado, na primeira parte, ao cálculo diferencial e integral e, na segunda, aos princípios gerais da Mecânica, o quinto, *Suite de la quatrieme partie, contenant l'application de la Mechanique, à differents cas de mouvement & d'Equilibre*, é uma continuação do quarto volume e contém as aplicações da Mecânica a diferentes tipos de movimento e ao equilíbrio, por fim, o sexto desenvolve o tratado de navegação.

É no quarto volume, dedicado ao Cálculo Diferencial e Integral e aos Princípios Gerais da Mecânica, que encontramos, na secção dedicada ao Cálculo Diferencial, os problemas de Máximos e Mínimos. Vejamos então, como está estruturada esta secção:

Calculo Diferencial

Das diferenciais segundas e terceiras

Das diferenciais das diferentes quantidades afectas de senos, cossenos

Das diferenciais logarítmicas

Das diferenciais de quantidades exponenciais

Aplicações das regras precedentes

Às subtangentes, Tangentes, Normais das curvas

Aos limites das linhas curvas, e em geral aos limites das quantidades e aos

problemas de máximos e mínimos

Dos pontos múltiplos

Dos pontos de inflexão

Reflexão sobre Máximos e Mínimos

Dos pontos de reversão, e das diferentes espécies de contacto dos ramos de uma curva

Dos raios da curvatura ou da Evoluta

Outras aplicações do Cálculo Diferencial.

Todas as imagens que são referidas ao longo do volume encontram-se compiladas no final do livro. Estas estão distribuídas por várias páginas maiores do que as páginas com o texto e dobradas.

2.3.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

É na parte do capítulo sobre Cálculo Diferencial, dedicada às aplicações das regras precedentes, que encontramos os problemas de Máximos e Mínimos.

Esta parte começa por falar dos limites das linhas curvas e das quantidades. Segue-se a explicação do método para calcular máximos e mínimos de uma função ao qual dá o nome de *Maximis & Minimis*. Depois, apresenta cinco problemas de optimização e a respectiva resolução.

Analisemos agora cada um desses problemas, bem como a resolução apresentada.

Problema I

Dividir um número dado em duas partes tais, que o seu produto seja um máximo.

Resolução:

Representando uma dessas partes por x , a outra será $a - x$, e o produto de ambas será $ax - xx$; expressão que é susceptível de maximum, como veremos se substituirmos sucessivamente o e e a em lugar de x . Supondo pois $y = ax - xx$, teremos $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$. Se igualarmos o numerador a nada, virá $1 = 0$, que é absurdo; logo não podemos achar o maximum, senão igualando o denominador a nada. Fazendo isso, vem $a - 2x = 0$, e consequentemente $x = \frac{1}{2}a$ que reduz o produto a $\frac{1}{4}a^2$. Logo de qualquer modo que se divida um número em duas partes, o produto delas será o maior possível, quando cada uma for metade do mesmo número; e consequentemente o rectângulo formado pelas partes de uma linha a será o maior possível, quando cada uma delas for $\frac{1}{2}a$.

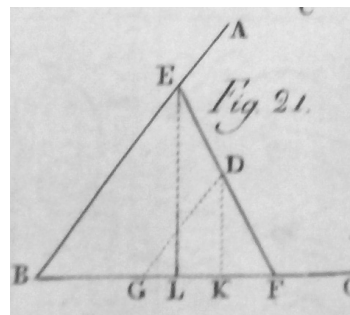
De seguida o autor apresenta o caso geral:

Dividir um número dado a em duas partes tais, que o produto de uma potência determinada de uma delas pela mesma ou outra potência de outra parte seja a maior possível.

Este é um problema Aritmético em que se pretende optimizar o produto das duas partes de um número. Na sua resolução o autor utiliza a noção de distância, para indicar um dos números em função do outro, para depois equacionar o problema em ordem a uma das variáveis. De seguida calcula o diferencial e conclui que o zero é então o máximo. Refere ainda que o produto das duas partes de um número é máximo quando cada uma das partes for metade do número. O autor deduz ainda que um rectângulo terá área máxima, dada a soma das duas medidas, quando estas forem iguais.

Problema II

Achar entre todas as linhas que se podem tirar por um mesmo ponto D , dentro do ângulo conhecido ABC (fig. 21), qual é a que forma com os lados deste ângulo o menor triângulo possível.



Resolução:

Havendo pelo ponto D conduzido DG paralela a AB, DK perpendicular sobre BC, uma recta qualquer EF, tire-se pelo ponto de encontro E de EF com AB a linha EL paralela a DK. Seja $EG = a$, $DK = b$, e a base BF do triângulo BEF = x . Bem se vê que passado um certo termo, quanto mais crescer BF, tanto mais crescerá o triângulo, e que pelo contrário se BF diminuir, também o triângulo diminui, mas só até certo limite; porque se BF viesse a ser quase igual a BG, a recta EDF seria quase paralela a AB, isto é, estaria próxima a confundir-se com GD, e então o triângulo seria extremamente grande: há pois um valor de BF entre $x = a$ e $x = \infty$, que dá o menor triângulo possível. Para o achar, busque-se a expressão geral do triângulo BEF.

Os triângulos semelhantes BEF, GDF dão $GF : BF :: DF : EF$, e os dois DKF, ELF dão $DF : EF :: DK : EL$; logo $GF(x - a) : BF(x) :: DK(b) : EL = \frac{bx}{x - a}$; será pois a superfície do triângulo BEF ou $\frac{EL \cdot BF}{2} = \frac{4bx^2}{(x - a)}$. Assim diferenciando $\frac{x^2}{x - a}$, acharemos $x = 2a$ por um cálculo já feito anteriormente. Logo se tomarmos $BF = 2BG$, a linha FDE que se tirar por D, dará o menor triângulo procurado $EBF = 2ab$.

Este é um problema de Geometria Plana onde se pretende optimizar a área de um triângulo. Aplica-se a semelhança de triângulos para escrever a equação em ordem a uma só variável e depois determina-se o diferencial e os respectivos zeros.

Problema III

Achar o maior paralelepípedo de todos os que têm a mesma superfície e a mesma altura.

Resolução:

Seja h a altura do paralelepípedo, ce a sua superfície, x e y os dois lados do rectângulo que lhe serve de base. A superfície total compõe-se de seis rectângulos, dos quais dois tem cada um a altura h e a base x , dois tem a altura h e a base y , e os dois últimos tem a base x e a altura y ; assim a superfície total $ce = 2hx + 2hy + 2xy$ que é constante. Como a solidez hxy deve ser maior do que todas as da mesma superfície,

teremos $xdy + ydx = 0$. Tirando desta equação o valor dx , e substituindo-o na expressão diferencial da superfície $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$, acharemos $y = x$; logo a base deve ser um quadrado. Para ter o lado deste quadrado, poremos em lugar de y o seu valor x na equação $2hx + 2hy + 2xy = ce$, e teremos $4hx + 2x^2 = ce$, que dá $x = -h \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}ce}$; excluindo pois a raiz negativa, que é inútil no caso presente, será $-x \pm \sqrt{hh + \frac{1}{2}ce}$ o valor conveniente de x .

Neste problema de Geometria Espacial pretende-se otimizar o volume de um paralelepípedo dada a sua área e a sua altura. Utiliza a fórmula da área do paralelepípedo para determinar uma das medidas da base em função da outra medida. Para a sua resolução o autor determina os diferenciais e os zeros do diferencial. Como obteve dois zeros para o diferencial, exclui o negativo concluindo que o outro zero é o valor pretendido.

Querendo agora saber *qual deve ser a altura h , para que o paralelepípedo tenha maior solidez entre todos os da mesma superfície*, advertiremos, que como a base deve ser um quadrado xx , a solidez irá exprimir-se por hxx . Diferenciando pois esta expressão na hipótese de h e x serem variáveis, e igualando o diferencial a nada, teremos $dh = -\frac{2hdx}{x}$. Substituindo este valor em $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$, que exprime então a outra condição de ser constante a superfície, acharemos $h = x$; logo o paralelepípedo procurado deve ser um cubo, porque a altura h deve ser igual ao lado do quadrado, que serve de base. Para achar agora o lado desse cubo, substitua-se x em lugar de h na equação $4hx + 2x^2 = ce$ e virá $6x^2 = ce$, que dá $x = \sqrt{\frac{ce}{6}}$. Logo entre todos os paralelepípedos de superfície constante, o que tem maior capacidade é o cubo, cujo lado é a raiz quadrada da sexta parte da mesma superfície.

Nesta parte o autor prova que o paralelepípedo com maior volume, dada a sua área, é o cubo.

De seguida o autor apresenta a seguinte nota:

Procedemos do mesmo modo para achar o cilindro recto de maior capacidade entre todos os da mesma superfície.

Problema IV

Achar entre todos os triângulos do mesmo perímetro e base, qual é o que tem maior superfície.

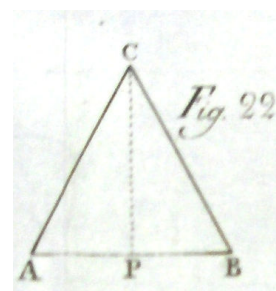
Resolução:

Tire-se a perpendicular CP (Fig. 22), e seja a base $AB = a$, o perímetro do triângulo $ABC = c$, $AP = x$, $CP = y$; será $PB = a - x$,

$AC = \sqrt{xx + yy}$, e $CB = \sqrt{yy + (a - x)^2}$. Logo teremos o perímetro ou

$c = a + \sqrt{xx + yy} + \sqrt{yy + (a - x)^2}$, e a superfície $= \frac{ay}{2} = \text{Max}$. Esta

última condição dá $\frac{ady}{2} = 0$, logo $dy = 0$; e substituindo este



valor na primeira equação depois de diferenciada, a saber $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ydy - (a - x)dx}{\sqrt{yy + (a - x)^2}} = 0$,

virá $x\sqrt{yy + (a - x)^2} = (a - x)\sqrt{xx + yy}$, isto é $xx = (a - x)^2$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, por onde se mostra,

que o triângulo deve ser isósceles. Levantemos pois uma perpendicular no meio de AB, e havendo descrito do ponto B com o raio igual à metade da diferença entre o perímetro c e a base a um arco, que corte a perpendicular em C, se tirarmos CB e CA, teremos o triângulo de maior superfície entre todos os isoperimétricos, construídos sobre a mesma base.

Neste problema o autor prova que o triângulo de maior área, dado o seu perímetro e a medida da base é o triângulo isósceles. Na sua resolução o autor aplica a noção de distância e o Teorema de Pitágoras para escrever a função a otimizar em ordem a uma só variável. Também esta resolução é feita usando diferenciais e calculando os respectivos zeros e a função que se obtém é uma função irracional.

De seguida, o autor apresenta a forma como resolver o seguinte problema:

Saber em geral, qual é o triângulo de maior superfície entre todos os isoperimétricos.

O autor apresenta ainda algumas notas/observações acerca da Resolução, bem como outras formas de demonstrar.

Explica ainda a forma de resolver do seguinte problema:

Dividir uma quantidade a em três partes x , y , $a - x - y$, tais que o produto de todas seja o maior possível.

Resolução:

Teremos $d[xy(a - x - y)] = 0$. Porém em lugar de diferenciar de uma vez em ordem às duas variáveis x , y , diferenciamos somente em ordem a x , e virá $a - 2x - y = 0$, donde se conclui $x = \frac{1}{2}(a - y)$; valor que muda o produto em $\frac{1}{4}y(a - y)^2$. Diferenciando agora relativamente a y , acharemos $(a - y)^2 = 2y(a - y)$, que dá $y = \frac{1}{3}a$; logo as partes devem ser iguais, cada uma, a um terço da quantidade proposta.

É ainda apresentada uma outra forma de demonstrar este mesmo resultado.

Problema V

Achar entre todos os quadriláteros isoperimétricos, qual é o que tem maior superfície.

Resolução:

Abaixem-se dos ângulos C e D sobre o lado AB as perpendiculares DE , CF , e conduza-se por D a recta DK paralela a AB . Seja $AE = s$, $DE = t$, $AF = u$, $CF = x$, $BF = y$, o perímetro do quadrilátero igual a a ; e os triângulos rectângulos darão $DA = \sqrt{ss + tt}$, $DC = \sqrt{(s + u)^2 + (x - t)^2}$, $CB = \sqrt{xx + yy}$; logo será $a = u + y + \sqrt{ss + tt} + \sqrt{(s + u)^2 + (x - t)^2} + \sqrt{xx + yy}$. Por outra parte $ABCD = DEFC + CFB - DAE = (t + x)\frac{s + u}{2} + \frac{xy}{2} - \frac{st}{2}$; logo devemos diferenciar esta quantidade, e a equação precedente. Porém como os radicais fariam o calculo subsequente muito complicado, suponhamos todos três constantes, o que dará ... $d\sqrt{ss + tt} = 0$ ou $sds + tdt = 0$... $(s + u)(ds + du) + (x - t)(dx - dt) = 0$... $xdx + ydy = 0$. A equação do perímetro sendo diferenciada nesta suposição dá $du + dy = 0$, e a condição

do máximo dá $udt + sdx + udx + tdu + xds + xdu + xdy + ydx = 0$. Destas cinco equações diferenciais a primeira dá $ds = -\frac{tdt}{s}$, a terceira dá $dx = -\frac{ydy}{x}$ e a quarta dá $dx = -dy$. Substituindo estes valores na segunda e na quinta, teremos as equações ... $-(tdt + sdy)(u + s)x - (ydy + xdt)(x - t)s = 0$... $suxdt - suydy - ssydy - tsxdy - xxt dt - syydy = 0$; as quais mostram que $s = 0$; logo o ângulo DAB deve ser recto, e conseguintemente a equação do perímetro se torna em $a = u + y + t + \sqrt{u^2 + (x - t)^2} + \sqrt{x^2 + y^2}$, e a expressão da superfície em $(t + x)\frac{u}{2} + \frac{xy}{2}$.

Diferenciemos pois supondo somente constantes os dois radicais; teremos ... $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$... $x dx + y dy = 0$... $dt + du + dy = 0$... $u(dt + dx) + (t + x)du + xdy + ydx = 0$.

A segunda destas equações dá $dy = -\frac{xdx}{y}$; a terceira dá $dt = -du - dy = \frac{xdx - ydu}{y}$; e substituindo na primeira e na quinta, teremos as equações ... $ydu + (x - t)(ydx - xdx + ydu) = 0$... $u(xdx - ydu + ydx) + (t + x)ydu - x^2dx + y^2dx = 0$, as quais mostram que $y = 0$; logo o ângulo CBA deve ser recto, e conseguintemente a equação do perímetro se reduz a $a = t + u + x + \sqrt{u^2 + (x - t)^2}$, e a expressão da superfície a $(t + x)\frac{u}{2}$.

Diferenciemos agora, não supondo constante senão o radical; teremos ... $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$... $dt + du + dx = 0$... $u(dt + dx) + (t + x)du = 0$. A segunda dá $dt = -dx - du$; substituindo pois este valor nas outras duas, e combinando-as virá $x = t$; logo a equação do perímetro se reduz a $a = 2t + 2u$, e a expressão da superfície a ut .

Estas duas expressões sendo diferenciadas dão $dt + du = 0$... $udt + tdu = 0$; logo $t = u$. Concluiremos pois, que as linhas AB, AD, DC, CB são iguais entre si; e como o ângulo A deve ser recto, o quadrilátero procurado necessariamente será um quadrado.

Neste problema o autor mostra que o quadrilátero de maior área, dado o seu perímetro, é o quadrado. Esta resolução é mais complexa do que as dos problemas anteriores. O autor começa por decompor o quadrilátero em três triângulos rectângulos e um rectângulo, sendo que o perímetro do quadrilátero será então a soma das hipotenusas dos três triângulos mais o comprimento do rectângulo. Aplica então o Teorema de Pitágoras para determinar as medidas das hipotenusas, depois apresenta o

perímetro do quadrilátero e a função a otimizar. Utilizando os diferenciais destas duas expressões chega ao diferencial do qual pretende determinar os zeros concluindo, finalmente, que o quadrilátero de maior área, dado o seu perímetro é o quadrado.

O autor ainda apresenta a seguinte observação/generalização:

Esta propriedade podia achar-se com mais facilidade; mas não satisfaríamos então ao que nos propusemos, isto é, a mostrar de que modo a liberdade de tomar esta ou aquela quantidade por constante facilita o cálculo em muitos casos. Se aplicarmos mesmo aos outros polígonos, acharemos que em geral de todas as figuras isoperimétricas do mesmo número de lados, o polígono regular desse número de lados é o que tem maior superfície; donde se segue, que de todas as figuras isoperimétricas o círculo é a que tem maior superfície.

2.3.1.5. CONCLUSÃO

Nesta obra, Bézout designa os problemas de optimização como problemas, o que não acontecia nas obras analisadas anteriormente. Estes são seguidos das respectivas resoluções.

Para além dos problemas apresentados, o autor aborda ainda, em algumas situações, casos particulares ou generalizações dos problemas apresentados. Estes nem sempre apresentam Resolução.

Os problemas apresentados são Aritméticos, de Geometria Plana e de Geometria Espacial. Pretende-se otimizar áreas, volumes ou produtos.

Também nesta obra se utiliza o Cálculo Diferencial para resolver os problemas de máximos e mínimos.

Para fazer a resolução, o autor começa por equacionar o problema, de seguida calcula a respectiva derivada e os zeros desta. Por fim apresenta a resposta ao respectivo problema.

2.4. INSTITUCIONALIZAÇÃO: SÉCULO XIX

O século XIX é considerado o período de Ouro da Matemática, uma vez que se produziu mais durante este século do que em todas as épocas precedentes.

Neste espaço de tempo encontramos também vários autores relacionados com o nosso tema de investigação. São, por norma, professores universitários na área do Cálculo Diferencial e Integral que publicam os seus apontamentos. Muitos destes livros eram depois traduzidos e usados como manuais noutras universidades e até noutros países. De todos iremos seleccionar apenas dois para analisar detalhadamente. Vejamos alguns desses autores e quais as obras que escreveram.

Silvestre-François Lacroix (1765-1843) publicou a obra *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* (1806). Augustin-Louis Cauchy (1789-1875) foi um importante autor de livros didácticos: *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821), *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829). Um dos seus maiores sucessores foi Jacques Charles François Sturm (1803 – 1855) igualmente autor de um livro didáctico, *Cours d'Analyse* (1857). Algum tempo depois Joseph Alfred Serret (1819-1885), professor posterior a Sturm, publicou a obra *Cours de Calcul Differentiel et Integral* (1878). Bernhard Riemann (1826-1866) também desenvolveu alguns trabalhos nesta área e os seus escritos estão compilados na obra *Oeuvres mathématiques de Riemann* (1898). Por fim, Henri Lebesgue (1875-1941), que foi professor, e que editou as suas lições, sendo a primeira obra *Leçons sur séries trigonométriques* (1903) e a outra *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (1904).

Seleccionámos, nesta parte, para analisar, a obra de Sturm e a de Serret.

2.4.1. COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE STURM

2.4.1.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Jacques Charles François Sturm

Data de nascimento e falecimento do autor: 1803 – 1855

Título: *Cours D'Analyse de L'École Polytechnique*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1857, Gauthier-Villars: Paris

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1884, Gauthier-Villars: Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 26-01 STU V.1 7 Ed.

2.4.1.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Jacques Charles François Sturm nasceu em Genebra, Suíça, em 1803. Provem de uma família Protestante que lhe deu uma boa educação. O seu pai Jean-Henri Sturm era professor de aritmética e faleceu quando Sturm tinha 16 anos. Nessa altura, deixou de estudar Humanidades e começou a estudar Matemática na Academia de Genebra com Simons Lhuinier, em 1821, que, de imediato, reconheceu em Sturm um génio matemático. Entretanto Lhuinier reformou-se e ficou como seu sucessor Jean Jacques Schaub, pessoa que inspirou e ensinou Sturm e também o ajudou financeiramente, na Academia, pois, desde a morte do seu pai que a família de Sturm estava com consideráveis dificuldades económicas.

Quando deixou a Academia, Sturm foi apontado como tutor do filho mais novo de Mme de Staël, no Châteaux de Coppet, perto de Genebra. Terminou os seus estudos em Maio de 1823 e, como tinha muito tempo livre, começou a estudar, a investigar e a escrever artigos sobre Geometria, que publicou no *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne.

Pelo final de 1823 a família mudou-se para passar uma temporada em Paris e Sturm acompanhou-a. Chegado à cidade parisiense, foi inserido nos círculos científicos pela família e onde conheceu Lalace, Poisson, Fourier, Gay-Lussac, Ampere, entre outros.

Em Maio de 1824 regressou a Geneva, mas em Dezembro de 1825 regressou de novo a Paris. Em 1829 publicou um dos seus artigos mais famosos *Mémoire sur la résolution des équations numériques*.

Inicialmente não foi fácil para Sturm conseguir emprego, uma vez que era estrangeiro e Protestante. Mas após a revolução de Julho de 1830, Sturm conseguiu ser nomeado professor de Matemática, no Collège Rollin. Em 1836 foi nomeado para a Académie des Sciences. Durante estes anos publicou alguns resultados importantes acerca de Equações Diferenciais.

Entre 1838 e 1840 foi professor de Análise e Mecânica, na École Polytechnique, em Paris e sucedeu a Poisson, na cadeira de Mecânica, da Faculté des Sciences em Paris.

Durante Cerca de 10 anos deu excelentes aulas, mas desejava dar aos seus alunos os melhores cursos possíveis pelo que, despendia, muito tempo, a preparar as suas lições

para os cursos de Cálculo Diferencial e Integral e de Mecânica Racional. Estes cursos, intitulados Cours D'Analyse de l'École Polytechnique 2 Vol. (1857-63) e Cours de mécanique de l'École Polytechnique 2 Vol. (1861), ambos publicados postumamente, tornaram-se nos textos mais usados.

Apesar de não ter muito tempo para pesquisar, continuava a oferecer contribuições importantes para a Geometria Infinitesimal, Geometria Projectiva e Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies e Óptica Géométrica.

A partir de 1851 começou a ficar com problemas cardíacos e acabou por falecer em 1855.

2.4.1.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

Uma vez que esta obra tinha como objectivo ser utilizada como manual escolar, apresenta por isso, uma estrutura bastante distinta das obras analisadas anteriormente.

Ela está dividida em dois tomos. O primeiro, que vamos analisar, está dividido em duas partes: A primeira trata do Cálculo Diferencial e a segunda do Cálculo Integral. Cada uma destas duas partes está subdividida em lições. A parte dedicada ao Cálculo Diferencial é constituída por 26 lições, abarcando os vários sub – temas do Cálculo Diferencial. Em cada uma das lições Sturm apresenta as noções e definições relacionadas com o tema, bem como os teoremas e respectivas demonstrações. Expõe também notas, exemplos, observações e, no final de cada lição, um conjunto de exercícios com a respectiva solução, relacionados com o tema da lição.

As imagens utilizadas estão inseridas ao longo do texto e não no final da obra ou compiladas numa página, como vimos nas obras anteriores.

A décima quarta lição (pag. 167 – 179) é dedicada aos máximos e mínimos de funções de uma variável. É nesta lição que encontramos os problemas de máximos e mínimos. Vejamos como Sturm organiza esta lição:

Quatorzième Leçon : Maximum et minimum des fonctions d'une variable

Maximums et minimums de fonctions d'une seule variable indépendante

Applications

Maximums et minimums d'une fonction implicite

No final da lição Sturm apresenta uma lista de sete exercícios relacionados com a lição.

2.4.1.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Como já foi referido, é na décima quarta lição que Sturm aborda os problemas de máximos e mínimos e após a respectiva aplicação do método de cálculo dos máximos e mínimos, apresenta algumas aplicações das quais duas são problemas de máximos e mínimos.

Ambas as aplicações estão também enunciadas e resolvidas na obra de Serret de uma forma muito semelhante.

2ª Aplicação

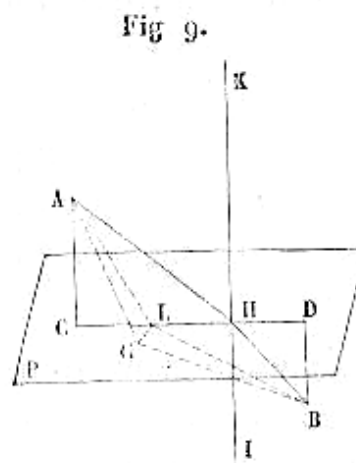
São dados dois pontos A e B, situados em dois meios diferentes e separados por uma superfície plana P. Um móvel move-se no primeiro meio com uma velocidade uniforme u, e no segundo meio com uma velocidade uniforme v; procuramos o caminho AHB que o móvel deve fazer para ir de A a B no tempo mais curto. (pag. 170)

Resolução apresentada:

É claro antes de mais que este caminho deve ser composto de linhas rectas. Eu digo ainda que a linha cortada que resolve este problema deve estar no plano ABCD, conduzido pelas perpendiculares AC, BD ao plano P. Com efeito, suponhamos que esta linha é AGB e que ela intersecta o plano P no ponto G situado fora do plano ABCD. Tracemos GL perpendicular a CD, e juntemos AL e BL. Os triângulos AGL e BGL são rectângulos em L, tem-se $AL < AG$ e $BL < BG$; assim, o móvel vai mais rapidamente do ponto A ao ponto B seguindo o caminho ALB do que seguindo o caminho AGB.

Procuremos, no plano ABCD, perpendicular ao plano P, a linha AHB, que é percorrida pelo móvel no menor tempo possível.

Seja $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$ e $CH = x$;



o tempo que o móvel emprega para ir de A a H é $\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}$, e o que emprega para ir de H a B é $\frac{HB}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v}$; assim, a função da qual pretendemos calcular o mínimo é

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v}$$

calculemos quando é que

$$f'(x) \text{ ou } \frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{v\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0$$

ou seja

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c-x}{v\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

Se quisermos resolver esta equação em ordem a x , deveremos elevar os dois membros ao quadrado, e teremos de seguida de resolver uma equação do quarto grau. Mas como

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin CAH = \sin AHK,$$

$$\frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \sin HBD = \sin BHI$$

verificamos que, no caso do mínimo (a função $f(x)$ não tem máximo), temos

$$\frac{\sin AHK}{u} = \frac{\sin BHI}{v} \text{ ou } \frac{\sin AHK}{\sin BHI} = \frac{u}{v}$$

Na teoria da luz, a quantidade $\frac{u}{v}$, razão das velocidades da luz nos dois meios, é o índice da refacção da luz, na passagem do primeiro meio para o segundo.

Este é um problema de Física que já surgiu anteriormente. Nele, pretende-se otimizar uma distância, repartida em duas partes em que um objecto se desloca a velocidades distintas. Na sua resolução surge a função a derivar como $f(x)$ e não como y como anteriormente, depois calcula a sua derivada e respectivos zeros. Para equacionar o problema, o autor decompõe a figura em triângulos rectângulos, utilizando depois o Teorema de Pitágoras e as funções trigonométricas para relacionar os lados destes triângulos. A função obtida é uma função irracional.

4ª Aplicação

Determinar a distância mínima de um ponto dado $M(a, b)$ a uma curva da qual conhecemos a equação (pag. 172)

$$(1) \ y = f(x).$$

Resolução apresentada:

Juntemos MK, K é um ponto qualquer da curva. Tem-se

$$\overline{MK}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Igualando a zero o diferencial desta expressão, temos

$$(x - a) + (y - b) \frac{dy}{dx} = 0$$

equação que se transforma em

$$(2) \ \frac{y - b}{x - a} \cdot \frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

Ora esta relação entre $\frac{dy}{dx}$, coeficiente angular da tangente à curva dada no ponto (x, y) , e $\frac{y - b}{x - a}$, coeficiente angular da recta MK, mostra que estas duas rectas são perpendiculares entre elas. Assim a recta mínima deve cortar a curva dada num ângulo recto.

Se a distância MK for susceptível de um máximo, determiná-lo-emos ainda pela resolução das equações (1) e (2).

Consideremos em particular o círculo cuja equação é

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Tem-se $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, e a relação (2) ficará

$$1 - \frac{y - b}{x - a} \cdot \frac{x}{y} = 0$$

Para determinar x e y, temos as duas equações

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

que tomadas simultaneamente, representam os pontos de intersecção do círculo dado com a recta MO. Então KM será a distância mínima, e K'M a distância máxima, como verificaremos facilmente considerando as derivadas seguintes.

Mas apresenta-se aqui uma singularidade que podemos explicar pela definição de máximo e mínimo.

Suponhamos que o ponto dado é o ponto N situado sobre o eixo das abcissas a uma distância a do centro. O quadrado da distância NH será representado pela expressão

$$y^2 + (x - a)^2;$$

ou seja por

$$r^2 - 2ax + a^2.$$

Ora a derivada desta expressão é uma quantidade constante ($-2a$) que, por consequência, não pode ser igualada a zero. Assim, como existe uma distância mínima que é NA, não a obteremos pelo mesmo processo. Esta vem do facto de, depois da definição, uma função é mínima para um certo valor da variável, porque ele aumenta pelos valores maiores e mais pequenos dessa variável. Ora, se NH é considerado como uma função de x , NA não é mais um mínimo, pois esta função, real para os valores de x menores do que r , tornam-se imaginários para os valores maiores.

Neste problema de Geometria Analítica, o autor pretende otimizar a distância entre um ponto e uma curva dada. Na resolução desta aplicação o autor utiliza a fórmula da distância entre dois pontos para equacionar o problema. Depois determina o diferencial dessa expressão e iguala-o a zero. Trabalha então com a equação do diferencial igualada a zero e com a função da curva para determinar a solução óptima. Aplica ainda a segunda derivada para verificar se, de facto, se trata de um máximo ou de um mínimo.

No final da lição Sturm apresenta uma lista de exercícios seguidos, cada um deles, da respectiva solução.

1. *Qual é o maior quadrilátero que conseguimos formar com quatro lados dados?*
(pag. 178)

Solução: O Quadrilátero inscriível.

2. *Determinar sobre uma circunferência dada um ponto tal, que a soma das suas distâncias a dois pontos dados seja um máximo ou um mínimo.* (pag. 178)

Solução: O ponto de contacto da circunferência e de uma elipse, tangente ao círculo, sendo como focos os dois pontos dados.

3. *Inscriver numa esfera dada um cone tal que a superfície total seja um máximo.* (pag. 178)

Solução: Designando por x a altura e por r o raio da esfera, tem-se $x = \frac{23 - \sqrt{17}}{16} r$.

4. *Circunscrever a uma esfera dada um cone tal que o volume seja mínimo.* (pag. 178)

Solução: Usando as mesmas notações.

$$x = 4r, \text{ vol. max. } = \frac{8}{3} \pi r^3$$

5. *Entre todas as parábolas que podem descrever dois corpos pesados partindo de um ponto dado com uma velocidade dada, determinar a que tem a área maior.* (pag. 178)

Solução: Parábola descrita por um corpo lançado numa direcção com uma inclinação de 60 graus em relação ao horizonte.

6. *Entre todas as cordas com o mesmo comprimento inscritas numa curva dada, determinar a que corta o segmento maior ou mais pequeno.* (pag. 179)

Solução: A corda deve formar ângulos iguais com as tangentes à curva feitas pelas suas extremidades.

7. *Duas rodas circulares exteriores uma à outra sobre um mesmo plano rodam uniformemente em tornos dos seus centros fixos, uma faz duas voltas, a outra faz três voltas por segundo. Determinar os instantes e as posições das duas rodas para os quais dois pontos marcados sobre as suas circunferências estejam à maior ou à menor distância um do outro. (pag. 179)*

Este exercício não apresenta solução.

2.4.1.5. CONCLUSÃO

Nesta obra verificamos que os problemas de optimização surgem em duas situações distintas. Primeiro, após a explicação do método de cálculo de máximos e mínimos, o autor apresenta algumas aplicações do método, bem como a respectiva resolução. No final do capítulo ou lição o autor apresenta um conjunto de exercícios de aplicação com a respectiva solução. Esta é a primeira obra analisada que apresenta, no final do capítulo, exercícios de aplicação.

Nestas aplicações e exercícios são abordados problemas da Física, de Geometria Plana e de Geometria Espacial, onde se pretende optimizar distâncias, áreas, volumes e tempo.

A primeira aplicação pode ser designada de um problema da vida real.

Nas resoluções apresentadas o autor começa por equacionar o problema; seguidamente, calcula a respectiva derivada e os zeros da mesma; por fim tira as conclusões em relação ao extremo, apresentando depois a resposta ao problema.

2.4.2. COURS DE CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL DE SERRET

2.4.2.1. FICHA DE REFERÊNCIA DA OBRA

Autor: Joseph Alfred Serret

Data de nascimento e falecimento do autor: 1819 – 1885

Título: *Cours de Calcul Differentiel et Integral*

Ano, editora e lugar da primeira edição: 1878, Gauthier-Villars: Paris

Ano, editora e lugar da edição consultada: 1879, Gauthier-Villars: Paris

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Cota: 26-01 SER T.1.

2.4.2.2. CONTEXTUALIZAÇÃO E INTENÇÃO DO AUTOR

Joseph Alfred Serret nasceu em Paris, em 1819. Licenciou-se na École Polytechnique de Paris em 1840. Em 1848 tornou-se um examinador de entrada da École Polytechnique. Posteriormente, em 1861 tornou-se professor de Mecânica Celeste no Collège de France, e dois anos depois foi nomeado para a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral na Sorbone. Tornou-se membro do Bureau des Longitudes em 1873.

Serret desenvolveu um trabalho importante na área da Geometria Diferencial. Juntamente com Bonnet e Bertrand fez grandes avanços nessa área. A fórmula fundamental na teoria de curvas no espaço é a fórmula de Frenet-Serret.

Escreveu, em 1878, uma obra constituída por dois tomos, *Cours de Calcul Differentiel et Integral*, contendo a substância das aulas de Cálculo Diferencial e Integral que tinha leccionado na Sorbonne e na Faculté des Sciences de Paris.

Em 1860 sucedeu a Poisot, na Académie des Ciencias e onze anos depois retirou-se para Versailles quando a sua saúde se começou a deteriorar.

Também trabalhou na área da Teoria dos Números, Cálculo e Mecânica. Editou os trabalhos de Lagrange, que foram publicados em 14 volumes, entre 1867 e 1892. Editou ainda a 5ª edição, de Monge, em 1850.

2.4.2.3. CARACTERIZAÇÃO DA ESTRUTURA DA OBRA

A obra de Serret é constituída por dois tomos. O primeiro é dedicado às regras do Cálculo Diferencial e às aplicações deste Cálculo à Geometria e o segundo é dedicado ao Cálculo Integral.

O primeiro tomo, obra que vamos analisar, está dividida em 12 partes que o autor intitula de Capítulos.

O Capítulo VI (pag. 198 – 240) é dedicado à teoria de máximos e mínimos. Vejamos como está estruturado este capítulo:

Chapitre VI: Théorie des Maxima et des Minima

Des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable

Application à quelques exemples

Remarque sur les maxima et les minima relatifs

Cas des fonctions implicites d'une seule variable indépendante

Des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables indépendantes

Application à quelques exemples

Cas où les dérivés partielles d'une fonction de plusieurs variables cessent d'être déterminés quand on donne aux variables les valeurs qui répondent au maximum ou au minimum

Cas des fonctions implicites de plusieurs variables indépendantes

Remarque sur le cas d'une fonction explicite de plusieurs variables liées par les équations donnés

É na parte intitulada *Application à quelques exemples* (de funções de uma só variável independente) que podemos encontrar alguns problemas de máximos e mínimos.

2.4.2.4. PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

É, como já foi referido, no Capítulo VI que podemos encontrar os problemas de máximos e mínimos.

Este capítulo começa por apresentar a explicação teórica do método de cálculo de máximos e mínimos e de seguida apresenta alguns exemplos de aplicação. Iremos a seguir fazer a análise desses exemplos que estão também presentes na obra anterior. A

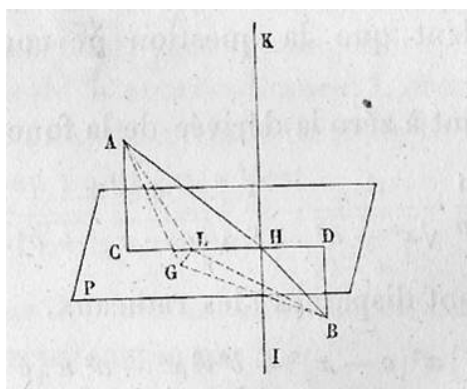
outra parte do capítulo, como trata das funções implícitas e das funções com mais do que uma variável, não serão analisadas, uma vez que se encontram fora do âmbito desta investigação.

Exemplo III (Problema de Fermat)

Dois meios estão separados por um plano P, procuramos o caminho que deve seguir um móvel para ir, no tempo mais curto, de um ponto A do primeiro meio a um ponto B o segundo. O móvel move-se no primeiro meio a uma velocidade constante u, e no segundo meio a uma velocidade constante v. (pag. 203)

Resolução apresentada:

O caminho procurado é composto de duas linhas rectas, pois o espaço percorrido pelo móvel, num ou noutro meio, é proporcional ao tempo empregue. Além disso, esse caminho está situado no plano ACDB posto perpendicular ao plano P pelos pontos dados A e B e que o corta pela linha CD; com efeito, consideremos a linha quebrada AGB, situada fora do plano ACDB, e do ponto G onde ela encontra o plano P, tracemos GL perpendicular sobre CD, as rectas AL e LB serão respectivamente menores que AG e GB; consequentemente, os tempos para percorrer o caminho ALB será menor que o tempo necessário para ir de A a B pelo caminho AGB.



Posto isto, designemos por a e b as perpendiculares AC, BD traçadas dos pontos A e B sobre o plano P, por c a distancia CD e por x a distancia do ponto C a um qualquer ponto H de CD; teremos

$$AH = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad BH = \sqrt{(c-x)^2 + b^2}$$

assim o tempo t que o móvel empregará para ir de A a B, pelo caminho AHB será

$$(1) \quad t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{v};$$

esta é a função de x da qual procuramos o mínimo.

É evidente que a questão não comporta máximo.

Igualando a zero a derivada da função t, tem-se

$$(2) \frac{1}{u} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v} \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = 0$$

onde, fazendo desaparecer os radicais,

$$(v^2 - u^2)x^2(c-x)^2 + b^2v^2x^2 - a^2u^2(c-x)^2 = 0$$

assim a incógnita x depende de uma equação do quarto grau. Mas, sem resolver esta equação, podemos obter como se deduz da propriedade geométrica que caracteriza a linha procurada. Assim, coloquemos a linha KI perpendicular em H ao plano P; designemos por i o ângulo AHK e por r o ângulo IHB, tem-se

$$\sin r = \frac{DH}{BH} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}},$$

$$\sin i = \frac{CH}{AH} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

e por consequência, a equação (2), que exprime a condição do mínimo, vem

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u}{v}$$

Ela resulta de que o seno do ângulo de incidência i está para o seno do ângulo de refacção r na razão das velocidades u e v com as quais o móvel se pode mover no primeiro e no segundo meio, respectivamente.

Este é um problema de Física que já surgiu anteriormente. Nele pretende-se optimizar uma distância repartida em duas partes em que um objecto se desloca a velocidades distintas. Na sua resolução, surge a função a derivar como $f(x)$ e não como y como anteriormente, de seguida calcula a sua derivada e respectivos zeros. Para equacionar o problema o autor decompõe a figura em triângulos rectângulos utilizando depois o Teorema de Pitágoras e as funções trigonométricas para relacionar os lados destes triângulos. A função obtida é uma função irracional.

Exemplo IV

Determinar os máximos e mínimos da distância de um ponto dado a uma curva dada. (p. 205)

Resolução apresentada:

Designemos por x_0 e y_0 as coordenadas do ponto dado relativos a dois eixos rectangulares; por x e y as coordenadas da curva dada. A ordenada y é uma função dada de x , e o quadrado da distância do ponto do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x, y) é

$$(1) \quad V = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

pretende-se calcular os valores máximo e mínimo da função de x representada por V .

Tem-se

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{dV}{dx} = (x - x_0) + (y - y_0) \frac{dy}{dx} \\ \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) + (y - y_0) \frac{d^2y}{dx^2} \end{cases}$$

A condição $\frac{dV}{dx} = 0$ do máximo ou do mínimo está aqui

$$(3) \quad (x - x_0) + (y - y_0) \frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} \frac{dy}{dx} = -1$$

$\frac{y - y_0}{x - x_0}$ é o coeficiente de inclinação da recta que junta o ponto dado M_0 com o ponto

procurado M da curva dada, $\frac{dy}{dx}$ é o coeficiente de inclinação da tangente em M à mesma curva. Assim a equação precedente exprime que a recta que junta o ponto dado ao ponto procurado é normal à curva.

Seja M um dos pontos assim determinados pela equação (3); esse ponto irá corresponder a um mínimo ou a um máximo, conforme $\frac{d^2V}{dx^2}$ seja positiva ou negativa.

Mas, se $\frac{d^2V}{dx^2}$ for nula, deveremos recorrer às derivadas de ordem superior para decidir se temos um máximo ou um mínimo, ou se não é um nem outro. Este último caso apresenta-se em particular se, $\frac{d^2V}{dx^2}$ for nula no ponto M , o valor de $\frac{d^3V}{dx^3}$ é diferente de zero.

A recta M_0M será colocada, supondo que o ponto dado M_0 toma todas as posições possíveis sobre esta normal, irá existir uma posição M' do ponto M_0 para o qual a

derivada $\frac{d^2V}{dx^2}$ seja nula; consequentemente, se tomarmos x' , y' coordenadas de M' tem-se

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - y') \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

e a segunda equação (2) pode então escrever-se na forma

$$\frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2} = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) \frac{y_0 - y'}{y - y'}$$

Esta mostra que o valor de M_0M será um mínimo ou um máximo, dependendo de que $y_0 - y'$ e $y - y'$ estejam na mesma linha ou em linhas contrárias. Noutros termos, irá existir um mínimo quando o ponto dado M_0 esteja situado entre M' e M , irá existir um máximo caso contrário. O ponto M' é, como iremos ver posteriormente, o que designamos por *centro da curvatura* da curva dada no ponto M .

Neste problema de Geometria Analítica, o autor pretende otimizar a distância entre um ponto e uma curva dada. Na resolução desta aplicação o autor utiliza a fórmula da distância entre dois pontos para equacionar o problema. Depois determina o diferencial dessa expressão e iguala-o a zero. Trabalha então com a equação do diferencial igualada a zero e com a função da curva para determinar a solução ótima. Aplica ainda a segunda derivada para verificar se é um máximo ou um mínimo.

2.4.2.5. CONCLUSÃO

Nesta obra verificamos que os problemas de optimização surgem como exemplos, após a explicação do método de cálculo de máximos e mínimos.

Os dois exemplos apresentados pelo autor foram estudados anteriormente por Sturm e as resoluções apresentadas são muito semelhantes.

Nestes dois exemplos, apresentados pelo autor, são abordados problemas da Física e problemas de Geometria Plana. No primeiro, calcula-se uma distância mínima, numa situação da vida real e no segundo, calcula-se a distância mínima entre um ponto e uma curva dada.

Nas resoluções apresentadas o autor começa por equacionar o problema; a seguir calcula a respectiva derivada e os zeros da mesma e por fim tira as conclusões em relação ao extremo, apresentando depois a resposta ao problema.

CONCLUSÕES

Neste segundo capítulo tínhamos como objectivo efectuar uma análise de algumas obras históricas para, com esta análise, identificar os vários matemáticos que nas suas obras abordaram os problemas de optimização e fazer uma análise a esses mesmos problemas e à respectiva resolução.

Assim, após uma pesquisa nos livros de História da Matemática, fizemos a identificação dos matemáticos e das obras que, possivelmente, abordaram estes problemas. De seguida fizemos uma localização das obras e uma primeira análise das mesmas para verificar se, de facto, abordavam estes problemas. Finalmente seleccionámos algumas dessas obras que nos parecem ser representativas do nosso estudo.

Uma das primeiras conclusões a que chegámos foi que, de facto, os problemas de optimização já eram abordados muito antes de surgir o conceito de derivada. Pois o primeiro autor que verificámos ter feito a sua abordagem foi Euclides na sua obra *Elementos* no século IV (a. C.) e, posteriormente, também Pappus, no século IV D.C., fez uma abordagem dos mesmos na sua obra *La collection Mathématique*. Ambos os autores são muito anteriores ao surgimento do conceito de derivada.

Também, com base na análise que efectuámos a cada uma das obras, podemos tirar conclusões acerca dos vários tipos de problemas encontrados bem como das respectivas resoluções/demonstrações.

Quanto ao enunciado dos problemas, verificámos que estes surgem, na obra de Euclides e na obra de Pappus sob a forma de proposições. Também, na obra de L'Hôpital, uma vez que é uma das primeiras obras que surgiu após o conceito de derivada, estes são enunciados como exemplos. Na obra de Bézout, escrita na época em que se dá a consolidação do conceito de derivada, estes aparecem, pela primeira vez, enunciados como problemas. Quanto às duas últimas obras analisadas, Sturm, enuncia-os como uma aplicação do cálculo de máximos e mínimos e são, pela primeira vez, apresentados exercícios de aplicação e na obra de Serret são enunciados como problemas.

Os problemas abordados são também de diversos tipos. Assim, na obra de Euclides apenas são abordados problemas de Geometria Plana e na obra de Pappus

todos os problemas são de Geometria Plana ou de Geometria Espacial. Na obra de L'Hôpital surge um leque mais vasto de problemas, além dos dois tipos já referidos, surgem também problemas de Aritmética, de Física e até de Astronomia. Na obra de Bézout surgem problemas de Geometria Plana, Geometria Espacial e de Aritmética. Por fim, nas duas últimas obras, surgem os de Geometria Plana, de Geometria Espacial e da Física.

Também o que se pretende otimizar varia de obra para obra. Na primeira obra surgem problemas de optimização de distâncias, áreas ou ângulos. Na segunda obra, para além dos anteriores, surgem também os de optimização de volumes. Na terceira obra surgem os de optimização de áreas, produtos, razões e de tempo. Na quarta obra analisada surgem os de optimização de áreas, volumes e produtos. Por fim, nas últimas obras surgem os de optimização de distâncias, áreas, volumes e tempo.

Consequentemente, também o tipo de resolução que se faz varia significativamente. As duas primeiras obras, uma vez que enunciam os problemas como proposições, apresentam as demonstrações das mesmas. Assim usam o método de redução ao absurdo e outras proposições anteriormente apresentadas, utilizam também relações entre triângulos ou ângulos. A partir da terceira obra, uma vez que marca o surgimento do conceito de derivada, deixamos de ter demonstrações e passamos a ter as resoluções dos problemas ou exemplos apresentados. Estas resoluções começam por equacionar o problema, depois calculam a derivada da função bem como os respectivos zeros e, por fim, apresentam a resposta ao problema apresentado.

As resoluções costumam ser complementadas com imagens ao longo do texto, com excepção da obra de L'Hôpital e de Bézout que apresentam as imagens posteriormente compiladas. Em relação às duas primeiras obras, uma vez que são traduções das obras originais, não podemos conjecturar onde estas eram apresentadas.

Em relação à localização dos mesmos na obra, podemos verificar que nas duas primeiras estes se encontravam em distintas partes da obra, não existindo, obviamente, uma parte dedicada aos problemas de máximos e mínimos. Em todas as outras estes estavam incluídos no Cálculo Diferencial e eram referidos como aplicações ou como problemas de máximos e mínimos.

Assim, com base na análise que efectuámos a cada uma das obras, podemos construir uma tabela de catalogação dos vários problemas encontrados, bem como das respectivas resoluções/demonstrações. Nessa tabela podemos catalogar as várias formas de enunciar os problemas, os tipos de problemas abordados, o tipo de optimização que se efectuar e o tipo de resolução apresentada.

Na primeira coluna da tabela indicamos a obra e o número do problema da obra: E refere-se à de Euclides, P à de Pappus, L à de L'Hôpital, B à de Bézout, ST à de Sturm e SE à de Serret. O número que surge à frente da letra indica o número do problema em questão.

Na primeira linha da tabela indicamos os vários pontos que vamos analisar e na segunda linha a catalogação de cada um dos pontos analisados. O significado das siglas que usamos está indicado na grelha apresentada a seguir.

Forma de Enunciado	Tipo de Problemas	Tipo de Optimização	Tipo de Resolução
Proposição (PR)	Geometria Plana (GP)	Distância (OD)	Demonstração (DEM)
Exemplo (EX)	Geometria Espacial (GE)	Área (OAR)	Resolução (RES)
Problema (PB)	Aritmética (AR)	Volume (OV)	
Aplicação (AP)	Física (FI)	Produto (OP)	
Exercício (EXR)	Astronomia (AS)	Ângulo (OAN)	
		Razão (OR)	
		Tempo (OT)	

Tabela de Catalogação dos Problemas Históricos

	Forma de Enunciado					Tipo de Problemas					Tipo de Optimização							Tipo de Resolução	
	PR	EX	PB	AP	EXR	GP	GE	AR	FI	AS	OD	OAR	OV	OP	OAN	OR	OT	DEM	RES
E1	X					X					X							X	
E2	X					X					X							X	
E3	X					X					X							X	
E4	X					X									X			X	
E5	X					X						X						X	
P1	X					X						X						X	
P2	X					X						X						X	
P3	X						X						X					X	
P4	X						X						X					X	
P5	X						X								X			X	
P6	X					X					X							X	
L1		X				X		X						X					X
L2		X				X		X								X			X
L3		X					X					X							X
L4		X					X					X							X
L5		X					X					X							X
L6		X							X								X		X
L7		X							X										X
L8		X								X							X		X
B1			X					X						X					X
B2			X			X						X							X
B3			X				X						X						X
B4			X			X						X							X
B5			X			X						X							X
ST1				X					X								X		X
ST2				X		X					X								X
ST3					X	X						X						-	-
ST4					X	X					X							-	-
ST5					X		X					X						-	-
ST6					X		X						X					-	-
ST7					X	X			X			X						-	-
ST8					X	X					X							-	-
ST9					X	X			X		X							-	-
SE1			X						X								X		X
SE2			X			X					X								X

3. ANÁLISE DOS PROGRAMAS OFICIAIS E DOS MANUAIS ESCOLARES PORTUGUESES DO SÉCULO XX E XXI

Após a análise efectuada aos livros históricos de Matemática, impõe-se agora realizar uma análise ao sistema de ensino português. Com a realização desta análise pretendemos: verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização; analisar em cada plano de estudos a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo do Cálculo Diferencial e especificamente ao estudo dos problemas de optimização e ainda analisar como estes foram abordados, ou seja, o tipo de problemas proposto pelo Ministério e o tipo de problemas abordados pelos manuais escolares, verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério. Por fim, observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário.

O século XX, em Portugal, foi um século marcado por alguns acontecimentos que, certamente, influenciaram o ensino e, em particular, a elaboração dos programas oficiais para a disciplina de Matemática. No início do século passamos de um regime Monárquico para um regime Republicano que, posteriormente, se transformou num regime ditatorial. Também a evolução das novas tecnologias, especialmente do computador e da calculadora, marcaram o ensino desta disciplina.

Para esta fase da nossa investigação foi muito importante a recolha de legislação acerca dos programas oficiais da disciplina de Matemática realizada por Aires (2006), no seu trabalho de investigação *“O conceito de derivada no Ensino Secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares”*. Neste foi efectuada um estudo histórico centrado na questão do ensino da noção de derivada, desde que ocorreu a sua introdução no mesmo ensino, no século XX, mais concretamente no ano de 1905, acompanhando a sua evolução ao longo do referido século. De grande importância foi também a investigação realizada por González Astudillo (2002) intitulada *“Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica”* que apresenta uma

caracterização das representações dos pontos críticos presentes nos manuais escolares espanhóis e em livros históricos.

Também a obra de Rómulo de Carvalho (1985), *História do ensino em Portugal. Desde a fundação da nacionalidade até ao fim do regime de Salazar – Caetano*, acerca do ensino em Portugal foi de precioso auxílio, uma vez que nos permitiu ter uma visão mais alargada das alterações sofridas ao longo do século, pelo nosso sistema de ensino.

Indispensáveis foram de igual modo os livros de História de Portugal dirigidos por José Hermano Saraiva que nos permitiram ter uma visão mais ampla acerca do ambiente político, social e económico do país aquando das diversas reformas.

Foram ainda de grande interesse as publicações periódicas da revista *Gazeta da Matemática*, criada em 1940 e publicada pela SPM¹⁷. Estas permitiram-nos sentir as opiniões, críticas e comentários dos Matemáticos, Professores de Matemática e Pedagogos do nosso país em relação às sucessivas alterações curriculares sofridas pela disciplina de Matemática ao longo dos dois últimos séculos.

Todos os estudos e investigações realizadas pelas diversas entidades governamentais e não governamentais acerca das diversas reformas educativas e programas oficiais tiveram também um papel importante para a realização da nossa investigação.

Assim, começámos por fazer uma recolha de legislação para identificar as várias reformas curriculares realizadas ao ensino, em Portugal, bem como investigar se estas conduziram a alguma alteração na disciplina de Matemática, mais especificamente no estudo da derivada e suas aplicações.

Com base nesta pesquisa dividimos esta análise em cinco períodos:

- 1º Período: Introdução nos programas oficiais do estudo da derivada
- 2º Período: Introdução das aplicações da derivada nos programas oficiais
- 3º Período: Introdução das Matemáticas Modernas em Portugal
- 4º Período: A Lei de Bases do Sistema Educativo
- 5º Período: Introdução da calculadora gráfica nos programas oficiais

Posteriormente à análise dos programas oficiais da disciplina de Matemática, realizámos uma recolha de manuais escolares respeitantes às reformas curriculares que referem o estudo da derivada, mais especificamente, os que contemplam o estudo das aplicações da derivada ou o cálculo de extremos de uma função. Dado que, a partir do

¹⁷ Sociedade Portuguesa da Matemática

momento em que deixa de estar em vigor o livro único, surge um elevado número de manuais escolares para cada ano, optámos por seleccionar, para cada um dos períodos referidos, anteriormente, alguns destes manuais a fim de analisar mais detalhadamente os problemas de optimização.

A tabela seguinte contém a listagem de todos os manuais analisados. Referindo para cada um dos manuais o nome do autor ou autores, o título do livro, o ano lectivo a que pertence, o ano da publicação, o nome da editora, a reforma curricular a que se refere e, por fim, as observações onde fazemos referência ao facto de ser ou não o livro único bem como o Diário de Governo em relação ao qual está de acordo.

Tabela de Manuais Escolares que abordam os problemas de optimização

Autor	Título da Obra	Ano Lectivo	Ano Publ.	Editora	Reforma	Obs.
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º,7º Ano 3ºC-Ens. Lic.	1958	Livraria Rodrigues	1954	L. U. – DG 2ª S. de 22/1/1958
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º,7º Ano 3ºC-Ens. Lic.	1960	Livraria Rodrigues	1954	L. U. – DG 2ª S. de 22/1/1958
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º Ano - Ens. Lic.	1963	Livraria Popular de Francisco Franco	1954	L. U. – DG
J. Sebastião e Silva; José Duarte Silva Paulo	Compêndio de Álgebra	6º Ano – Ens. Lic.	1968	Livraria Cruz	1954	L. U. – DG 2ª S. de 8/5/1968
António Nascimento Palma Fernandes	Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional	6º Ano - Liceus	1961	Livraria Didáctica	1954	
J. Sebastião e Silva	Compêndio de Matemática	7º Ano	1965		1963	2º proj. esp.STP-4/SP/Portugal
Ondina Vasconcelos	Compêndio de Matemática	1º CC (Antigo 6º)	1973	Porto Editora	1973	Matemática Clássica
Fernando Borja Santos	Sebenta de Matemáticas Modernas	5º Ano CC. (antigo 7º)	1974		1973	
Madalena Garcia; Alfredo Osório; António Ruivo	Compêndio de Matemática	2º Ano CC. VI	1975	Empresa Literária Fluminense	1973	D.L. nº 47 587 de 10/3/1967
J. A. Loureiro de Amorim	Exercícios de Matemática	2º Ano CC.	1977?	Didáctica Editora	1973	
A. César Freitas; Francelino Gomes	Matemática	11º Ano (2º CC) Vol. 2	1979	Livraria Popular Francisco Franco	1979	
Henrique Verol Marques	Exercícios de Matemática 1	11º Ano	1979	Editorial Presença	1979	

Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI

António do Nascimento Palma Fernandes	Matemática 7 – Exemplos e exercícios	11º Ano	1980	Plátano Editora	1979	
Paulo Abrantes; Raul Fernando Carvalho	M11 – Matemática 11º ano	11º Ano	1984	Texto Editora	1979	
M. A. F. Neves; M. Teresa C. Vieira; Alfredo G. Alves	Matemática	11º Ano	1988	Porto Editora	1979	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	10º Ano	1992	Editorial O Livro	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	11º Ano	1994	Editorial O Livro	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	12º Ano	1994	Editorial O Livro	1991	
Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 11	11º Ano	1994	Areal Editores	1991	
Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 12	12º Ano	1995	Areal Editores	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 10	10º Ano	1994	Porto Editora	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 11	11º Ano	1994	Porto Editora	1991	
M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito	Matemática 12	12º Ano	1995	Porto Editora	1991	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	10º Ano	1996	Editorial O Livro	1997	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	11º Ano	1997	Editorial O Livro	1997	
Yolanda Lima; Francelino Gomes	Xeqmat	12º Ano	1997	Editorial O Livro	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 10	10º Ano	1997	Areal Editores	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 11	11º Ano	2001	Areal Editores	1997	
Ana M.B. Jorge, C. Barroso Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo	Infinito 12	12º Ano	1995	Areal Editores	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 10	10º Ano	2001	Porto Editora	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 11	11º Ano	2001	Porto Editora	1997	
Maria Augusta F. Neves	Matemática 12	12º Ano	2002	Porto Editora	1997	

A análise de cada período foi repartida em três partes:

- Parte A – Análise do programa oficial: Nesta apresentámos o programa oficial bem como algumas características deste ou da época em que se insere.
- Parte B – Análise dos manuais: Nesta começámos por apresentar a descrição dos vários manuais consultados, indicando, para cada um, a ficha de referência da obra consultada (autor, título, ano lectivo, reforma curricular, ano, editora e lugar de edição e sua localização) e estrutura da obra. Depois apresentámos a lista de todos os problemas de optimização encontrados.
- Parte C – Análise do período: Nesta parte surge uma descrição das características dos problemas deste período.

Ao iniciar a análise dos problemas de optimização presentes nos manuais escolares, a primeira questão que se colocou foi relativamente à forma como poderíamos fazer essa análise de forma a conseguir caracterizar os problemas presentes em cada período.

González Astudillo (2002) dá-nos uma caracterização das representações presentes nos manuais escolares espanhóis. Camacho Machin (1998) faz uma classificação dos tipos de problemas de optimização que surgem nos manuais escolares e de apresenta-nos uma proposta de resolução, utilizando a calculadora gráfica TI92. Martin Kindt (1995) compara diferentes métodos de resolução do mesmo problema resolvendo problemas antigos, utilizando a calculadora gráfica. Também Mesa (2004) apresenta uma caracterização dos exercícios apresentados nos livros de texto.

Como se trata de uma investigação acerca de problemas optamos por fazer essa análise baseada nas quatro fases de resolução de problemas propostas por Polya (1975), visto ser o autor referido nos manuais escolares.

Segundo Polya (1975), para resolver um problema devemos seguir os passos seguintes:

1. *Compreensão do Problema*: Identificar a incógnita, os dados e a condicionante; Verificar se é possível satisfazer a condicionante, se esta é suficiente para determinar a incógnita; Traçar uma figura.
2. *Estabelecimento de um plano*: Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita e verificar se é necessário considerar problemas auxiliares.

3. *Execução do plano*: Verificar cada passo, verificar se cada passo está correcto.

4. *Reflexão*: Examinar a solução obtida, verificar se esse resultado é possível.

Refere o autor que:

"Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão interrelacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a."

Assim sendo, à medida que fomos analisando os vários problemas de optimização presentes nos manuais utilizados, tentamos identificar as características destes relativamente a cada uma das quatro fases da resolução de problemas.

Criámos então um conjunto de treze categorias repartidas pelas quatro fases: seis categorias para a primeira fase, três para a segunda, três para a terceira e uma para a última. Cada uma das categorias é composta pelas diferentes características que identificámos nos problemas analisados.

Primeira fase: Compreensão do problema

Nesta primeira fase pretende-se proceder à identificação das incógnitas, dos dados e das condicionantes.

Identificámos, para esta fase, seis categorias:

- Tipo de Problema (T): Nesta categoria referimos a forma como o problema é apresentado no manual.
 - Exemplo Resolvido (TEP) – Problemas que surgem sob a forma de exemplo de aplicação seguido da respectiva resolução.
 - Exercício Resolvido (TER) – Problema que surge sob a forma de exercício mas seguido da respectiva resolução.
 - Exercício (TE) – Problema que surge sob a forma de exercício, normalmente no final do capítulo ou nas margens do manual, sem resolução, mas com solução no final.
 - Demonstração (TDM) – Problema que surge sob a forma de demonstração.

- Relatório (TR) – Problema em que se pretende que o aluno elabore um relatório ou uma composição, explicando assim, o processo de resolução.
- Contexto do problema (C): Nesta categoria referimos qual é o contexto em que o problema se enquadra.
 - Geometria Métrica (CGM) – Problema de geometria métrica.
 - Geometria Analítica (CGA) – Problema de geometria analítica.
 - Aritmética (CAR) – Problema de aritmética, normalmente ligado à optimização de produtos ou somas.
 - Contexto Real Medida (CRM) – Problema em contexto real de medida em que se pretendem, normalmente, otimizar distâncias, áreas, volumes.
 - Contexto Real Física (CRF) – Problema em contexto real de física, normalmente relacionado com velocidade ou intensidade.
 - Contexto Real Economia (CRE) – Problema em contexto real da área da economia em que se pretende otimizar um custo ou um lucro.
- Função a otimizar (O): Nesta categoria referimos o que se pretende otimizar no problema em questão.
 - Distância (OD);
 - Área (OA);
 - Perímetro (OPE);
 - Volume (OV);
 - Produto (OPR);
 - Soma (OS);
 - Tempo (OT);
 - Custo (OC).
- Esquemas/ Figuras auxiliares (F): Nesta categoria referimos se o enunciado do problema vem acompanhado ou não de uma figura ou um esquema auxiliar e, no caso de ter figura, se esta é uma figura simples ou se possui algum tipo de dados auxiliares.
 - Sem esquemas (FSE) – Problemas em que o enunciado não apresenta nenhuma figura ou esquema que auxilie a resolução.

- Figura simples (FFS) – Problemas que apresentam apenas a figura ou uma ilustração.
 - Figura com dados (FFD) – Problemas em que, no enunciado, surge uma figura com dados que auxiliam a resolução, normalmente surgem nos problemas geométricos ou físicos.
- Tipo de dados (D): Nesta categoria distinguimos entre os problemas que apresentam dados numéricos e os problemas que apresentam dados genéricos.
- Dados numéricos (DN) – Problemas com dados numéricos.
 - Dados genéricos (DG) – Problemas em que se determina a solução para um qualquer valor genérico
- Tipo de enunciado (EN): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas que apresentam um enunciado simples e os problemas em que o enunciado pode encaminhar o aluno na resolução do problema.
- Enunciado simples (ENS) – Problemas em que o enunciado é simples, não havendo neste nenhum tipo de ajuda à resolução do problema.
 - Resolução encaminhada (ENE) – Problemas com notas que ajudam na resolução ou com um conjunto de questões prévias que encaminham o aluno na resolução do problema.

Segunda fase: Estabelecimento de um plano

Nesta segunda fase pretende-se encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. Foram identificadas para esta fase três categorias.

- Função/Equação auxiliar (A): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas em que a função auxiliar surge explicitamente no enunciado daqueles em que o aluno tem de identificar, a partir dos dados, qual a função auxiliar que deve usar.
- Explícita (AE) – Problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita, ou seja, casos em que, por exemplo, é dado o valor do

perímetro ou da área, levando o aluno a pensar que este será o dado que lhe permite tirar o valor de uma variável em função da outra.

- Implícita (AI) – Problemas em que, a partir dos dados fornecidos, o aluno tem de procurar encontrar a relação que lhe permite determinar o valor de uma das variáveis em função da outra. Frequentemente para problemas em que se usa a noção de distância, Teorema de Pitágoras ou semelhança de figuras.
- Noções aplicadas (N): Nesta categoria pretendemos identificar as noções que têm de ser aplicadas na resolução do problema.
- Teorema de Pitágoras (NTP) – Problemas em que se aplica o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de uma variável em função de outra.
 - Distância (ND) – Problemas em que se usa a fórmula de cálculo da distância entre dois pontos ou em que simplesmente se usa a noção de distância para determinar o valor de uma variável em função de outra.
 - Semelhança de Figuras (NSF) – Problemas em que se aplica a noção de semelhança de figuras.
 - Perímetro (NPR) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo do perímetro de uma figura.
 - Área (NA) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo da área de uma figura.
 - Volume (NV) – Problemas em que aplicamos a fórmula de cálculo do volume de uma figura.
 - Soma (NS) – Problemas em que utilizamos a noção de soma para escrever uma variável em função da outra, normalmente surge nos problemas aritméticos.
 - Produto (NP) – Problemas em que utilizamos a noção de produto para escrever uma variável em função da outra, normalmente surge nos problemas aritméticos.
 - Função (NF) – Problemas em que utilizamos a expressão algébrica de uma função para escrever uma variável em função da outra.
 - Funções Trigonométricas (NFT) – Problemas em que utilizamos as funções trigonométricas ($\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$) para relacionar duas variáveis.

- Magnitudes físicas (NMF) – Problemas em que utilizamos magnitudes físicas para determinar uma variável em função da outra, na maioria dos casos a fórmula da velocidade e apenas num caso a noção de intensidade.
- Estratégia (E): Nesta categoria pretendemos distinguir entre os problemas que surgem pela primeira vez e que, portanto, obrigam a pensar na estratégia de resolução e os problemas que, de alguma forma, têm características comuns com problemas que surgiram anteriormente e dos quais nos podemos socorrer para a resolução do nosso problema.
 - Histórico (EH) – Problemas que encontramos nos livros históricos analisados.
 - Exame (EE) – Problemas referidos como retirados de exame.
 - Manual (EM) – Problema que surgiu em manuais anteriores.
 - Novo (EN) – Problemas que encontramos pela primeira vez no manual em questão.

Terceira fase: Execução do plano

Nesta terceira fase pretende-se executar o plano, verificando cada passo. Encontramos para esta fase três categorias.

- Funções Utilizadas (f): Nesta categoria pretendemos identificar o tipo de função que teremos de optimizar.
 - Polinomial (fp)
 - Racional (fr)
 - Irracional (fir)
 - Trigonométrica (ft)
- Esquema de cálculo de extremos (e): Nesta categoria pretendemos distinguir as diferentes formas como são calculados os extremos da função.
 - Cálculo dos zeros da derivada (ez) – Problemas em que, para determinar o extremo, apenas se calculam os zeros da função derivada.

- Cálculo dos zeros da derivada e estudo do sinal da derivada (ezs) – Problemas em que se calculam os zeros da derivada e de depois se faz o estudo do sinal da função derivada para identificar máximos e mínimos.
 - Cálculo dos zeros da derivada e estudo do sinal da 2ª derivada (ezss) – Problemas em que se calculam os zeros da derivada e depois se estuda o sinal da segunda derivada nesses pontos para identificar máximos e mínimos.
 - Cálculo analítico do vértice da parábola e análise da concavidade (ev) – Problemas em que se efectua o cálculo analítico do vértice da parábola, que normalmente surge nos problemas a partir da lei de bases do sistema educativo, do 10º ano.
 - Utilização da calculadora gráfica para calcular extremos (ecg) – Problemas em que o cálculo dos extremos é efectuado a partir do esboço da função a otimizar obtido na calculadora gráfica.
 - Utilização de outro tipo de resolução (eo) – Problemas em que a resolução foi feita por outro processo e que surgiu apenas num problema com resolução Geométrica e Algébrica.
- Gráficos, figuras ou esquemas auxiliares (g): Nesta categoria pretendemos verificar se a resolução não apresenta qualquer tipo de esquema auxiliar ou se vem acompanhada de algum tipo de gráfico, esquema ou quadro auxiliar.
- Sem esquemas (gn) – Problemas cuja resolução não apresentam qualquer gráfico, esquema ou figura auxiliar.
 - Com figura (gf) – Problemas em que a resolução apresenta uma figura alusiva ao problema, normalmente acompanhada de dados.
 - Com quadro de monotonia (gqm) – Problemas cuja identificação dos máximos ou mínimos é efectuado através do quadro de monotonia
 - Com gráfico da função (gg) – Problemas em que a resolução vem acompanhada do gráfico da função. Em problemas dos últimos períodos é vulgar a resolução ser feita analítica e graficamente.

Quarta fase: Reflexão

Nesta quarta e última fase pretende-se examinar a solução obtida. Esta última fase apenas tem uma categoria que se refere ao valor pedido no enunciado.

- Valor pedido (v): Nesta categoria fazemos a distinção entre os problemas em que o valor pedido surge de forma explícita e os problemas em que o valor pedido surge de forma não Explícita e, portanto, o aluno tem de perceber o que, de facto, é pedido.
 - Explícito (ve) – Problemas em que o valor pedido é feito Explicitamente.
 - Implícito (vi) – Problemas em que o valor pedido é feito implicitamente. Por exemplo, nalgumas situações pedem as dimensões de uma determinada figura sem que se peça Explicitamente um determinado valor como, por exemplo, o valor da incógnita.

3.1. INTRODUÇÃO NOS PROGRAMAS OFICIAIS DO ESTUDO DA DERIVADA

Nesta secção vamos analisar as reformas do ensino liceal em Portugal, desde a introdução do conceito de derivada nos programas oficiais, mas nas quais ainda não se contempla o estudo das aplicações desta e, conseqüentemente, não abordam o estudo dos problemas de optimização.

A última reforma efectuada no século XIX foi a reforma de Jaime Moniz que foi regulamentada em 18 de Abril, 14 de Agosto e 14 de Setembro de 1895. Esta foi uma das reformas melhor planeadas de toda a nossa história, mas, talvez por originar muitas alterações ao sistema que estava em vigor, não foi bem sucedida, pois fez com que o número de alunos matriculados nos liceus tivesse baixado de 3658, em 1895, para 458, em 1896. Como sofreu inúmeras críticas por parte de diversos sectores da sociedade portuguesa, houve necessidade de realizar uma outra para neutralizar as deficiências desta (Carvalho, 1985, p. 644). Esta reforma não contemplava o estudo da derivada.

Assim, a 3 de Novembro de 1905 são publicados os programas relativos à primeira reforma efectuada no século XX. Era então ministro José Coelho.

Com esta o ensino nos liceus ficou dividido em dois cursos: Curso Geral com cinco classes e o Curso Complementar com duas classes. Estando este último dividido em dois cursos: Letras e Ciências.

A disciplina de Matemática estava presente nos cinco anos do Curso Geral e nos dois anos do Curso Complementar de Ciências. Tinha uma carga horária de 5 horas na primeira classe; 4 horas na segunda e terceira; 3 horas na quarta e quinta e 5 horas na sexta e sétima classe.

Terminou então o regime do livro único, podendo os professores usar qualquer compêndio que tivesse a aprovação de uma comissão nomeada pelo governo.

Esta reforma reveste-se de uma grande importância dado que é precisamente com esta que o estudo da derivada é introduzido pela primeira vez nos programas do Ensino Secundário.

Neste programa o estudo da derivada surge no último ano de escolaridade, isto é, no 7º ano (ou classe) do Curso Complementar de Ciências e é inserida no capítulo de Álgebra. Este capítulo estava estruturado da seguinte forma:

VII classe: Álgebra

Equação do 2º grau a uma incógnita: resolução e discussão. Composição da equação. Propriedades do trinómio do 2º grau. Resolução de desigualdades do 2º grau. Discussão de problemas do 2º grau. Equações biquadradas. Equações irracionais que se reduzem a equações do 1º e 2º grau.

Sistema de duas equações a duas incógnitas, uma do 1º grau e outra do 2º grau.

Função exponencial. Nova definição dos logaritmos.

Noção de derivada; sua interpretação geométrica. Derivada de uma soma, de um produto, de um quociente, de uma potencia, de uma raiz. Derivadas de funções circulares. Revisões.

Verificamos que nesta reforma apenas se pretende ensinar as regras de derivação, não se refere o estudo das aplicações da derivada.

Ao contrário da anterior reforma, onde vigorava o regime do livro único, nesta apenas se exige que os compêndios tenham prévia aprovação de uma comissão nomeada pelo governo.

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra para a 6ª e 7ª classe.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Nos finais do século XIX surge um movimento de oposição ao regime monárquico. Este movimento segue para o século XX, dando origem a 5 de Outubro de 1910 à Implantação da República.

Um dos objectivos, entre outros, deste movimento, era reformar a mentalidade portuguesa e uma das formas de o fazer seria através da instrução e da educação, falando-se mesmo em “educação republicana”. Esta era uma educação interessada na criação e consolidação de uma nova maneira de ser português, capaz de expurgar a Nação de quantos males a tinham mantido, e mantinham, arredada do progresso europeu, sem força, sem coragem, sem meios para sacudir de si a sonolência em que mergulhara (Carvalho, 1985, p. 651).

A 7 de Julho de 1913 foi criado novamente o Ministério da Instrução Pública. Este tinha sido criado pela primeira vez em 12 de Julho de 1870 pois até a essa data todos os assuntos relacionados com a instrução eram tratados no Ministério do Reino, ministério sobrecarregado com inúmeras pastas.

Implantada a República, iniciam-se as reformas educativas. Começam por reformar a instrução primária e a seguir o ensino universitário.

Assim, só sete anos após a Implantação da República surge a primeira reforma do Ensino Secundário do período republicano. Esta data de 17 de Abril de 1917 e foi levada a cabo por Pedro Martins. Tinha como objectivo "compilar, coordenar e sistematizar as posições sobre o Ensino Secundário, contidas em numerosas leis, decretos, regulamentos e portarias" (Carvalho, 1985, p. 683).

Nesta reforma manteve-se tudo o que estava em vigor da anterior, tendo-se apenas acrescentado, ao Curso Complementar de Letras, a disciplina de Ciências Físicas e Naturais e ao Curso Complementar de Ciências, a disciplina de Filosofia. Esta decisão não agradou aos pais nem aos alunos, uma vez que estes não viam necessidade de os alunos de Letras aprenderem Ciências e vice-versa.

Por esta razão gerou grande contestação. Os Liceus foram encerrados o que levou à revogação do decreto e regressou-se à reforma de 1905.

Alfredo Magalhães realizou, em 1918, uma nova reforma do sistema educativo. Nesta época Portugal estava sob um regime ditatorial, o que se reflectiu nas linhas orientadoras desta nova reforma.

As alterações que Alfredo Magalhães pretendia fazer no Ensino Secundário eram semelhantes às de Pedro Martins, mas ainda mais fortes.

Foi a 27 de Novembro de 1918 que foram publicados os programas relativos a esta reforma.

Nesta o estudo da derivada é feito na 6ª classe do Curso Complementar de Ciências, no capítulo intitulado Elementos de Cálculo Infinitesimal e não no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como se encontra organizado este capítulo:

VI Classe: Elementos de Cálculo Infinitesimal

*Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e cociente. **Derivada: importância desta noção. Derivada de uma soma, de um produto, de um cociente, de uma potência, de uma raiz, de uma função de função.***

Noção de integral (basta mostrar a existência em casos particulares).

Aplicações

(Decreto nº 5:002 do Diário de Governo nº 257 de 28 de Novembro de 1918)

Podemos assim verificar que, com a criação do capítulo dedicado ao Cálculo Infinitesimal, o estudo da derivada é mais aprofundado, introduzindo-se aplicações deste.

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise surge a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra Elementar e Elementos de Cálculo Infinitesimal, para as classes II, IV, V, VI e VII.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Também esta reforma não teve futuro uma vez que o regime ditatorial que tinha sido instaurado em 1917 pelo então Presidente da República Sidónio Pais, caiu em Dezembro de 1918 com o seu assassinato.

Só em 26 de Setembro de 1919, com a proximidade do início do ano lectivo, foi publicada a nova reforma. Esta levava a assinatura de Joaquim José de Oliveira que então era o Ministro da Instrução.

Com ela introduz algumas alterações, ao nível da carga horária, bem com ao das disciplinas que constituem cada um dos cursos.

A disciplina de Matemática faz parte do elenco de disciplinas da VI e da VII classe, tendo no primeiro uma carga horária de 3 horas semanais e no segundo de 4 horas semanais.

A derivada passa a ser estudada na VII classe do Curso de Ciências, dentro do capítulo dedicado aos Elementos de Cálculo Infinitesimal. Vejamos:

VII Classe: Elementos de Cálculo Infinitesimal

Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e cociente.

Derivada: importância desta noção. Derivada de uma soma, de um produto, de um cociente, de uma potência, de uma raiz, de uma função de função, de uma função composta e de funções implícitas. Derivadas das funções circulares.

Noção de integral.

Aplicações.

(Decreto nº 6:132 do Diário de Governo nº 196 de 26 de Setembro de 1919)

Verificamos assim que o programa da disciplina de Matemática se mantém praticamente sem alterações. A derivada continua a fazer parte do capítulo de Elementos de Cálculo Infinitesimal, leccionado na VII classe, acrescentando-se apenas o estudo da derivada de uma função composta, de funções implícitas e das funções circulares.

Mas, como já referimos, também no Curso Complementar de Letras existia a disciplina de Matemática. Esta apenas fazia parte do VI ano com uma carga horária de 3

horas semanais. Este programa não se encontra dividido por temas, como no curso de Ciências, os temas aparecem todos seguidos.

Vejamos como está composto o parágrafo que inclui o estudo da derivada:

VI Classe

*Análise dalgumas demonstrações, já feitas, para a aquisição da noção de limite (ciclometria, volume do tetraedro, etc.). **Noção de derivada**, de diferencial e de integral. Aplicações simples ao cálculo das áreas e volumes do movimento e das tangentes às curvas.*

Este estudo só em casos muito simples se fará exclusivamente pelo processo analítico, todo o restante é sugerido e garantido pela geometria.

(Decreto nº 6:132 do Diário de Governo nº 196 de 26 de Setembro de 1919)

Neste programa apenas se pretende fazer uma pequena abordagem da derivada, não sendo referido o estudo da sua aplicação.

O regulamento desta reforma apenas se publica a 12 de Junho de 1920, sendo então ministro da Instrução Vasco Borges. Este regulamento será depois mandado suspender por Rego Chaves, voltando a estar em vigor o regulamento de Sidónio Pais.

A 18 de Junho de 1921, sendo já ministro da Instrução Ginestal Machado, decreta-se uma nova reforma, que é muito semelhante à anterior, não sofrendo os programas de Matemática nenhuma alteração em relação, à anterior (1919).

Esta foi a última reforma que se realizou até ao final da 1ª República, em 1926.

A 28 de Maio de 1926 dá-se um golpe militar que põe termo à Primeira República. Devido à instabilidade governamental que se vivia no momento, este movimento foi, inicialmente, bem recebido.

Instala-se então, até 1974, um regime Ditatorial que faz uso da censura à Imprensa.

A 2 de Outubro de 1926 é assinado pelo ministro Ricardo Jorge o *Estatuto da Instrução Secundária* que veio alterar, profundamente, o esquema de ensino que vigorava até então.

A escolaridade é reduzida em um ano, passando o curso complementar a ter apenas um ano. O curso Complementar de Letras deixa de ter a disciplina de Matemática.

Como consequência do encurtamento da escolaridade, os programas também são encurtados.

O capítulo relativo ao Cálculo Infinitesimal deixa de existir e a derivada passa para o capítulo dedicado à Álgebra na 4ª classe. Quanto à derivada, apenas se refere o estudo da *Noção de derivada*.

A reforma efectuada por Ricardo Jorge, uma vez que provocou inúmeras alterações, foi alvo de numerosas reclamações. Assim, a 22 de Janeiro de 1927, sendo então ministro da Instrução Alfredo Magalhães (que já fora ministro no antigo regime), publica-se um novo decreto, mas, a nível do estudo da derivada, não produziu nenhuma alteração.

Cordeiro Ramos veio a suceder a Alfredo Magalhães na pasta da Instrução. As medidas duras e repressivas no ensino liceal sofrem um agravamento.

A 14 de Janeiro de 1929 são aprovados os programas dos Cursos Complementares, pois na anterior alteração os programas não foram alterados.

Nesta reforma apenas se aborda a *noção de derivada*, na 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como se encontra distribuindo esse capítulo:

VI Classe: Álgebra

Números algébricos e complexos.

*Noção de função; representação gráfica; noção intuitiva dos limites das funções de uma variável, de continuidade e de **derivada; interpretação geométrica.***

Polinómios inteiros; propriedades gerais e elementares.

Fracções algébricas; significação dos símbolos:

$$\frac{m}{0}, \frac{m}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty \text{ e } \infty \times \infty$$

Discussão da equação do 1º grau a uma incógnita. Análise combinatória; binómio de Newton.

(Decreto nº 16:362 do Diário de Governo nº 11 de 14 de Janeiro de 1929)

Este ministro volta a fazer uma reformulação dos programas, que foi publicada a 27 de Setembro de 1930. A derivada continua a fazer parte da 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Agora pretende fazer-se um estudo mais minucioso da derivada, introduzindo-se conteúdos que não eram abordados no anterior programa.

Vejamos como estava organizado este capítulo:

VI Classe: Álgebra

*Funções; classificação das funções; propriedades elementares das funções inteiras; principio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; aplicações. Funções fraccionárias; símbolos de impossibilidade e indeterminação. Limites de funções de uma só variável; teoremas relativos à soma, ao produto e ao cociente destes limites; exercícios sobre a determinação dos limites de funções. Função continua num ponto; função continua num intervalo; exemplos de funções continuas e representação gráfica destas funções. Função crescente num ponto e num intervalo; função decrescente num ponto e num intervalo. **Derivada e diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica da derivada; derivada da soma, do produto, do cociente, da potencia, da raiz, da função de função e da função inversa.***

Análise combinatória; arranjos, permutações e combinações. Binómio de Newton; aplicações. Resolução e discussão da equação geral do 1º grau a uma incógnita. Análise indeterminada do 1º grau.

(Decreto nº 20:369 do Diário de Governo nº 232 de 8 de Outubro de 1931)

No final do programa surge a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume, para as classes 6ª e 7ª.

Este compêndio não possui nenhum problema de optimização.

Posteriormente, Cordeiro Ramos, reforma novamente os programas, uma reforma decretada em 8 de Outubro de 1931. A derivada continua a pertencer ao programa da 6ª classe, no capítulo dedicado à Álgebra. Mas em relação à derivada, o programa não introduz nenhuma alteração.

Com Carneiro Pacheco, como Ministro da Instrução Pública, o ensino sofreu grandes alterações. A 14 de Outubro de 1936 é decretada a reforma do ensino liceal. Esta introduz grandes alterações acerca da organização curricular, deixando de existir a separação entre curso Geral e Complementar, e também terminam as opções entre Letras e Ciências. Os conteúdos programáticos são encurtados e, consequentemente, o estudo da derivada é suprimido do programa.

Posteriormente foram ministros da mesma pasta Mário Figueiredo e Caeiro Mata. Mas, uma vez que se iniciou entretanto a 2ª Guerra Mundial, não surgiram, por parte destes, reformas curriculares, tendo sido feitas apenas pequenas alterações.

Os programas das disciplinas não sofreram alterações em relação ao seu conteúdo.

Em 1945 terminou a II Grande Guerra. Esperava-se então que surgisse uma viragem na política nacional. Tal não veio a suceder, mas, pelo contrário, a repressão do Estado acentuou-se.

Seguiu-se então na pasta da Educação Pires de Lima, grande apoiante da actuação de Salazar. Por esse motivo foi um dos ministros que ocupou a pasta durante o maior período de tempo (cerca de 8 anos).

A 17 de Setembro de 1947 surge a reforma do ensino liceal. Volta-se então ao esquema de estudos alterado por Carneiro Pacheco. Assim, o Curso Geral dos Liceus volta a ter cinco anos e o Curso Complementar dois, fazendo-se de novo a separação entre Letras e Ciências. A reforma dos programas foi publicada a 22 de Outubro de 1948, que foram reduzidos e as férias foram encurtadas.

Deste modo, a derivada volta a fazer parte do programa¹⁸, passa-a para o VII ano e continua dentro do capítulo dedicado à Álgebra. O facto do conceito passar para o VII ano mereceu várias críticas uma vez que deveria surgir no VI ano, a seguir ao estudo dos infinitésimos e no ano em que o conceito é necessário para a disciplina de Física. Vejamos como ficou estruturado este capítulo:

VII Ano: Álgebra

Análise combinatória - elementos distintos e sem repetição. Binómio de Newton.

Números complexos a duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações.

Equação do 2º grau a uma incógnita, resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação biquadrada; resolução algébrica; discussão. Transformação de um radical duplo na soma algébrica de dois radicais simples.

Equações irracionais redutíveis ao 2º grau.

Trinómio do 2º grau; representação gráfica; propriedades. Inequações: noções gerais e princípios de equivalência. Inequações do 2º grau a uma incógnita; inequações fraccionárias que se resolvam por meio de inequações do 1º ou 2º grau a uma incógnita.

Problemas do 1º e 2º grau; discussão.

O problema das tangentes e o das velocidades; noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivada das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

(Decreto nº 37:112 do Diário de Governo nº 247 de 22 de Outubro de 1948)

¹⁸ Esta tinha sido excluída do programa com a reforma de Carneiro Pacheco em 1936

Aqui a derivada aparece precedida do cálculo de tangentes. Começa então a surgir a derivada, não como mais uma noção matemática, mas como uma ferramenta que se pode aplicar à resolução de problemas de tangentes e velocidades. Não se contempla ainda, posteriormente ao estudo da derivada, o estudo das aplicações desta.

No final do programa encontra-se a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em questão vem a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume.

Depois de o analisar, verificamos que o compêndio não aborda os problemas de optimização.

Verificamos, então, que foi no início do século XX que o conceito de derivada foi introduzido nos programas oficiais, ao longo da primeira metade do século foi sofrendo algumas alterações em relação ao ano em que se aborda, ao capítulo em que se insere e à quantidade de assuntos relacionados com a derivada que se abordam. No entanto, não encontramos problemas de optimização, em nenhum dos manuais escolares, relativos a cada uma das reformas desta primeira metade do século.

3.2. INTRODUÇÃO NOS MANUAIS ESCOLARES DOS PROBLEMAS DE OPTIMIZAÇÃO

Nesta secção iremos analisar as reformas curriculares, desde a introdução dos problemas de optimização nos manuais escolares até ao início das Matemáticas Modernas.

A. Análise do programa oficial

Durante a década de cinquenta o ensino liceal sofreu apenas pequenas alterações. Entre essas alterações é de referir que em 1950 se repôs novamente o livro único, medida que provocou alguma contestação, mas que apenas veio a ser alterada em 1974. Em 1952, estando ainda Pires de Lima na pasta da Educação, é lançado o Plano de Educação Popular, Cursos de Educação de Adultos e Campanha Nacional de Educação de Adultos.

Em 7 de Setembro de 1954 são aprovados os novos programas das disciplinas do Ensino Liceal. Estes tinham como objectivo simplificar o Curso Geral de forma a adequá-lo melhor à capacidade receptiva dos alunos.

Nestes novos programas, a derivada passa novamente para o 6º ano do Curso Complementar de Ciências, continuando inserida no capítulo dedicado à Álgebra. Vejamos como ficou estruturado este capítulo:

VI Ano: Álgebra

Breves noções sobre sucessivas generalizações do conceito de número; representação geométrica do sistema de números reais. Números complexos de duas unidades; forma algébrica; igualdade, desigualdade e operações. Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação gráfica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas. Aplicação ao estudo da variação das funções nos casos simples.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por $(x-a)$; polinómio identicamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas; Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma:

$$\frac{m}{0}, \frac{m}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \times \infty, \infty \times \infty;$$

verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

(Decreto nº 39807 do Diário de Governo nº 198 de 7 de Setembro de 1954)

Verificamos que, após o estudo da derivada, surge apenas a indicação do estudo de aplicações desta ao estudo da variação de funções nos casos simples.

Uma vez que vigora o regime do livro único, no final do programa vem a indicação dos livros para o ensino. Para o tema em análise aparece a seguinte referência:

Compêndio de Álgebra, num volume.

Esta é, sem dúvida uma reforma muito importante no âmbito da nossa investigação uma vez que os manuais relativos a esta reforma são os primeiros a contemplar o estudo dos problemas de optimização.

Até ao final da década não se publica mais nenhuma alteração nos programas. Durante a mesma o ensino da Matemática é marcado pelo ensino memorístico e mecanizado. (Ponte, 1987, p. 5)

A Pires de Lima sucedeu, na pasta da Educação, Pinto Leite e Manuel Lopes de Almeida. Mas, a nível dos programas oficiais, não realizaram nenhuma alteração.

B. Análise dos Manuais

Esta é sem dúvida uma reforma com grande importância já que é nesta reforma que encontramos, pela primeira vez, problemas de optimização nos manuais escolares.

Como vigora novamente o regime do Livro Único, neste período apenas temos um manual escolar para analisar. Foram publicados mais manuais escolares, mas estes não apresentavam problemas de optimização. No entanto, o Livro Único teve várias edições que foram sofrendo algumas alterações. Assim sendo, iremos analisar as quatro edições que nos pareceram representativas deste período.

Todos os exemplares deste manual estavam rubricados e autenticados pelo Ministério da Educação Nacional.

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo

Título: Compêndio de Álgebra

Ano lectivo: 6º e 7º Ano 3º Ciclo -Ensino Liceal

Ano, editora e lugar de edição: 1958, Livraria Rodrigues

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão

Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 18, 2ª Série de 22/01/1958

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo

Título: Compêndio de Álgebra, 6º e 7º Ano - 3º Ciclo -Ensino Liceal

Ano, editora e lugar de edição: 1960, Livraria Rodrigues

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão

Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 18, 2ª Série de 22/01/1958

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo

Título: Compêndio de Álgebra, 6º ano, 1º Tomo -Ensino Liceal

Ano, editora e lugar de edição: 1963, Lisboa: Bertrand (Irmãos), Lda.

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão

Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 100, 2ª Série de 24/04/1963.

Autor: José Sebastião e Silva; J. D. Silva Paulo

Título: Compêndio de Álgebra, 6º ano – 1º Tomo -Ensino Liceal

Ano, editora e lugar de edição: 1968, Braga: Livraria Cruz

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão

Observações: Aprovado como livro único pelo D. G. nº 110, 2ª Série de 08/05/1968

Caracterização e estrutura da obra: A edição do Compêndio de Álgebra de 1958 estava dividida em duas partes: uma para o sexto ano e outra para o sétimo. Os Compêndios editados a seguir já estão separados para os dois anos, um para o sexto e outro para o sétimo. Na parte dedicada ao sexto ano encontramos um capítulo dedicado à derivada. Vejamos como está estruturado este capítulo:

Derivadas:

1. Introdução

2. Conceito de derivada

3. Regras de derivação

4. Aplicações das derivadas

Exercícios

Nota histórica

Observamos que existe, da parte dos autores, uma preocupação em apresentar uma introdução que permite depois perceber melhor o conceito. Existe também uma cuidado em apresentar uma nota histórica que permite aos alunos perceber quais os matemáticos que estudaram o tema bem como as várias etapas pelas quais passou o Cálculo Diferencial.

Neste compêndio, os problemas de optimização estão no quarto ponto, dedicado às aplicações das derivadas. Neste os autores começam por explicar o sentido da variação de uma função, a partir do sinal da derivada, e a seguir apresentam a aplicação dos teoremas enunciados e por fim dois exemplos de aplicações concretas. Encontramos dois problemas de optimização enunciados como exemplos de aplicação concreta do sentido da variação de uma função, seguidos da respectiva resolução. Existem depois no final do capítulo mais sete problemas de optimização, na parte dedicada aos exercícios de aplicação, as respectivas respostas surgem no final do enunciado de todos os exercícios.

Para além deste manual escolar, vamos ainda fazer a análise um livro de exercícios da autoria de António do Nascimento Palma Fernandes. Foi assistente na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e, posteriormente, professor do Liceu Pedro Nunes, sendo autor de vários livros de texto e livros de exercícios. A obra que analisamos teve várias edições. A última que encontramos era a décima sétima edição que foi publicada em 1971 ou 1972. Vejamos, então, a ficha da obra:

Autor: António do Nascimento Palma Fernandes

Título: Exercícios de Álgebra, Trigonometria e Aritmética Racional – 6º ano dos Liceus

Ano, editora e lugar de edição: 1961, Livraria Didáctica, Lisboa, 12ª edição

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Caracterização e estrutura da obra: A obra está dividida em três partes, a primeira dedicada à Álgebra, a segunda dedicada à Trigonometria e a última à Aritmética Racional. A parte dedicada à Álgebra está dividida em sete capítulos, sendo o quinto

consagrado às derivadas e ao estudo da variação das funções. Nesse capítulo o autor começa por apresentar oito exemplos resolvidos, sendo o último um problema de optimização. Depois apresenta cinquenta e um exercícios seguidos das respostas. Os exercícios estão separados por três temas:

- *Derivadas* (38 exercícios)
- *Estudo da variação de funções* (5 exercícios)
- *Problemas de máximos e mínimos* (8 exercícios)

Todos os problemas de máximos e mínimos são problemas de optimização.

Seguem-se os problemas de optimização que encontramos nestas obras para cada um dos contextos.

Problemas de Geometria Métrica

SP1. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.230)

PF5. *Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 m, determinar os que tenham área máxima.* (Fernandes, 1961, p. 63)

SP3. *Exprimir a área, A , dum rectângulo, como função de um dos lados, x , supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo $[0, 10]$. Determinar, graficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

PF1. *Dentre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima.* (Fernandes, 1961, p. 61))

SP6. *Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r . Exprimir a área, A , do rectângulo, como função da base, x . Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.* (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

PF4. *Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo?* (Fernandes, 1961, p. 63)

PF6. Dentre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Fernandes, 1961, p. 63)

PF7. Dentre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3 , qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)

PF8. Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo. (Fernandes, 1961, p. 63)

PF9. A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado. (Fernandes, 1961, p. 63)

Problemas de Aritmética

SP4. A soma de dois números x e y , é uma constante a . Quando é máximo o seu produto ($P = xy$)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

SP5. O produto de dois números positivos, x e y , é uma constante k . Quando mínima a sua soma ($S = x + y$)? (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)

PF2. Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)

PF3. Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo. (Fernandes, 1961, p. 63)

Problemas de Medida em Contexto Real

SP2. Pretende-se construir uma caldeira cilíndrica, fechada, com um dado volume V , de modo que a sua área total seja mínima. Determinar o raio da base, r , e a altura, h , da caldeira em tais condições. (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.231)

SP7. *Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v , fixa, tem base quadrada. Exprimir a área total da caixa como função do lado, x , da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima. (Silva e Paulo, 1958, 1960, 1963, 1968, p.236)*

SP8. *Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo? (Silva e Paulo, 1963, 1968 p.253)*

SP9. *Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico de volume V . Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície. (Silva e Paulo, 1963, 1968, p.253)*

C. Análise do período

Examinando o programa oficial relativo a esta reforma verificamos que o ano em que poderemos encontrar os problemas de optimização será no sexto, uma vez que é o ano em que se introduz o estudo da derivada. Esta encontra-se no capítulo de dedicado à Álgebra, precedida do estudo dos limites e da continuidade. O programa não refere especificamente o estudo dos problemas de optimização mas, após o estudo da derivada, refere-se a aplicação desta ao estudo da variação de funções em casos simples.

E como neste período vigora o regime do Livro Único, apenas efectuámos a análise dos Compêndios de Álgebra da autoria de Sebastião e Silva e de Silva Paulo editados ao longo de vários anos. Analisamos também um livro de exercícios da autoria de Palma Fernandes visto que este também foi editado ao longo de vários anos. Em ambas as obras é referido o estudo das aplicações das derivadas ou de problemas de máximos e mínimos.

No manual de Silva e Paulo **(SP)** há nove problemas de optimização: dois são apresentados como exemplos (SP1, SP2) e sete como exercícios de aplicação. No manual de Palma Fernandes **(PF)** existem nove problemas de optimização: um surge como exemplo (PF1) e os restantes como exercícios.

Observemos agora as características dos problemas deste período.

Começando por examinar as características que se prendem com a compreensão do problema, verificamos então que, dos dezoito problemas encontrados, apenas quatro apresentavam a respectiva resolução (SP1, PF5, PF1 e SP2). O problema PF9 é uma demonstração e os restantes problemas surgem como exercícios de aplicação. Nenhum dos enunciados vem acompanhado de gráficos, figuras ou esquemas auxiliares e, em relação aos problemas que apresentavam resolução, também estes não contêm qualquer tipo de figura, gráfico ou esquema auxiliar.

Identificamos, essencialmente, problemas geométricos, dez problemas de geometria métrica (SP1, PF5, SP3, PF1, SP6, PF4, PF6, PF7, PF8 e PF9) e quatro problemas em contexto real de medida (SP2, SP7, SP8 e SP9). Os restantes quatro problemas são problemas aritméticos. Assim sendo, neste período não assinalamos nenhum problema de Geometria Analítica, Física ou de Economia.

Os problemas de Geometria Métrica são do tipo:

" (PF1) Dentre os triângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima"

Observemos agora um exemplo de um problema de Aritmética:

" (PF3) Dois números têm por soma 20, determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo".

Relativamente aos problemas de medida em contexto real, temos o exemplo seguinte:

" (SP9) Pretende-se construir um gasómetro cilíndrico de volume V. Determinar a relação que deve existir entre o raio da base e a altura para que o custo da chapa metálica empregada na construção da superfície lateral e da base seja mínimo. Supõe-se que se emprega chapa da mesma espessura e da mesma qualidade em toda a superfície."

Estes três tipos de problemas estão presentes em quase todos os manuais analisados para as reformas posteriores.

Em relação à função a otimizar vimos que, nos catorze problemas geométricos, em onze pretende-se otimizar uma área: No problema SP1 e PF5 otimiza-se a área de um triângulo rectângulo dada a medida da hipotenusa, no problema SP3 e PF1 pretende-se otimizar a área de um rectângulo dada a medida do perímetro, no problema SP6 também se otimiza a área de um rectângulo, mas neste caso é ligeiramente mais complexo visto que o rectângulo está inscrito numa circunferência, de tal modo que será

necessário determinar o seu comprimento e largura em função do raio da circunferência; no problema SP6 pretende-se determinar a área máxima de um sector circular, dado o perímetro; e no problema PF9 pretende-se otimizar a soma das áreas de um círculo e de um quadrado, dada a soma dos seus perímetros. Os restantes problemas em que se pretende otimizar uma área são de geometria espacial, sendo que no problema PF7 pretende-se determinar a área total mínima de um prisma quadrangular dado o volume, nos problemas SP2 e SP9 pretende-se otimizar a área de um cilindro dado o volume e no problema SP7 pretende-se otimizar a área de um paralelepípedo dado o volume.

Nos problemas PF8 e SP8 têm como objectivo otimizar o volume: sendo que no primeiro otimiza-se o volume de um cilindro de revolução inscrito numa esfera dado o raio desta e no segundo otimiza-se o volume de uma caixa dadas as dimensões da folha a utilizar para a construir. Apenas no problema PF4 se otimiza o perímetro de um rectângulo dada a sua área. Quanto aos problemas aritméticos, verificamos que em metade se pretende otimizar a soma de dois números (SP5, PF2), no primeiro pretende otimizar-se a soma de dois números dado o seu produto e no segunda pretende-se otimizar a soma dos seus quadrados dada a sua soma. Na outra metade (SP4 e PF3) pretende-se otimizar o produto de dois números dado a sua soma.

Nenhum problema tem figuras ou esquemas auxiliares. Quanto aos dados fornecidos no enunciado do problema, verificamos que a maioria dos problemas apresenta dados numéricos e apenas sete problemas dados genéricos (SP6, PF9, SP4, SP5, SP2, SP7 e SP9). Nos dois exemplos a seguir, o primeiro apresenta dados numéricos e o segundo dados genéricos:

“ (PF8) Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo.”

“ (SP7) Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v , fixa, tem base quadrada. Expressar a área total da caixa como função do lado, x , da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.”

Também o enunciado é na maioria dos problemas um enunciado simples e apenas quatro dos problemas encontrados apresentam um enunciado que orienta/encaminha na resolução do problema (SP3, SP6, SP7 e SP8). Vejamos:

“ (SP3) Expressar a área, A , dum rectângulo, como função de um dos lados, x , supondo o perímetro igual a 20. Desenhar o gráfico da função no intervalo $[0, 10]$. Determinar, graficamente e analiticamente, o valor de x que torna a área máxima.

Observamos que, neste exercício, o aluno sabe que terá de começar por determinar a área do rectângulo em função de um dos lados e que a seguir irá desenhar

o gráfico da função. Estas duas questões tornam-se extremamente úteis uma vez que, quando se pede para otimizar a área, o aluno já terá quase todo o trabalho realizado.

“ (SP6) Um rectângulo está inscrito num semicírculo de raio fixo, r . Expressar a área, A , do rectângulo, como função da base, x . Determinar o valor de x para o qual a área é máxima.”

Vemos que, neste exercício, o autor começa por pedir para exprimir a área do rectângulo em função da base e só depois pede para determinar o valor de x para o qual a área é máxima.

“ (SP7) Uma caixa rectangular, sem tampa, de capacidade v , fixa, tem base quadrada. Expressar a área total da caixa como função do lado, x , da base. Achar o valor de x para o qual a área é mínima.”

Também neste exercício o autor começa por pedir para exprimir a área total da caixa como função do lado da base e só depois pede para determinar o valor de x para o qual a área é mínima.

“ (SP8) Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?”

Neste problema o autor começa por pedir para determinar o volume em função do lado do quadrado que se cortou nos quatro cantos da folha e só depois pede para determinar o valor do lado desse quadrado de forma que o volume seja máximo.

Passando agora para as características relativas ao estabelecimento de um plano observamos que, relativamente à função auxiliar que permite relacionar as variáveis, na maioria dos problemas é uma função que surge explicitamente, estando implícita apenas em seis problemas (SP1, PF5, PF1, SP6, PF8 e SP8). Vejamos um exemplo para cada uma das situações:

“ (PF4) Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 qual é aquele que tem o perímetro mínimo?”

“ (SP8) Numa folha rectangular de zinco, com dimensões de 30 cm por 40 cm, cortam-se, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, dobrando-se em seguida a folha de modo a obter uma caixa aberta na parte superior. Determinar o volume da caixa como função do lado do quadrado que se cortou em cada canto. Qual deve ser a medida do lado do quadrado para que a caixa tenha volume máximo?”

Analisando estes dois problemas verificamos que, na primeira situação é fornecido o valor da área e pede-se para otimizar o perímetro. Assim sendo, é fácil para o aluno

verificar que a função auxiliar será determinada a partir do valor da área. Em contrapartida, na segunda situação, para determinar o volume o aluno terá de determinar o comprimento, a largura e a altura da caixa, uma vez que apenas é fornecida a medida dos lados da folha e o facto de serem retirados quatro quadrados dos cantos, o aluno terá de utilizar a noção de distância para verificar que o comprimento/largura da caixa será a diferença entre o comprimento/largura da folha e o comprimento/largura dos dois cantos, e a altura da caixa será a medida do lado do quadrado a retirar dos cantos.

As noções aplicadas na resolução dos problemas são, para os problemas geométricos, a noção de distância, o Teorema de Pitágoras e as fórmulas de cálculo do perímetro, da área e do volume. A noção de distância é utilizada no problema SP8 em que é fornecida a medida dos lados de uma folha rectangular e a partir daí tem de se determinar a medida do comprimento, da largura e da altura da caixa formada depois de cortar quatro quadrados dos cantos com a mesma medida. O Teorema de Pitágoras aplica-se na resolução dos problemas SP1, PF5, SP6 e PF8: Nos dois primeiros é dada a hipotenusa de um triângulo rectângulo e pretendemos escrever a medida de um dos catetos em função do outro cateto, no terceiro problema temos de determinar a base e a altura de um rectângulo inscrito num semicírculo a partir do raio e no último pretendemos determinar o raio da base e a altura de um cilindro inscrito numa esfera, dado o raio desta. Relativamente aos quatro problemas em que se utiliza a fórmula de cálculo do perímetro (SP3, PF1, PF6 e PF9), nos dois primeiros é dado o perímetro do rectângulo, no terceiro o perímetro de um sector circular e no último a soma do perímetro de uma circunferência e um quadrado. Quanto ao problema em que se utiliza a fórmula de cálculo da área (PF4) aplica-se a fórmula de cálculo da área de um rectângulo para determinar a medida do comprimento em função da medida da largura. Quanto aos quatro problemas em que utilizamos a fórmula de cálculo do volume (PF7, SP2, SP7 e SP9), no primeiro é dado o volume de um prisma quadrangular regular que se utilizará para determinar a medida da altura em função da medida do lado da base, no segundo e no último o volume de um cilindro para determinar a medida da altura em função da medida do raio da base, no terceiro é dado o volume de uma caixa rectangular de base quadrada que tem de ser utilizada para determinar a medida da altura da caixa em função do lado da base. Para os problemas aritméticos usou-se a soma e o produto. No problema SP5 é dado o produto de dois números que será utilizado para determinar um dos números em função do outro e nos restantes três problemas (SP4, PF2 e PF3) é dada a

soma de dois números que será utilizada para determinar um dos valores em função do outro.

Consideremos o exemplo de um problema em que utilizamos o Teorema de Pitágoras e um problema aritmético em que se utiliza o produto:

“ **(SP1)** Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima.”

“ **(SP5)** O produto de dois números positivos, x e y , é uma constante k . Quando mínima a sua soma ($S = x + y$)?”

Para delinear a estratégia de resolução dos problemas, verificamos que onze problemas surgem pela primeira vez neste período, quatro já tinham surgido nas obras históricas (PF1, PF7, SP3, SP4) e três foram retirados do enunciado de exames (SP1, PF5, SP2).

Passemos agora às características que se prendem com a execução do plano. Começando pelo tipo de funções utilizadas para otimizar, vimos que apenas surgem três tipos de funções. Na maioria dos problemas surge para otimizar uma função polinomial, em cinco problemas aparece uma função racional (PF4, PF7, SP2, SP7 e SP9) e apenas em três problemas uma função irracional (SP1, PF5 e SP6). Nos problemas em que surge uma função racional, esta surge porque se utilizou a fórmula de cálculo da área ou do volume para determinar o valor de uma variável em função da outra variável, Quanto aos três problemas em que se chega a uma função irracional, esta surge uma vez que se aplicou o Teorema de Pitágoras para determinar o valor de uma das variáveis em função da outra variável.

Quanto ao esquema utilizado para o cálculo de máximos e mínimos, nos problemas que apresentam resolução, notamos que os autores começam por calcular a derivada da função a otimizar, depois calculam os zeros da derivada e, por fim, estudam o sinal da derivada, concluindo a seguir se o ponto é um máximo ou um mínimo. Vejamos o exemplo de resolução de um dos problemas:

“ **(SP1)** Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 cm, determinar os que tenham área máxima.”

Resolução:

1. Equacionar os dados do problema e determinar a equação que se pretende otimizar em função de uma só variável

Representamos por x e y as medidas dos catetos de um tal triângulo, a sua área, S , será: $S = xy/2$. Mas tem-se $x^2 + y^2 = 36$, donde $y = \sqrt{36 - x^2}$. Podemos pois exprimir S como função só de x :

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{36-x^2}$$

2. Derivar a equação

Ora a derivada de S em relação a x é:

$$S' = \frac{1}{2}\sqrt{36-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{36-x^2}} = \frac{18-x^2}{\sqrt{36-x^2}}$$

3. Estudar o sinal da derivada e relacionar o sinal da derivada com a monotonia da função

Como o denominador da última fracção é sempre positivo, o sinal de S' será o de $18-x^2$. Tem-se pois $S' > 0$, $S' < 0$ ou $S' = 0$, conforme for

$$18-x^2 > 0, 18-x^2 < 0 \text{ ou } 18-x^2 = 0,$$

Isto é, conforme $x < \sqrt{18}$, $x > \sqrt{18}$ ou $x = \sqrt{18}$. Logo, a função S de x (com $x > 0$) será crescente para $x \leq \sqrt{18}$ e decrescente para $x \geq \sqrt{18}$;

4. Conclusão e resposta ao problema

É portanto máxima para

$$x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \text{ sendo então } y = \sqrt{36-x^2} = 3\sqrt{2}$$

-em conclusão: os triângulos de área máxima, entre aqueles considerados, são isósceles.

Para terminar, em relação à reflexão, observamos que o valor pedido é explícito em onze problemas, ou seja, o autor indica claramente o valor que pretende. O valor pedido é implícito nos restantes sete problemas, ou seja, nestes o autor não indica explicitamente o valor que pretende. Consideremos um exemplo de cada uma das situações:

“ (PF6) Dentre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Fernandes, 1961, p. 63)”

“ (PF7) Dentre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m^3 , qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1961, p. 63)”

No primeiro problema é pedido explicitamente o valor do raio enquanto que no segundo problema é pedido o prisma quadrangular regular com área total mínima, não se especificando qual a medida que se pretende, subentende-se que se pretende a medida do lado da base e a medida da altura.

Assim sendo, verificamos que este período é caracterizado por problemas em que não surge qualquer esquema, figura ou gráfico como auxiliar da interpretação do problema ou para ajudar na resolução. Não aparecem problemas de Geometria Analítica, de Física ou Economia e também não surgem problemas para apresentar um relatório.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.3. INTRODUÇÃO DAS MATEMÁTICAS MODERNAS

A introdução das Matemáticas Modernas em Portugal, nos anos sessenta, foi vista como uma "Revolução no ensino". Era desta forma que era referida pelos meios de comunicação.

Esta revolução surge na sequência do que se vinha fazendo nos outros países, em muitas situações, por indicação de organismos internacionais. Em 1959 a Organização Europeia de Cooperação Económica (OECE) promoveu uma reunião de duas semanas em Royamont, França, com o tema "As novas matemáticas". Foi discutida então a necessidade de uma apresentação moderna da Matemática no Ensino Secundário.

Uma das conclusões mais importantes desta reunião foi a necessidade de modernizar o ensino da matemática. Para essa modernização era indispensável que cada país redigisse novos compêndios e os submetesse a ensaios sistemáticos.

José Sebastião e Silva (1914-1972) ocupou uma posição de destaque na introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. Era licenciado em Ciências Matemáticas pela Faculdade de Ciências de Lisboa na qual continuou depois como assistente, e, mais tarde, em 1960, foi nomeado professor catedrático, leccionando as disciplinas de Análise Superior e de História do Pensamento Matemático.

Foi também professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia, e atendendo aos seus méritos, fora convidado por inúmeras e conceituadas universidades para realizar cursos e conferências acerca dos seus trabalhos de investigação.

Integrou o Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, onde publicou um vasto número de artigos de grande valor científico, reconhecidos a nível internacional. Assumiu posteriormente a sua direcção dando-lhe uma nova dinâmica.

Para além da rica carreira científica, assumiu também um papel fundamental na introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. Presidiu à Comissão de estudos para a modernização do Ensino Liceal, nomeada pelo então ministro Galvão Teles. Publicou manuais e guias de utilização dos compêndios para alunos e professores e ministrou igualmente cursos de preparação ou de actualização para os professores dos liceus.

3.3.1. A REFORMA DE SEBASTIÃO E SILVA (1963)

Desde 4 de Dezembro de 1962, a pasta da educação é ocupada por Inocêncio Galvão Teles. A ele se deve o primeiro passo institucional para a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal.

A. Análise do programa oficial

Dado o estado de degradação em que o ensino da Matemática se encontrava nesse momento, imperando um método de ensino desactualizado e incorrecto, foi nomeada uma comissão¹⁹, em Julho de 1963, com o objectivo de realizar estudos e experiências sobre a actualização dos programas da disciplina de Matemática do 3º ciclo de Ciências do Ensino Liceal, tendo em conta as alterações que os programas de Matemática vinham a sofrer a nível internacional. Essa comissão era formada por quatro membros: José Sebastião e Silva (Presidente), Jaime Furtado Leote, Manuel Augusto da Silva e António Augusto Lopes.

Foram então criadas turmas piloto de Matemática Moderna, para o 6º e 7º ano do Liceu. Foi também nomeada uma comissão de eminentes professores de Matemática das universidades, das escolas secundárias e das instituições encarregadas de formar professores do Ensino Secundário. Esta comissão apresentou depois um relatório dos seus trabalhos contendo sugestões importantes.

Assim, o Ensino Secundário (com 6 anos) foi dividido em dois ciclos de três anos cada um. Os programas foram adaptados aos métodos tradicionais dos países que empreenderam a modernização dos seus programas. Considerou-se ainda que o ensino elementar das matemáticas não se devia procurar a abstracção, mas sim partir de bases concretas (Diário Popular, 06/03/1963).

Para além dos compêndios e guias para professores e alunos, era também necessário realizar cursos de preparação ou de actualização. Por isso, no ano lectivo de 58/59 Sebastião e Silva realizou no liceu Pedro Nunes uma série de palestras intituladas "Introdução à Lógica Simbólica e os Fundamentos de Matemática". Posteriormente, no ano lectivo 62/63, também a pedido dos professores, orientou um curso de "Introdução à

¹⁹ Comissão de estudos para a modernização do Ensino Liceal

Matemática Moderna", na Faculdade de Ciências de Lisboa. Estes cursos tiveram uma forte adesão por parte dos professores. No ano seguinte foi ministrado novamente o mesmo curso, promovido pelo Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, que igualmente teve uma forte adesão dos professores.

Entre 1963 e 1966, Sebastião e Silva dedicou-se à escrita dos manuais (texto - piloto) e guias. Estes eram uma preciosa ajuda para a preparação das aulas dos professores. Os textos foram divididos em 3 volumes. Um para o 6º ano, e dois para o 7º ano. Cada um destes vinha acompanhado de um guia com algumas recomendações e orientações metodológicas.

Os programas sofreram uma alteração significativa. Foram introduzidos novos temas: Lógica, Teoria de Conjuntos, Álgebra, Cálculo Integral, Probabilidades, Estatística e Cálculo Numérico Aproximado. A Aritmética Racional foi suprimida do programa e todos os outros temas se mantiveram inalterados.

Assim, após realizadas as experiências nas turmas – piloto, procedeu-se, em 1967, à introdução em todos os liceus dos programas das Matemáticas Modernas. Em 1968 foram publicados os do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário (Portaria nº23:601 do Diário de Governo nº 213, 1ª série, 2º suplemento de 9 de Setembro de 1968).

Nesses novos programas volta a ser criado um capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial e o estudo da Derivada volta novamente para o 7º ano. Veja-se como ficou estruturado este capítulo.

Índice dos compêndios de Matemática do Ensino Complementar de Sebastião e Silva 1963/64

Volume II (7º Ano)

Capítulo I. Introdução ao cálculo diferencial

- 1. Cálculo numérico aproximado*
- 2. Teoria dos limites de sucessões*
- 3. Limites de funções de variável real*
- 4. Derivadas*
 - Conceitos fundamentais e regras de derivação*
 - Conceito de diferencial*
 - Regras de diferenciação*
 - O conceito de diferencial nas ciências da natureza*
 - Derivadas das funções exponencial e logarítmica*
 - Derivada da função logarítmica*
 - Derivadas das funções circulares*
 - Máximos e mínimos: concavidade e inflexões*

- *Teorema de Cauchy*
- *Método da tangente (ou de Newton)*
- *Método da corda (ou regra da falsa posição)*
- *Interpolação por diferenças finitas*

Verificamos que o estudo da derivada é agora mais aprofundado do que anteriormente, referindo-se, pela primeira vez, o estudo dos máximos e mínimos.

Posteriormente a Galvão Teles, entre 19 de Agosto de 1968 e 15 de Janeiro de 1970, a pasta da Educação foi ocupada por José Hermano Saraiva. Este não fez nenhuma alteração a nível dos programas oficiais, concretamente no programa da disciplina de Matemática.

B. Análise dos Manuais Escolares

Uma vez que Sebastião e Silva dirigia a experiência de modernização do ensino da Matemática em Portugal, foi ele o autor dos textos-piloto, bem como dos guias de utilização dos mesmos textos utilizados pelos professores e pelos alunos nas turmas envolvidas nesta experiência. Sendo assim, iremos apenas analisar, nesta parte, este texto piloto.

Autor: J. Sebastião e Silva

Título: *Compêndio de Matemática, 7º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1965, Lisboa: G.E.P.A.E.

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

O referido texto foi dactilografado pelo autor e foi editado pelo Ministério da Educação Nacional com a cooperação da O.C.D.E., de acordo com o 2º Projecto Especial STP-4/SP/Portugal.

Posteriormente, em 1976, após o falecimento do autor, estes textos-piloto foram publicados pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica.

Na obra, Sebastião e Silva não apresenta nenhum problema de optimização, mas no ponto denominado “Máximos e mínimos: concavidade e inflexões” refere o seguinte:

Sobre estes assuntos seguir o Compêndio de Álgebra. Como já foi observado atrás, convirá até começar a tratá-los imediatamente após terem sido dadas as primeiras regras da derivação (antes do conceito de diferencial), para que o aluno tome contacto, o mais cedo possível, com as aplicações concretas do estudo das derivadas.

Concluimos então, que apesar de este compêndio não apresentar nenhum problema de optimização, o autor refere que se faça o estudo dos problemas apresentados no Compêndio de Álgebra. As várias edições desta obra foram analisadas no sub-capítulo 3.2.

Observamos ainda, neste parágrafo, a preocupação do autor em apresentar para o tema das Derivadas, o mais cedo possível, as aplicações concretas para que os alunos tenham noção da aplicabilidade do tema em estudo.

3.3.2. A REFORMA DE VEIGA SIMÃO (1973)

A partir de 15 de Janeiro de 1970, a pasta da Educação foi ocupada por José Veiga Simão. Cerca de um ano depois de ter tomado posse apresenta dois documentos com vista a reformar o ensino. O Projecto do Sistema Escolar e as Linhas Gerais da Reforma do Ensino Superior. Promulgou ainda a Lei Orgânica do Ministério da Educação onde foi criada, entre outras, a Direcção do Ensino Secundário.

A. Análise do programa oficial

Após muita discussão e debate na Assembleia Nacional, A *Lei de Bases do Sistema Educativo*, foi publicada a 25 de Julho de 1973. No entanto, esta não chegou a ser implementada, uma vez que a 25 de Abril, de 1974, se deu a Revolução de Abril, que derrubou a ditadura.

Em Outubro de 1973 a escolaridade obrigatória é alargada para oito anos.

Os programas da disciplina de Matemática sofrem uma alteração em Junho de 1973. Nesta data a Direcção do Ensino Secundário publica o novo programa para o Curso Complementar dos liceus. Neste, é clara a influência do já falecido Sebastião e Silva uma vez que diz ainda respeito às Matemáticas Modernas.

Deste modo, o tema em estudo continua a fazer parte do 5º ano (antigo 7º ano), inserido no capítulo dedicado à Análise Infinitesimal. Observe-se como se encontra estruturado o programa de Matemática do 5º ano:

Programas de Matemática do Curso Complementar para o ano lectivo de 1974/75

5º Ano

2. Introdução à análise infinitesimal

2.1. Limites de sucessões

2.2. Limites de funções reais de variável real

2.3. Funções contínuas

2.4. Derivadas e primitivas.

Derivada de uma função num ponto; significado geométrico. Derivabilidade e continuidade. Função derivada. Interpretação cinemática do conceito de derivada. Regras de derivação. Derivada da função inversa e da função composta. Aplicações das derivadas: sentido da variação de uma função, concavidades, gráficos e

problemas concretos. O problema da primitivação. Primitivação imediata e primitivação por decomposição. Aplicações simples do cálculo de primitivas.

(DGES, Diário de Governo nº 149, Iª série de 27 de Junho de 1973)

Como facilmente se infere, é possível verificar que o programa não refere explicitamente o estudo de problemas de optimização, mas refere o estudo das aplicações das derivadas a problemas concretos.

Foram também publicados os programas da Matemática Clássica para o 1º ano do Curso Complementar – antigo 6º ano, uma vez que, apesar de o ensino das Matemáticas Modernas já estar generalizado, ainda havia turmas onde se leccionavam estas matemáticas. Este programa é uma redução do programa anterior.

Curso Complementar – Matemática Clássica

Esquema Programático – 1º ano

2.7. As funções de variável natural. Limites de Sucessões

Limites de funções de variável real: continuidade

Derivadas: definição de derivada de uma função num ponto e sua interpretação geométrica.

Derivabilidade e continuidade (Com demonstração).

A função derivada. Regras de derivação, incluindo a derivada da raiz. Dedução nos casos da soma, produto, potência e derivada da função inversa.

Aplicação a problemas de máximos e mínimos e representação gráfica de funções.

(DGES, Diário de Governo nº 149, Iª série de 27 de Junho de 1973)

Pelo que se conclui, então, que a derivada é abordada no final do primeiro ano. O programa considera que se faça o estudo da aplicação da derivada a problemas de máximos e mínimos. Não se refere ainda a abordagem dos problemas de optimização.

B. Análise dos Manuais Escolares

Apesar de, em 1973, já estar em vigor, em todos os liceus, o programa da Matemática Moderna, existiam ainda turmas onde se leccionava a Matemática Clássica. Por isso, ainda encontramos uma edição de um manual de 1973, da autoria de Ondina

Vasconcelos, com o programa da Matemática Clássica, manual que iremos analisar nesta secção.

Em relação às Matemáticas Modernas, seleccionámos um manual da autoria de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo e dois livros de exercícios: um da autoria de Fernando Borja Santos e o outro da autoria de Loureiro de Amorim.

Seguem-se as fichas de cada uma das quatro obras:

Autor: Ondina Vasconcelos

Título: Compêndio de Matemática, 1º CC (Antigo 6º) Matemática Clássica

Ano, editora e lugar de edição: 1973, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Universidade de Trás-os-Montes

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra é constituída por dezassete capítulos, sendo o último dedicado às derivadas. O Capítulo que se refere às derivadas está estruturado da seguinte forma:

1. *Derivada de uma curva num ponto. Conceito de tangente*

2. *Conceito de derivada*

3. *Regras de derivação*

4. Aplicações das derivadas

Encontramos os problemas de optimização no quarto ponto, dedicado às aplicações das derivadas. Este ponto começa por abordar o sentido da variação de uma função, apresentando depois a aplicação dos teoremas relativos ao sentido da variação de uma função, a seguir as concavidades e inflexões, e, por fim, as aplicações concretas, onde se encontram os problemas de optimização.

Autor: Fernando Borja Santos

Título: Sebenta de Matemáticas Modernas – 5º Ano C.C. – Vol. I

Ano, editora e lugar de edição: 1974

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Secundária José Falcão.

Caracterização e estrutura da obra: Fernando Borja Santos era Licenciado em Ciências Matemáticas. A obra tem 398 páginas e está escrita à máquina.

Esta obra era essencialmente um livro de exercícios já que contém 500 exercícios resolvidos e explicados. Para cada um dos temas o autor começa por apresentar uma explicação teórica e posteriormente apresenta os exercícios respectivos.

A parte dedicada ao crescimento e concavidades está estruturada da seguinte forma:

- *Variação duma função; Máximo relativo; Mínimo relativo; Determinação dos pontos de máximo e mínimo; Exercícios*
- **Problemas de máximos e mínimos; Exercícios**
- *Derivadas de ordem superior; Concavidade e inflexão; Exercícios*
- *Tangentes nos pontos de inflexão; Exercícios*
- *Assintotas; Exercícios*

Autor: Madalena Garcia; Alfredo Osório; António Ruivo

Título: *Compêndio de Matemática – 2º Ano C. C. V1*

Ano, editora e lugar de edição: 1975, Empresa Literária Fluminense

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Observações: D.L. nº 47 587 de 10/3/1967 (Experiências Pedagógicas)

Caracterização e estrutura da obra: Este manual tem 174 páginas, tem capa rija com a imagem de um referencial e algumas definições em linguagem matemática.

Os autores referem no prefácio o seguinte:

“Este compêndio de Matemática para o segundo ano do Curso Complementar dos Liceus foi elaborado, na linha de rumo do Compêndio do primeiro ano, tomando como base os textos para os programas experimentais da autoria do Professor Doutor Sebastião e Silva.”

Observamos então que a influência dos textos do Professor Sebastião e Silva é marcante na elaboração destes manuais.

O capítulo dedicado às derivadas está estruturado da seguinte forma

- Derivada de uma função num ponto: significado geométrico
- Derivabilidade e continuidade
- Função derivada
- Regras de derivação
- Derivada de uma função inversa
- Derivada de uma função composta
- **Aplicações das derivadas**

Os problemas de otimização encontram-se na parte dedicada às aplicações da derivada.

Nesta parte, os autores começam por explicar o estudo da variação de uma função. A seguir explicam o estudo das concavidades de uma função e por fim mostram problemas concretos, entre os quais estão alguns problemas de otimização.

Os mesmos autores também publicaram um manual na reforma que se segue mas, em relação aos problemas de otimização, não é feita nenhuma alteração.

Autor: J. A. Loureiro de Amorim

Título: *Exercícios de Matemática – 2º Ano CC.*

Ano, editora e lugar de edição: 1977

Localização da obra consultada: Didáctica Editora

Caracterização e estrutura da obra: Uma vez que esta obra é um livro de exercícios, começa por apresentar uma síntese da parte teórica seguida de exercícios resolvidos e depois exercícios para resolver.

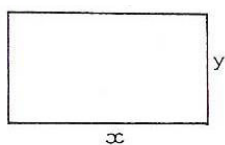
O capítulo dedicado às derivadas está estruturado da seguinte forma:

- Definição
- Regras de derivação
- Aplicações das derivadas
- Crescimento de uma função
- Máximos e mínimos
- Concavidades
- **Aplicações concretas**

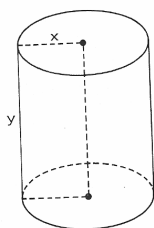
Os problemas de optimização encontram-se no ponto dedicado às aplicações concretas.

Passemos agora à análise dos problemas de optimização encontrados nestas obras.

Problemas de Geometria Métrica

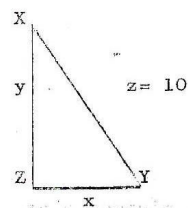


OV1. A medida da área de um rectângulo é A e o perímetro é 18. Determinar a medida de cada uma das dimensões do rectângulo de área máxima. (Vasconcelos, 1973, p. 404)



OV4. O perímetro de um rectângulo é $2p$. Determine as medidas das suas dimensões, de modo que seja, máximo o volume do cilindro por ele gerado, ao efectuar uma rotação completa em torno de um dos lados. (Vasconcelos, 1973, p. 408)

BS1. Determinar o triângulo rectângulo de área máxima e cuja hipotenusa seja igual a 10 metros. (Santos, 1974, p. 368)

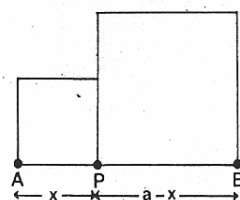
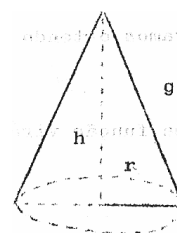


BS2. Dentre os cilindros de volume igual a 16π , determine os que têm área total mínima. (Santos, 1974, p. 370)

BS4. Dentre os rectângulos de perímetro igual a 16, qual o que tem área máxima? (Santos, 1974, p. 371)

BS5. Dentre os rectângulos de área igual a S , qual o que tem perímetro mínimo? (Santos, 1974, p. 372)

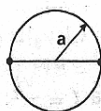
BS6. Determine a altura que deve ter um cone de revolução cuja geratriz mede 9 cm, para que o seu volume seja máximo? (Santos, 1974, p. 373)



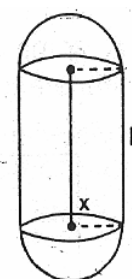
GOR2. Determinar num segmento $[AB]$

de comprimento a (fixo), um ponto P de modo que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 153)

GOR3. Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semiesferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste.



Supondo a superfície total do sólido igual a $4\pi a^2$ e variáveis x e h , averiguar qual é o sólido de volume máximo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 154)

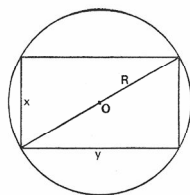


GOR4. Averigüe de entre os rectângulos de área igual a 64 dm^2 , qual é aquele que tem o perímetro mínimo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)

GOR5. Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das medidas das suas dimensões é 3.

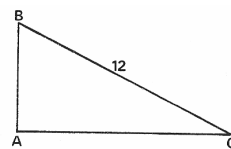
Determine a altura daquele que apresenta máximo volume. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)

GOR6. Exprima a área A de um rectângulo como função de um dos lados x , supondo que o perímetro é 20. Desenhe o gráfico da função no intervalo $[0, 10]$. Determine graficamente e analiticamente o valor de x que torna a área máxima. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)



LA5. Entre todos os rectângulos inscritos num círculo de raio R , qual será o que tem área máxima? (Amorim, 1977, p. 145)

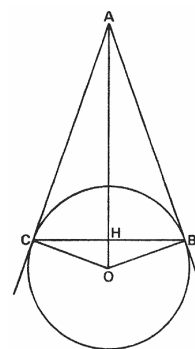
LA10. Qual é a maior área que pode ter um triângulo rectângulo de hipotenusa 12 m? (Amorim, 1977, p. 150)



LA11. Dois pontos A e O distam de a . Com centro no ponto O descreve-se uma circunferência de raio variável R e do ponto A tiram-se duas tangentes a essa circunferência.

a) Qual é o triângulo isósceles, formado pelas duas tangentes e a corda que une os pontos de contacto, que tem superfície máxima?

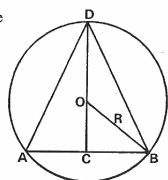
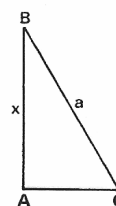
b) Qual é o quadrilátero formado pelas duas tangentes e pelos raios que passam pelos pontos de contacto, que tem superfície máxima? (Amorim, 1977, p. 152)



LA17. Que relação há entre o raio e a altura de um cilindro de revolução (aberto na parte superior) que, entre todos os que tem o mesmo volume V , tem a menor superfície? (Amorim, 1977, p. 157)

LA18. Quais são as dimensões de um rectângulo que tem 196 m^2 de superfície, sabendo que o seu perímetro é mínimo? (Amorim, 1977, p. 157)

LA13. Um triângulo rectângulo de hipotenusa a dada, roda em torno do cateto maior. Qual é o máximo volume gerado que se pode obter? (Amorim, 1977, p. 155)



LA14. Inscrever numa esfera de raio R um cone cuja superfície lateral seja o maior possível. (Amorim, 1977, p. 155)

LA15. Dividir um comprimento de lado l , em dois segmentos tais que o produto dos seus comprimentos seja máximo. (Amorim, 1977, p. 157)

LA16. De todos os cilindros de revolução que tem a mesma superfície total de 1 dm^2 , quais são as dimensões daquele que tem o maior volume? (Amorim, 1977, p. 157)

LA21. Num triângulo equilátero cujo lado a é dado, inscrever outro triângulo equilátero com a menor superfície possível.

Concretizar para $a = 12$ m. (Amorim, 1977, p. 159)

LA22. Num círculo de raio R traça-se uma corda perpendicular a um diâmetro e unem-se as extremidades da corda às extremidades do diâmetro. Calcular o máximo da diferença das duas superfícies dos dois triângulos que tem a corda comum como base. (Amorim, 1977, p. 159)

LA23. Num círculo de raio R traçar uma corda de maneira que fazendo-a girar em torno do diâmetro que lhe é paralelo, a superfície engendrada seja máxima. (Amorim, 1977, p. 159)

LA24. De todos os cilindros que tem a mesma superfície total $2\pi a^2$ qual é o que tem volume mínimo? (Amorim, 1977, p. 160)

Problemas de Geometria Analítica

LA20. Encontrar o caminho mínimo para ir de um ponto A a outro B , tocando uma dada recta r (os pontos A e B ficam do mesmo lado da recta). (Amorim, 1977, p. 159)

Problemas de Aritmética

OV2. A soma de dois números x e y , é uma constante a . Quando é máximo o seu produto? (Vasconcelos, 1973, p. 405)

OV3. O produto de dois números x e y é um constante a . Quando é mínima a sua soma? (Vasconcelos, 1973, p. 407)

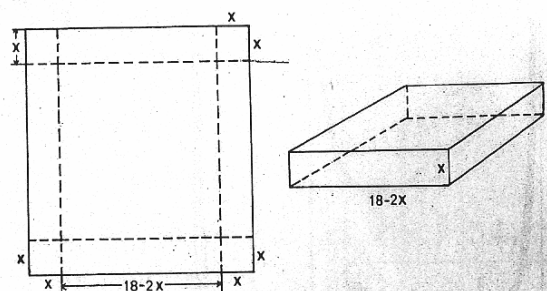
BS3. Dividiu-se 32 em duas partes. Determinar esses números de forma que o seu produto seja máximo. (Santos, 1974, p. 370)

LA3. Quais serão os dois menores números que, diferindo de 4, dão um produto mínimo? (Amorim, 1977, p. 144)

LA8. Decompor o número 20 em duas partes de modo que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Amorim, 1977, p. 149)

Problemas de Medida em Contexto Real

GOR1. Numa folha de cartolina quadrada de 18 dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, construindo-se seguidamente, por dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 152)



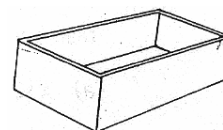
GOR7. Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um retângulo cujo comprimento é o dobro da largura.

a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm^2 , o volume da caixa é dado em dm^3 pela expressão

$$18x - \frac{2x^3}{3}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 157)

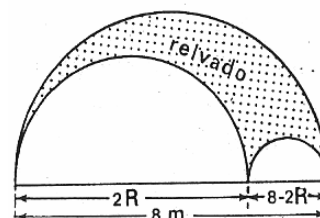


(Exame de 1971 – 1ª chamada)

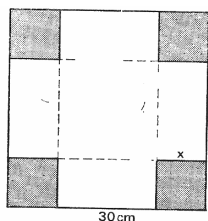
GOR8. Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4 m de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, igualmente semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.

a. Mostre que a área do relvado é $\pi(4R - R^2)$ metros quadrados

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos canteiros das flores para que seja máxima a área do relvado. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 158)



(Exame de 1970 – 2ª época)

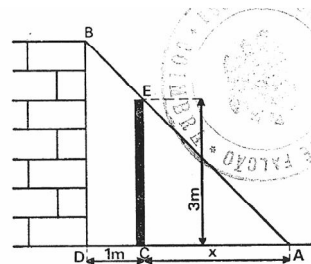


LA1. Dispõe-se de uma folha de cartão de forma quadrada com 30 cm de lado. Com ela pretende-se fabricar uma caixa, cortando em cada canto um quadrado de lado x . Para que valor de x será mínimo o volume da caixa? (Amorim, 1977, p. 142)

LA2. Paralelamente ao muro de uma casa, ergue-se outro muro de 3 m de altura.

A distância da casa à face do muro que está mais afastada é de 1 m.

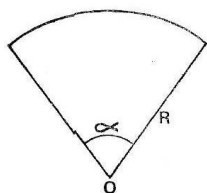
Qual será o comprimento mínimo das travessas que tocam o solo e a casa, apoiando-se sobre o muro? (Amorim, 1977, p. 143)



LA4. Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S .

Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios). (Amorim, 1977, p. 144)

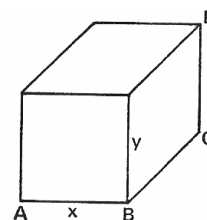
LA7. Temos um círculo metálico de raio R e queremos cortar nele um triângulo isósceles com a maior superfície possível. (Amorim, 1977, p. 148)



LA9. Um jardineiro quer construir um canteiro com a forma de sector circular para o que dispõe de 100 m de fio de ferro.

Como deve ele proceder para obter um canteiro com a maior superfície possível? (Amorim, 1977, p. 149)

LA12. Construir uma caixa prismática, de base quadrada, sem tampa, de forma que, $S = a^2$ tenha o máximo volume. (Amorim, 1977, p. 154)



Problemas de Física

GOR9. Às oito horas um navio B encontrava-se a 65 km a oeste de outro navio A. B navega rumo a leste, à velocidade de 10 km/h enquanto A navega rumo a norte, com velocidade de 15 km/h.

a. Mostre que, em cada instante, a distância em km que separa os dois navios é dada pela expressão

$$\sqrt{(65-10t)^2 + 225t^2},$$

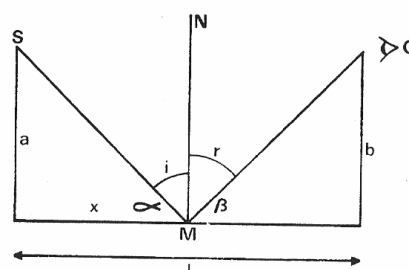
representando t o número de horas decorridas a partir das oito horas até esse instante.

b. Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima. (Garcia, Osório e Ruivo, 1974, p. 158)

(Exame de 1970 – 1ª chamada)

LA6. Problema da reflexão da luz.

Dado um espelho plano e uma fonte luminosa S , procurar a posição do ponto M onde um raio partindo de S incidirá sobre o espelho e se reflectirá na vista do observador sabendo que a luz se propaga em linha recta seguindo o caminho mais curto. Supõe-se, figura junta, conhecidos a , b , e l e determina-se a posição do ponto M por meio de x . (Amorim, 1977, p. 146)



Problemas de Economia

LA19. 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30\$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10\$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada. (Amorim, 1977, p. 157)

C. Análise do período

Começamos por fazer uma análise do programa relativo a esta reforma. Nesta, a derivada é abordada no 5º ano do Curso Complementar (actual 11º ano), inserida no capítulo destinado ao Cálculo Infinitesimal. O estudo da derivada é precedido do tratamento dos limites e continuidade. Existe um ponto específico que contempla o estudo das aplicações da derivada. Neste programa ainda não são utilizadas as calculadoras e não é feita qualquer sugestão ao manual a utilizar.

Assim sendo, uma vez que já não está em vigor o regime do Livro Único, detectámos um grande número de manuais escolares e de livros de exercícios para esta reforma. Como consequência também o número de problemas identificados, nos manuais seleccionados para analisar, é bastante superior ao número de problemas observados no período anterior, passamos de 18 problemas no período anterior para 43 nos manuais analisados neste período.

Relativamente aos problemas de optimização encontrados nos quatro manuais analisados neste período verificamos que, o manual da autoria de Ondina Vasconcelos **(OV)** apresenta apenas quatro problemas de optimização; a sebenta da autoria de Borja Santos **(BS)** seis; o livro de exercícios de Loureiro Amorim **(LA)** vinte e quatro e o manual de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo **(GOR)** apresenta nove problemas de optimização.

Analisemos agora as características dos problemas deste período. O primeiro aspecto a salientar é o facto de os manuais deste período vêm acompanhados figuras alusivas ao problema, por vezes mais do que uma figura quando o problema vem acompanhado da respectiva resolução.

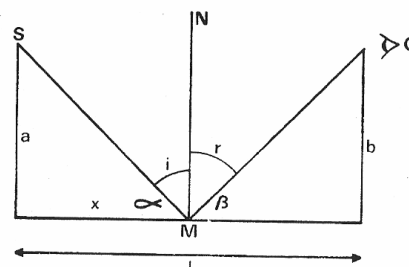
Por outro lado vemos, que relativamente ao tipo de problema, estes surgem sob a forma de exemplo, exercício resolvido e exercício; portanto, identificámos menos um tipo que no período anterior, uma vez que não existe neste período nenhum exercício em que se pretende realizar uma demonstração. No manual de Ondina Vasconcelos, os quatro problemas surgem sob a forma de exemplo; os seis problemas da sebenta de Borja Santos são apresentados sob a forma de exercício resolvido; no manual de Madalena Garcia, Alfredo Osório e António Ruivo encontramos três problemas enunciados sob a forma de exemplo, dois como exercício resolvido e quatro surgem sob a forma de exercício; por fim, na obra de Loureiro Amorim observamos que nove problemas eram enunciados como exemplo, cinco como exercício resolvido e dez como exercício.

Quanto ao contexto dos problemas, achámos, neste período, problemas de todos os contextos, sendo a maioria de Geometria Métrica. Encontrámos então nove problemas em contexto real de medida (GOR1, GOR7, GOR8, LA1, LA2, LA4, LA7, LA9, LA12), cinco de Aritmética (OV2, OV3, BS3, LA3, LA8), dois de Física (GOR9, LA9), um de Geometria Analítica (LA20), um de Economia (LA19) e os restantes vinte e cinco de Geometria Métrica. Deste modo, notámos neste período problemas de todos os contextos identificados, surgindo pela primeira vez os de Geometria Analítica, de Física e de Economia. Observemos a seguir um exemplo de cada um destes contextos:

“ (LA20) Encontrar o caminho mínimo para ir de um ponto A a outro B, tocando uma dada recta r (os pontos A e B ficam do mesmo lado da recta).”

“ (LA6) Problema da reflexão da luz.

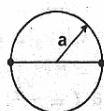
Dado um espelho plano e uma fonte luminosa S, procurar a posição do ponto M onde um raio partindo de S incidirá sobre o espelho e se reflectirá na vista do observador sabendo que a luz se propaga em linha recta seguindo o caminho mais curto. Supõe-se, figura junta, conhecidos a , b , e l e determina-se a posição do ponto M por meio de x . ”



“ (LA19) 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30\$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10\$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada.”

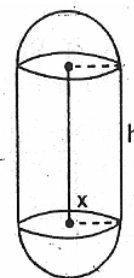
Relativamente à função a otimizar, apenas não surge otimização de tempo, detectando-se essencialmente, problemas em que se pretende otimizar uma área (dezassete problemas): de um rectângulo dado o perímetro (OV1, BS4, GOR6) ou o raio de uma circunferência circunscrita (LA5); de um triângulo rectângulo dada a hipotenusa (BS1, LA10); de um triângulo equilátero dada a medida do lado (LA21); de um triângulo isósceles dado o raio do círculo circunscrito (LA7); de dois triângulos inscritos num círculo dado o raio (LA22); de um sector circular dado o perímetro (LA9), ou área lateral de um cone ou cilindro dado o raio ou a geratriz (BS6, LA14). Pretende-se otimizar um perímetro de um rectângulo dada a área em três problemas (BS5, GOR4, LA18). Procura-se otimizar o volume (doze problemas): de um cilindro dado o perímetro do rectângulo que o gera (OV4); de um cone dada a geratriz (BS6, LA13); de um sólido constituído por um cilindro e duas semiesferas (GOR3); de um paralelepípedo dadas algumas dimensões (GOR5, PA1); de um prisma dada a superfície (LA12) e de um cilindro dada a sua superfície total (LA16, LA4). Otimizar uma distância dados dois pontos (LA20). Nos problemas de Aritmética pretende otimizar-se um produto dada a soma ou a diferença de dois números (OV2, BS3, PA3); otimizar-se uma soma dado o produto (OV3) ou otimizar a soma dos quadrados de dois números dada a sua soma (LA8). Nos problemas físicos pretende otimizar-se a distância entre dois pontos, sabendo a velocidade a que cada um se desloca e a distância entre eles (GOR9) ou o caminho mais curto seguido pela reflexão da luz (LA6). Finalmente, no problema de Economia pretende otimizar-se um custo, dada a variação no número de pessoas e de preços (PA19).

Apenas dois dos problemas apresentam uma figura simples (GOR7, LA11). Sete problemas apresentam uma figura com dados (GOR1, GOR8, LA1, LA2, LA9, LA12, LA6) e os restantes não apresentam qualquer esquema ou figura auxiliar. É ainda de salientar que o livro de Borja Santos e o de Ondina Vasconcelos não apresentam qualquer figura. Vejamos o exemplo de um problema que apresenta uma figura com dados:



“(GOR3) Um sólido é constituído por um cilindro de raio da base x e de altura h e por duas semiesferas assentes sobre as bases do cilindro e de raio igual ao raio da base deste.

Supondo a superfície total do sólido igual a $4\pi a^2$ e variáveis x e h , averiguar qual é o sólido de volume máximo.”



Em relação aos dados indicados no enunciado dos problemas, observámos que metade apresenta dados genéricos e a outra metade dados numéricos. Sendo que o livro de Loureiro de Amorim tem cerca de dois terços de exercícios com dados genéricos e apenas um terço com dados numéricos e o livro de Ondina Vasconcelos apenas tem um exercício com dados numéricos sendo os restantes exercícios com dados genéricos. É ainda de referir que num dos problemas é pedido para resolver o problema com dados genéricos e depois é pedido para concretizar com um valor específico (LA21).

Os enunciados dos problemas são maioritariamente simples, apresentando apenas quatro a resolução encaminhada (GOR6, GOR7, GOR8, GOR9). Vejamos os problemas com resolução encaminhada:

“(GOR6) Exprima a área A de um rectângulo como função de um dos lados x , supondo que o perímetro é 20. Desenhe o gráfico da função no intervalo $[0, 10]$. Determine graficamente e analiticamente o valor de x que torna a área máxima.”

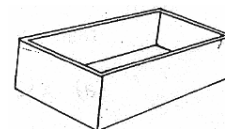
“(GOR7) Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.

a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm^2 , o volume da caixa é dado em dm^3 pela expressão

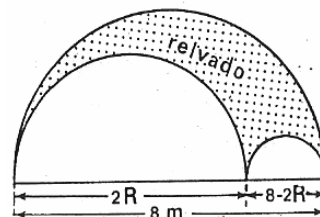
$$18x - \frac{2x^3}{3}$$

Em que x é a medida, em dm , da largura do rectângulo da base.

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso.”



“ **(GOR8)** Num canteiro semicircular, cujo raio tem 4 m de comprimento, são reservados, de acordo com a figura, dois canteiros, igualmente semicirculares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.



a. Mostre que a área do relvado é $\pi(4R - R^2)$ metros quadrados

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos canteiros das flores para que seja máxima a área do relvado.”

“ **(GOR9)** Às oito horas um navio B encontrava-se a 65 km a oeste de outro navio A. B navega rumo a leste, à velocidade de 10 km/h enquanto A navega rumo a norte, com velocidade de 15 km/h.

a. Mostre que, em cada instante, a distância em km que separa os dois navios é dada pela expressão

$$\sqrt{(65 - 10t)^2 + 225t^2},$$

representando t o número de horas decorridas a partir das oito horas até esse instante.

b. Calcule a hora a que os dois navios se encontrarão à distância mínima.”

Observamos, então, que o primeiro problema é semelhante ao do período anterior (SP3). Os três problemas seguintes têm uma estrutura idêntica uma vez que apresentam duas alíneas: na primeira pede-se para mostrar que a expressão que permite otimizar o problema é a expressão apresentada e na segunda é pedido para otimizar a situação. Sendo assim estes problemas são de mais fácil compreensão relativamente aos que não apresentam qualquer passo anterior que auxilie a determinar a expressão a otimizar. Para além disso, o facto de o aluno não conseguir determinar a expressão não o impede de achar a solução óptima uma vez que na alínea anterior a expressão já é dada.

A função auxiliar surge na maioria dos problemas de forma implícita (vinte e sete vezes) e explicitamente apenas em 16 problemas (OV1, OV4, BS2, BS4, GOR4, GOR6, LA17, LA18, LA16, LA24, OV2, OV3, LA3, GOR7, LA4, LA12). É ainda de referir que no manual de Ondina Vasconcelos a função auxiliar figura sempre explicitamente. Apontamos um exemplo de cada uma das situações:

“ **(BS2)** Dentre os cilindros de volume igual a 16π , determine os que têm área total mínima.”

“ **(LA19)** 400 pessoas assistem a um espectáculo cujos lugares custam 30\$00. Se o número de assistentes diminuir de 40 pessoas quando o aumento de preço dos lugares for de 10\$00, pretende-se saber qual será o aumento de preço que permitirá uma receita mais elevada.”

No primeiro problema é dado o valor do volume. Deste modo, o aluno sabe que terá de utilizar a fórmula do volume na resolução do problema, mas no segundo apenas é dado o número de pessoas e o preço inicial e é dada a diminuição do número de pessoas quando o preço aumenta um determinado valor. Então concluímos que este problema terá uma dificuldade acrescida para determinar a função a optimizar.

Passando agora para as noções aplicadas, vemos que das noções listadas, apenas a noção de função e as funções trigonométricas não são utilizadas neste período. As noções que predominam são o Teorema de Pitágoras e a noção de área. O Teorema de Pitágoras aparece associado aos problemas geométricos com triângulos rectângulos ou com figuras inscritas em circunferências ou esferas e a noção de área surge associada a problemas geométricos em que se pretende determinar lados, perímetros ou volumes sabendo o valor da área de uma figura plana ou área lateral ou total de um sólido. Aprecieemos:

" (LA4) Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S .

Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios)."

Neste problema notamos que aplicando a noção de área de um rectângulo e de um círculo, chegamos a uma relação entre a altura e o raio da caçarola que de seguida, se utiliza para determinar o volume.

Relativamente à estratégia a utilizar concluímos que vinte e dois problemas surgem pela primeira vez nesta reforma, doze em manuais anteriores (BS1, BS3, BS5, GOR1, GOR4, GOR6, LA1, LA8, LA9, LA12, LA18, OV3), cinco nas obras históricas (BS4, LA14, LA15, OV1, OB2) e apenas quatro em exames (GOR7, GOR8, GOR9, LA10). Assim sendo, a obra de Borja Santos apenas têm dois problemas originais e a obra de Ondina Vasconcelos apenas tem um problema original. A obra de Loureiro Amorim é a que apresenta maior quantidade de problemas novos.

As funções utilizadas são tão só as funções polinomiais, funções racionais e funções irracionais, surgindo as funções polinomiais na maioria das situações (vinte e quatro problemas). As funções racionais aparecem em apenas oito problemas (BS2, BS5, GOR4, LA17, LA18, LA21, OV3 e LA2) e as funções irracionais em onze (BS1, LA5, LA10, LA11, LA14, LA22, LA23, LA20, LA7, GOR9 e LA6). As funções irracionais surgem, normalmente, em problemas em que se utiliza o Teorema de Pitágoras ou a distância entre dois pontos.

Nos que apresentam resolução vemos que na maioria dos casos o autor começa por calcular os zeros da função a otimizar e depois estuda o sinal da função. Em oito situações o autor apenas calcula os zeros da função deduzindo logo qual o valor do extremo e numa situação estuda o sinal da segunda derivada para concluir que o ponto é um extremo.

Fazendo agora a análise por cada autor, notamos que todos os problemas da obra de Borja Santos têm resolução, surgindo apenas o cálculo dos zeros da derivada. Na obra de Garcia, Osório e Ruivo, apuramos que dos três problemas que apresentam resolução, apenas em dois se calculam os zeros da derivada (GOR2, GOR3) e no outro são calculados os zeros e o sinal da derivada (GOR1). Passando para o livro de Loureiro de Amorim, vê-se que, dos vinte e quatro problemas da obra, cerca de metade apresenta resolução. Destes, num problema é feito o estudo do sinal da segunda derivada (LA4) e os restantes apresentam os zeros e o sinal da derivada (LA1, LA10, LA11, LA12, LA13, LA14, LA2, LA3, LA5, LA6, LA7, LA8, LA9). Por fim, na obra de Ondina Vasconcelos, concluímos que os quatro problemas contêm resolução, calculando-se os zeros e o sinal da derivada. Vejamos alguns exemplos:

" **(BS3)** Dividiu-se 32 em duas partes. Determinar esses números de forma que o seu produto seja máximo.

Como se pretende que o produto de dois números seja máximo temos de determinar a derivada da função, $P = xy$, como P está em função de 2 variáveis, vamos eliminar uma delas, razão porque nos é dito que, $x + y = 32$.

Logo, $y = 32 - x$, e desta forma vem:

$$P = x \cdot y = x(32 - x)$$

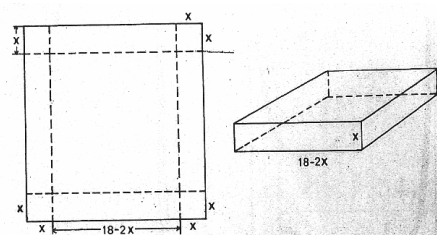
$$P' = 32 - x + x \cdot (-1) = 32 - 2x$$

$$32 - 2x = 0 \Rightarrow x = 16$$

Para $x = 16$ a função tem um máximo e vem $y = 16$, e assim $P = 256$ "

Neste problema, o autor mostra a função a otimizar. Depois indica que como está em função de duas variáveis há necessidade de eliminar uma delas e utiliza então o valor da soma para determinar o valor de uma variável em função da outra. Seguidamente substitui na função a otimizar, obtendo uma função polinomial, deriva e determina os zeros da derivada, concluindo, de imediato, que esse é o valor para o qual a função tem um máximo.

" **(GOR1)** Numa folha de cartolina quadrada de 18 dm de lado pretendem-se cortar, nos quatro cantos, quatro quadrados iguais, construindo-se seguidamente, por



dobragem conveniente, uma caixa aberta na parte superior. Determinar a medida do lado do quadrado a cortar em cada canto para que a caixa tenha volume máximo.

Representando por x a medida (em dm) do lado do quadrado a cortar, a medida do volume da caixa (em dm^3) será dada por

$$V = (18 - 2x)^2 x \quad (\text{Deverá ser } 0 < x < 9. \text{ Porquê?})$$

Calculando a derivada, tem-se

$$\begin{aligned} V' &= -4(18 - 2x)x + (18 - 2x)^2 \\ &= (18 - 2x)(-4x + 18 - 2x) \\ &= (18 - 2x)(18 - 6x) \end{aligned}$$

A derivada V' anula-se para $x = 9$ e para $x = 3$

Ora, dado que é $V' < 0$ para $3 < x < 9$ e $V' > 0$ para $x < 3$, a função admite um máximo relativo para $x = 3$.

Tem-se, pois:

a caixa de volume máximo é obtida, cortando em cada um dos cantos da folha um quadrado de 3 dm de lado."

Na resolução deste problema vê-se que em relação ao anterior, para além de calcular os zeros da derivada o autor faz ainda o estudo do sinal da derivada antes e depois dos zeros, para posteriormente concluir qual o valor da variável em que a função atinge o máximo.

" **(LA4)** Pretende-se fazer uma caçarola de alumínio utilizando uma folha de superfície dada S .

Que relação deve existir entre a altura h e o raio R para que o volume seja máximo? (Supõe-se ausência de tampa e de desperdícios).

A caçarola tem a forma de cilindro, cujo volume será:

$$V = \pi R^2 h$$

Procuramos exprimir h em função de R .

Como a superfície total do cilindro (repare-se que só tem uma base) é:

$$S = \pi R^2 + 2\pi R h$$

donde

$$h = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}$$

substituindo em V

$$V = \pi R^2 \left[\frac{S - \pi R^2}{2\pi R} \right] = \frac{R}{2} (S - \pi R^2)$$

$$V = f(R) = \frac{RS}{2} - \frac{\pi R^3}{2}$$

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3\pi R^2}{2} = \frac{S - 3\pi R^2}{2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \Leftrightarrow S = 3\pi R^2$$

Mas como $S = \pi R^2 + 2\pi R h$

teremos $3\pi R^2 = \pi R^2 + 2\pi R h$

$$2\pi R^2 = 2\pi R h$$

donde $R = h$

Mas será um máximo para V ?

$$\text{Como } V'' = -\frac{6\pi R}{2} = -3\pi R < 0$$

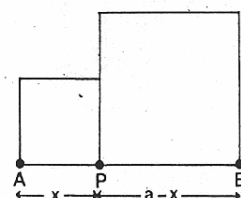
$$V'' < 0$$

Trata-se efectivamente de um máximo."

Neste problema verifica-se que após o cálculo dos zeros da derivada, o autor estudou o sinal da segunda derivada nesse ponto, concluindo, depois, que se trata de um máximo.

Quanto a gráficos, figuras ou esquemas auxiliares, treze problemas não apresentam nenhum destes auxiliares, onze apresentam uma figura alusiva ao problema (BS1, BS6, GOR1, GOR2, GOR3, LA5, LA10, LA13, LA14, OV1, OV4) e três o quadro de monotonia para identificar o extremo (LA1, LA2, LA3).

" **(GOR2)** Determinar num segmento $[AB]$ de comprimento a (fixo), um ponto P de modo que seja mínima a soma das áreas dos quadrados de lados $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$.



A soma S das áreas dos quadrados de lados $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$ é dada por

$$S = x^2 + (a - x)^2$$

representando por x o comprimento do lado de um dos quadrados.

(Terá de ser $0 \leq x \leq a$. Porquê?)

Derivando S , tem-se

$$S' = 2x + 2(a - x)$$

$$S' = 4x + 2a$$

A derivada anula-se para $x = a/2$

Estude o sinal da derivada e conclua que S é mínimo para $x = a/2$."

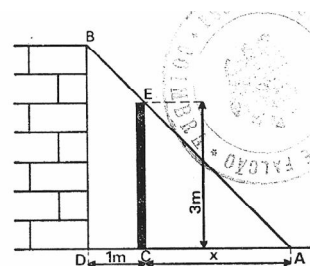
Donde se infere que, neste problema, o facto de a resolução vir acompanhada de uma figura com dados, é um factor importante para a resolução do problema, uma vez que, desta forma, o aluno já tem os dados em função apenas de uma variável para determinar a função a optimizar.

(LA2) Paralelamente ao muro de uma casa, ergue-se outro muro de 3 m de altura.

A distância da casa à face do muro que está mais afastada é de 1 m.

Qual será o comprimento mínimo das travessas que tocam o solo e a casa, apoiando-se sobre o muro?

Seja l o comprimento da travessa $\overline{AB}$. Este comprimento dependerá da distância $\overline{AC} = x$.



Pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$$

$$l^2 = (x-1)^2 + \overline{BD}^2$$

Mas a semelhança dos triângulos $[\Delta ABD]$ e $[\Delta AEC]$, tira-se:

$$\frac{\overline{BD}}{3} = \frac{x+1}{x} \therefore \overline{BD} = \frac{3x+3}{x} = 3 + \frac{3}{x}$$

$$\text{Então: } l^2 = (x+1)^2 + \left(3 + \frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + 2x + 10 + \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2}$$

Consideremos então a função $y(x) = l^2$

$$y' = 2x + 2 - \frac{18}{x^2} - \frac{9}{x^3} = x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x + 1 - \frac{9}{x^2} - \frac{9}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^4 + x^3 - 9x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(x+1) - 9(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^3 - 9) = 0$$

Como $x > 0$, a derivada só se anulará para $x = \sqrt[3]{9}$.

x	0	$\sqrt[3]{9} \approx 2,08$	$+\infty$
y'		0	0
$y = l^2$	$+\infty$	$\approx 29,20$ Min.	$+\infty$

O menor comprimento que pode ter a travessa será aproximadamente $l = \sqrt{29,20} \approx 5,40 \text{ m}$

Deduz-se, que no livro de Loureiro Amorim identificamos, pela primeira vez, o quadro de monotonia para identificar o extremo da função. Este problema também tem particular interesse na determinação da função a otimizar, uma vez que é necessário utilizar dois conceitos: Teorema de Pitágoras e semelhança de figuras, para determinar a função com uma só variável.

Finalmente, quanto ao valor pedido, na maioria dos casos o valor a calcular surge de forma implícita, sendo de forma explícita em apenas dezoito situações. Olhando agora para cada um dos autores, dos seis problemas da obra de Borja Santos, apenas dois referem explicitamente o valor pedido (BS3, BS6); nos problemas da obra de Garcia, Osório e Ruivo apenas um problema tem o valor pedido implícito (GOR3); nos da obra de Loureiro de Amorim vemos, maioritariamente, problemas cujo valor pedido surge implicitamente; e, por fim, na obra de Ondina Vasconcelos todos os problemas referem implicitamente qual o valor a calcular.

Deste modo, a primeira característica deste período é o facto de alguns dos problemas apresentarem uma figura/esquema, o que não acontecia no período anterior. Neste período não se encontram problemas em que se pretenda fazer uma demonstração ou um relatório. Os outros tipos surgem de forma semelhante. A maioria dos problemas são de Geometria Métrica em que se pretende otimizar uma área ou um volume. Os enunciados quase não têm esquemas auxiliares e sem a resolução encaminhada na maioria dos casos. As noções mais aplicadas são o Teorema de Pitágoras e a fórmula da área. Grande parte dos problemas surge nesta reforma pela primeira vez. As funções utilizadas são essencialmente polinomiais e o esquema de cálculo dos extremos mais utilizado é através dos zeros da derivada.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.3.3. O PERÍODO PÓS REVOLUÇÃO

Após 5 décadas de ditadura, dá-se, a 25 de Abril de 1974, um movimento revolucionário organizado pelos militares portugueses. Até então o país vivia num profundo isolamento em relação ao resto do mundo, a inflação aumentava de forma descontrolada, não havia liberdade de expressão e as colónias portuguesas viviam em guerra. Todos estes factores faziam com que muitos portugueses encontrassem na imigração a forma de fugir aos problemas do país e à guerra colonial.

Assim, logo a seguir à revolução, o MFA²⁰ apresentou um conjunto de medidas com o objectivo de extinguir todas as instituições ligadas ao Estado Novo que estrangulavam a liberdade nacional. Estas foram aceites pelos portugueses sem contestação.

Nos meses pós 25 de Abril, o país viveu momentos de grande agitação e instabilidade. Foram nomeados sucessivos governos provisórios que governavam por períodos muito curtos. Consequentemente também os ministros que tutelavam a pasta da Educação se iam sucedendo. As primeiras eleições, com uma elevada taxa de participação, foram realizadas um ano após a revolução.

O ministério que tutelava a educação passou a ter o nome de Ministério da Educação e Cultura, sendo o ministro indigitado Eduardo Henrique da Silva Correia. Este ocupou a pasta apenas durante dois meses sendo depois sucedido por Vitorino Magalhães Godinho, que dirigiu o referido Ministério até Novembro desse ano.

A. Análise do programa oficial

O ensino sofreu a partir de então fortes alterações dado que foi considerado entre as grandes prioridades.

Por esta razão se procedeu, entre 1975 e 1980, à unificação do curso geral, terminando, por isso a separação entre os Liceus e as Escolas Industriais visto que se considerava que estas faziam a separação entre os alunos provenientes dos vários estratos sociais. Foram também implementados os cursos complementares de via única nos dois ramos de ensino.

²⁰ Movimento das Forças Armadas

De tal modo que ainda em 1974 foi publicado o programa do Curso Complementar para o ano lectivo 1974/75 que não sofreu alterações, em relação ao programa anterior.

Para o ano lectivo 1976/77 também foi publicado o novo programa de Matemática para o Curso Complementar, mas, tal como no caso anterior, também neste a Matemática, sobretudo o capítulo dedicado à Análise Infinitesimal, não sofreu nenhuma alteração.

A partir do ano lectivo 1978/79 termina a separação, após o 9º ano, entre o Curso Complementar dos Liceus e o Curso Complementar Técnico. Surge assim o Curso Complementar do Ensino Secundário com as seguintes cinco áreas de estudo: A) Científico – natural, B) Científico-tecnológica, C) Económico-social, D) Humanísticos e E) Artes Visuais. Cada uma das áreas tinha três componentes: Formação geral, formação específica e formação vocacional. A disciplina de Matemática fazia parte da formação específica de todas as áreas, com excepção da área D) Humanísticos e tinha uma carga horária de quatro horas semanais para o 10º e para o 11º ano. Começando o programa a funcionar no ano lectivo de 1978/79 para o 10º ano, no ano lectivo 1979/1980 para o 11º ano e no seguinte para o 12º ano.

A derivada é então abordada no 11º ano, ou seja, no 2º ano do Curso Complementar. Vejamos então como ficou estruturado este programa:

Índice do livro único de acordo com o programa de Matemática do 2º ano do Ensino Complementar para o ano lectivo de 1979-1980
Compêndio de Matemática

11º ano (1º Volume)

- *Limites de Sucessões*
- *Função exponencial e função logarítmica*
- *Limites de funções reais de variável real. Continuidade*
- *Funções contínuas*
- *Derivadas de funções reais de variável real*
 1. *Derivada de uma função num ponto: significado geométrico*
 2. *Derivadas laterais: interpretação geométrica*
 3. *Derivabilidade e continuidade*
 4. *Função derivada*
 5. *Regras de derivação*
 6. *Derivada de uma função inversa*

7. *Derivada de uma função composta*

8. Aplicações das derivadas

(Despacho Normativo nº 135-A/79 do Diário da República nº 140/79 de 20 de Junho de 1979)

Do exposto, vê-se que foi dedicado um capítulo ao estudo da derivada. Este capítulo contempla no último ponto o estudo de aplicações das derivadas.

No ano lectivo de 1980/81 começa a funcionar o 12º ano, com uma carga horária de 4 horas semanais. Este vinha a substituir o ano propedêutico que pretendia preparar os alunos para a entrada no Ensino Superior e dar início também a uma profissionalização orientada para a inserção na vida activa. Estava dividido em duas vias: a de ensino e a profissionalizante.

O programa estava organizado do seguinte modo:

Programa do 12º ano para o ano lectivo de 1980-81

Parte I – Álgebra

Parte II – Análise Real

1. *Princípio da indução matemática*
2. *Complementos sobre sucessões numéricas*
3. *Séries numéricas*
4. *Complementos sobre funções reais de uma variável real*
5. *Complementos sobre derivação de funções reais de uma variável real*
 - 5.1. *Derivação de funções circulares e das "funções" circulares inversas*
 - 5.2. *Derivação da função exponencial e logarítmica.*
 - 5.3. *A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regras de diferenciação.*
6. *Teoremas de Rolle, de Lagrange, de Cauchy e de Taylor*
7. *Complementos sobre representação gráfica de funções*
8. *Generalidades sobre linhas em $\mathbb{R}^2$. AS cónicas*
9. *Primitivação de funções reais de variável real*
10. *Integração de funções reais de uma variável real*

(Decreto nº 240/80 do Diário da República nº 165 de 19 de Julho de 1980)

Vemos que também no 12º ano se contempla o estudo da derivada. Esta surge no quinto ponto, mas pretende-se agora introduzir o estudo de novas regras de derivação. Não se contempla a abordagem dos problemas de optimização.

No entanto, o programa pecava pela extensão e os professores não conseguiam leccionar todos os temas que se pretendiam abordar. Pelo que, para o ano lectivo de

1983/84, foi publicado um novo programa, muito semelhante ao anterior, mas menos extenso. Apesar de ter sido encurtado, o estudo das derivadas não sofreu nenhuma alteração em relação ao programa anterior. Este continuou em vigor até 1986.

Por despacho de 28 de Julho de 1988, o mesmo ainda veio a sofrer mais algumas alterações. Foi, então, suprimido, o capítulo quarto dedicado ao *Espaço linear (espaço vectorial) sobre um corpo*.

Também o capítulo destinado aos *Complementos sobre derivação de funções reais de uma variável real* sofreu alterações. Foi suprimido o ponto 8.3. "*A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regra de diferenciação*", onde se pretendia que o aluno determinasse diferenciais de funções, passando a referir que o aluno resolvesse questões aplicando o conceito de derivada.

B. Análise dos Manuais Escolares

Analisemos agora os problemas de optimização encontrados nos manuais relativos às reformas referidas.

Para estas reformas seleccionámos cinco livros, dos quais três são manuais escolares e os outros dois são livros de exercícios.

Autor: A. César Freitas; Francelino Gomes

Título: *Matemática*

Ano lectivo: 11º Ano (2º CC) V2

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1979, Livraria Popular de Francisco Franco

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal de Ana Paula Aires;

Caracterização e estrutura da obra: Neste manual, o capítulo dedicado às derivadas de funções reais de variável real apresenta a seguinte estrutura:

- *Derivada de uma função num ponto. Interpretação geométrica;*
- *Função derivada. Regras de derivação. Derivadas de ordem superior;*
- *Aplicações das derivadas;*
 - *Sentido de variação de uma função;*
 - *Extremos relativos de uma função;*
 - ***Alguns problemas elementares de máximos e mínimos.***
- *Assíntotas paralelas aos eixos (assíntotas horizontais e verticais);*

- *Representação gráfica de uma função. Contradomínio e extremos absolutos;*
- *Exercícios.*

Na parte dedicada aos problemas elementares de máximos e mínimos encontramos quatro problemas de optimização com ilustração e seguidos da respectiva resolução. Posteriormente, no final do capítulo é apresentado um conjunto de exercícios, sendo sete problemas de optimização.

Autor: Henrique Verol Marques

Título: *Exercícios de Matemática 1*

Ano lectivo: 11º Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1979, Editorial Presença

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: O autor, Henrique Verol Marques era Licenciado em Ciências Matemáticas e professor do Ensino Secundário. Publicou livros de exercícios para as Matemáticas Modernas e posteriormente para a reforma de 1979.

Trata-se de um livro apenas com exercícios e a respectiva resolução, sem qualquer explicação teórica.

O autor refere no início da obra que:

“A nova estrutura do Ensino Secundário implicou a reorganização de programas de Matemática com características inéditas.

A exemplo do que aconteceu com o programa do 10º ano, parece extremamente ambicioso o programa agora adoptado para o 11º ano, quer na sua dimensão – certamente excessiva – quer no coeficiente de dificuldade que contém.

O presente livro, como o volume que se lhe seguirá, procura respeitar as normas estabelecidas e contribuir para uma preparação prática conveniente dos alunos a que se destina.”

A obra contém 196 páginas, distribuídas por seis capítulos. Em cada um dos capítulos há exercícios, dando-nos no final do último a respectiva resolução.

No capítulo 5 são abordadas as derivadas de funções reais de variável real e no capítulo 6 o estudo de uma função. É neste 6º capítulo que encontramos alguns problemas de optimização no qual são apresentados 32 exercícios, dos quais nove são problemas de optimização.

Autor: António do Nascimento Palma Fernandes

Título: *Matemática 7 – Exemplos e exercícios*

Ano lectivo: 11º Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1980, Plátano Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca do DMUC

Caracterização e estrutura da obra: Apesar de Palma Fernandes ter falecido em 1968, em 1980 foi publicada uma actualização do seu livro de exercícios levada a efeito por António de Oliveira Pegado, Maria do Rosário Ribeiro e Mavília Lobo Palmeira. A obra apresenta uma estrutura gráfica ligeiramente diferente do que a analisada anteriormente. Tem 255 páginas e está dividida em duas partes. A primeira abrange as funções e a segunda os elementos de análise. O quarto ponto da segunda parte trata das derivadas de funções reais de variável real e contempla, no final, alguns problemas concretos. Este ponto, relativo às derivadas, tem trinta e seis exercícios resolvidos dos quais apenas dois são problemas de optimização, mas ambos estão presentes na obra analisada anteriormente. Seguidamente são expostos 90 exercícios que contêm no final apenas a solução, sendo dez problemas de optimização, mas só três não estão na obra já analisada.

Autor: Paulo Abrantes; Raul Fernando Carvalho

Título: *M11 – Matemática 11º ano*

Ano lectivo: 11º Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1984, Texto Editora

Localização da obra consultada: DMUC

Caracterização e estrutura da obra: Paulo Abrantes e Raul Fernando Carvalho, para além deste manual, produziram um vasto número de manuais escolares nesta época para os vários níveis de escolaridade.

A obra acima referida tem cerca de 400 páginas repartidas em três partes: Funções, Elementos de Análise e Combinatória, Probabilidades e Estatística. A parte dos Elementos de Análise está dividida em três sub-capítulos contemplando o terceiro a Derivação.

Este sub-capítulo tem a seguinte estrutura:

- Situações

- Razão incremental
- Derivada da função num ponto
- Derivadas laterais
- Derivabilidade e continuidade
- Função derivada
- Regras de derivação
- Variação e extremos de uma função
- Problemas práticos
- Estudo de funções
- Exercícios e problemas
- Prolongamentos: Assíntotas oblíquas e método de Newton.

Observa-se pela referida estrutura que os seus autores revelam uma grande preocupação em apontar para cada tema a sua aplicabilidade em situações ligadas à vida corrente. Expõem ainda, para cada um, os prolongamentos, ou seja, desenvolvimentos dos assuntos tratados, mas que não fazem parte do programa oficial.

Encontramos os problemas de optimização na parte referente aos problemas práticos. Nesta os autores mostram três problemas de optimização seguidos da respectiva resolução. Tanto o enunciado como a resolução vêm acompanhados de gráficos, esquemas, figuras e tabelas que ajudam à compreensão do problema. Ao longo da apresentação dos problemas surgem ainda outras actividades, ou seja, novas questões/exercícios pertinentes, que o aluno pode resolver, a partir do que lhe é apresentado.

No final dos problemas de optimização os autores indicam a definição de problema de optimização bem como os passos que deve seguir a sua resolução:

“Tratamos aqui um tipo de problemas em que se pretende obter a maior área, a receita máxima, o custo mínimo, ...

Dá-se-lhes por vezes o nome de problemas de optimização. Em geral, a sua resolução passa pelas seguintes etapas:

- 1) Definir uma função – se possível, com apenas uma variável – que constitua um modelo matemático do problema a estudar.*
- 2) Estudar a variação desta função, em especial procurando os seus máximos e mínimos.*
- 3) Verificar a adequação dos resultados teóricos obtidos à situação concreta a que o problema se refere.”*

Também na parte relativa aos exercícios e problemas se detectam mais alguns problemas de optimização. Nesta é apresentado um conjunto de 29 exercícios dos quais 6 são problemas de optimização.

Autor: M. A. F. Neves; M. Teresa C. Vieira; Alfredo G. Alves

Título: *Matemática*

Ano lectivo: 11º Ano

Reforma curricular: 1979

Ano, editora e lugar de edição: 1988, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Estes autores, e em particular Maria Neves, produziram uma grande quantidade de manuais escolares e de livros de exercícios para os diversos níveis de escolaridade. O presente tem 375 páginas, repartidas por dez capítulos, sendo o sétimo dedicado às derivadas de funções reais de variável real.

O capítulo está estruturado da seguinte forma:

- *Da tangente a uma curva à noção de derivada*
- *Derivada de uma função num ponto*
- *Interpretação geométrica de derivada de uma função num ponto*
- *Derivadas laterais*
- *Derivabilidade e continuidade*
- *Função derivada*
- *Derivada de uma função constante, derivada da função identidade, derivada de uma soma de funções, derivada do produto de funções, derivada de um quociente de funções, derivada da função inversa, derivada da função composta, derivadas de ordem superior à primeira*
- **Aplicações das derivadas**
- *Assíntotas verticais e assíntotas horizontais*
- *Esboço do gráfico de uma função: contradomínio e extremos absolutos*
- *Exercícios*

Para além do conjunto de exercícios que surgem no final do capítulo, são expostos também alguns nas margens do manual, relativos ao tema em estudo. Os autores recomendam o seu livro Exercícios de Matemática, 11º ano, dos mesmos autores e da referida editora, de harmonia com este manual escolar.

Os problemas de optimização aparecem nas aplicações das derivadas, no ponto que diz respeito aos problemas concretos. Os autores começam por explicar os passos a seguir na resolução dos mesmos, a seguir mostram cinco problemas resolvidos com base nos passos referidos no início. Estes são acompanhados de imagens, gráficos e tabelas que ajudam à compreensão do enunciado, bem como da resolução. Nas margens são

registados mais doze exercícios sobre problemas de optimização. Nos exercícios do final do capítulo não existe nenhum problema de optimização.

Examinemos agora os problemas de optimização destas obras.

Problemas de Geometria Métrica

FG1. Determinar o rectângulo de maior área que se pode inscrever numa dada circunferência. (Freitas e Gomes, 1979, p. 138)

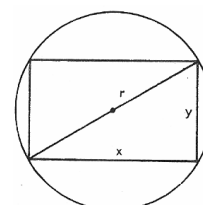


Fig. 43

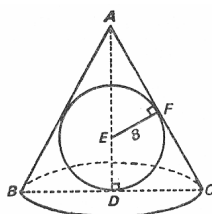
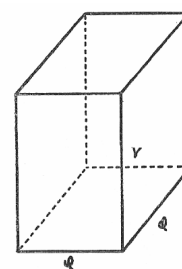
FG5. Determine o rectângulo de maior área que se pode inscrever num triângulo isósceles de base 20 cm e altura 40 cm, por forma que dois vértices do rectângulo pertençam à base do triângulo. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

FG6. Determine, de entre os rectângulos de área 81 cm^2 aquele que tem menor perímetro. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

FG9. De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede a , determine a que tem maior área. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

FG11. Determine a altura do cone de revolução de volume mínimo que pode ser circunscrito a uma esfera de raio r . (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

VM1. Considere os paralelepípedos rectângulos de base quadrada em que a soma das suas dimensões é igual a uma constante a . Determine, em função de a , a altura daquele que apresenta o máximo volume. (Marques 1979, p.43) (Exames oficiais)



VM2. Determine a altura do cone circular recto de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio 8 unidades. (Marques 1979, p.43)

VM3. Num cilindro de revolução está inscrito um prisma quadrangular regular. A secção feita no cilindro por um plano que contém o eixo, tem 30 cm de perímetro.

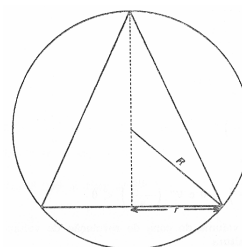
- a. Mostre que sendo x a medida, expressa em centímetros, do diâmetro de uma base do cilindro, o volume do prisma, em cm^3 , é dada pela expressão

$$\frac{15x^2 - x^3}{2}$$

- b. Atendendo à natureza do problema, determine o domínio da função assim definida.
- c. Determine o valor de x para o qual é máximo o volume do prisma.
- d. Esboce o gráfico da função em referencial cartesiano e indique as coordenadas do ponto de inflexão desse gráfico. (Marques 1979, p.43) (Exames oficiais)

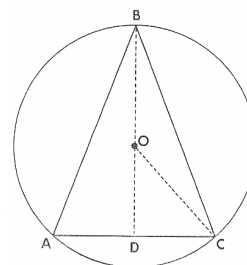


VM7. Entre todos os triângulos isósceles inscritos numa circunferência de raio constante R , determine, em função de R , a altura x daquele que, rodando em torno dessa altura, gera o cone de revolução de volume máximo. (Marques 1979, p.47) (Exames oficiais)



VM8. Considere o triângulo estritamente isósceles inscrito numa circunferência de raio 5 cm.

- a. Designando por x a medida da altura relativa ao lado desigual mostre que a área do triângulo pode ser dada em cm^2 pela expressão $A = x\sqrt{10x - x^2}$.
- b. Verifique que a área é máxima quando $x = 7,5$ cm. (Marques 1979, p.47)



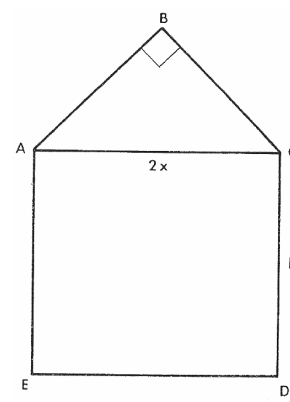
VM9. Um pentágono $[ABCDE]$ está decomposto num triângulo rectângulo e isósceles $[ABC]$ e um rectângulo $[ACDE]$. A área do pentágono é 12 cm^2 .

- a. Mostre que o perímetro y do rectângulo $[ACDE]$ pode obter-se pela fórmula

$$y = \frac{3x^2 + 12}{x}$$

- b. Recorrendo ao significado geométrico da derivada, determine uma equação da tangente

ao gráfico da função definida por $y = \frac{3x^2 + 12}{x}$ no ponto $(1, 15)$.



c. Determine x , de modo que seja mínimo o perímetro do rectângulo. (Marques 1979, p.47)

PF1. Dentre os rectângulos de perímetro igual a 20 cm determinar o que tem área máxima. (Fernandes, 1980, p. 240))

PF2. Dentre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 6 m, qual é aquele que tem área máxima. (Fernandes, 1980, p. 240)

PF5. Dentre os rectângulos de área igual a 64 dm² qual é aquele que tem o perímetro mínimo? (Fernandes, 1980, p. 250)

PF6. De entre os triângulos rectângulos cuja hipotenusa mede 8 m, qual é aquele que tem área máxima. (Fernandes, 1980, p. 250)

PF7. Os catetos de um triângulo rectângulo somam 40 metros. Determinar a hipotenusa do que tem maior área. (Fernandes, 1980, p. 250)

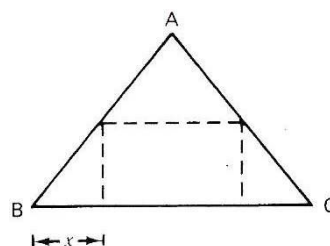
PF9. De entre os sectores circulares de perímetro igual a 8 metros, qual é o raio daquele que tem área máxima? (Perímetro do arco = Rn e área do sector = $\frac{R^2}{4}n$, n em radianos)(Fernandes, 1980, p. 250)

PF10. De entre os prismas quadrangulares regulares que têm de volume 8 m³, qual é aquele que tem área total mínima. (Fernandes, 1980, p. 250)

PF11. Dada uma esfera de raio igual a 1 metro determinar a medida do raio do cilindro de revolução inscrito de volume máximo. (Fernandes, 1980, p. 250)

PF12. A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado. (Fernandes, 1980, p. 250)

AC9. O triângulo $[ABC]$ é isósceles, sendo $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\text{ m}$; $\overline{BC} = 12\text{ m}$.



Pretendemos inscrever nele um rectângulo, da forma que a figura indica. Para que valor de x se obterá um rectângulo de área máxima e qual é o valor dessa área? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)

NVA6. Entre os rectângulos de perímetro 40 dm, calcule as dimensões do que tem maior área. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)

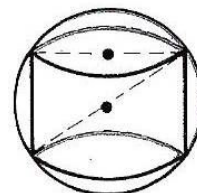
NVA8. A soma de todas as arestas de um prisma recto de base quadrada é 72 cm.

- a. Se x é a medida da aresta da base, mostre que o volume do prisma é dado pela fórmula

$$V = 18x^2 - 2x^3$$

- b. Calcule as dimensões do prisma de volume máximo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 244)

NVA12. Entre os cilindros de revolução inscritos numa superfície esférica de raio 2 dm, calcule as dimensões do que tem maior volume. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 247)



Problemas de Geometria Analítica

FG10. Considere um referencial o.n. no plano e os pontos $A = (0, a)$ e $B = (b, 0)$. Determine um ponto P do eixo Ox tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja mínimo. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

NVA4. Num mesmo referencial ortonormado consideraram-se o ponto $P(2, 3)$ e o gráfico da função

$$x \mapsto y = x^2 + \frac{5}{2}$$

Definir, pelas suas coordenadas, o ponto do gráfico da função mais próximo do ponto P . (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)

NVA13. Quais as coordenadas do ponto da recta de equação

$$2y + 3x = 4$$

mais próximo do ponto $(3,4)$? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)

NVA14. Entre as rectas que passam pelo ponto $P(2, 1)$ escreva a equação axial da que forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 248)

NVA15. Defina sobre a recta $y = x$ um ponto tal que a soma dos quadrados das distâncias aos pontos

$$A(1, 0), B(-1, 0), C(0, 6)$$

seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 249)

Problemas de Aritmética

PF3. Dois números têm por soma 12; determinar esses números de forma que a soma dos seus quadrados seja mínima. (Fernandes, 1980, p. 250)

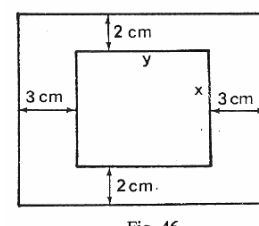
PF4. Dois números têm por soma 20; determinar esses números de forma que o seu produto tenha valor máximo. (Fernandes, 1980, p. 250)

AC4. De entre os pares de números reais positivos cujo produto é 64 qual é aquele em que a soma é mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)

NVA7. Decomponha 20 num produto de dois factores cuja soma seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)

Problemas de Medida em Contexto Real

FG3. Pretende-se imprimir um livro por forma que, em cada página, a mancha impressa seja um rectângulo de 216 cm^2 e com margens superior e inferior de 2 cm e margens laterais de 3 cm – Fig. 46.



Quais devem ser as dimensões mais económicas para o livro (admitindo que o custo do livro é tanto menor quanto menor for a área de cada página)? (Freitas e Gomes, 1979, p. 140)

FG7. Um lavrador pretende cercar com 1200 m de rede uma zona rectangular com a maior área possível, dividindo-a, ainda, em duas partes, paralelamente a um dos lados.

Qual a maior área que o lavrador pode cercar? (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

FG8. Pretende-se construir com chapa metálica um reservatório cilíndrico de base circular e capacidade 64 litros. Determine as dimensões do reservatório de forma que a quantidade de chapa a utilizar seja mínima. Considere os casos de o reservatório ter ou não ter tampa. (Freitas e Gomes, 1979, p. 159)

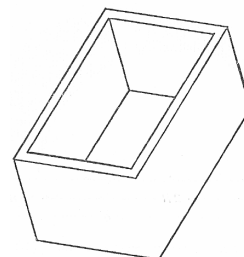
VM5. Na figura está representada uma caixa aberta em que a base é um rectângulo cujo comprimento é o dobro da largura.

a. Prove que, se a área total da caixa é 54 dm^2 , o volume da caixa é dado, em dm^3 , pela expressão $18x - \frac{2x^3}{3}$ em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

b. Determine o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume nesse caso.

c. Considere a função real de variável real definida pela expressão obtida em a) e determine os pontos de inflexão do seu gráfico.

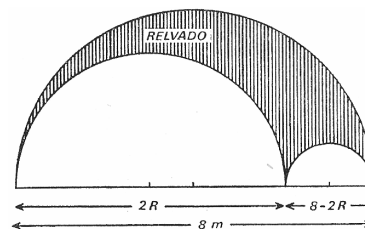
d. Esboce esse gráfico. (Pode utilizar um referencial não monométrico). (Marques 1979, p.45)



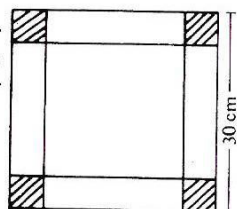
VM6. Num canteiro semi-circular cujo raio tem 4 metros de comprimento, são reservados, de acordo com a figura junta, dois canteiros, igualmente semi-circulares, destinados ao cultivo de flores, sendo para relvado a parte restante.

a. Mostre que a área do relvado mede $\pi(4R - R^2)$ metros quadrados.

b. Investigue quais as medidas que deverão ter os raios dos dois canteiros das flores, para que seja máxima a área do relvado. (Marques 1979, p.46)

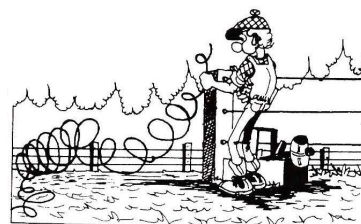


(Exames oficiais)



PF8. Com uma placa de latão de 30 cm de lado pretende-se fazer uma caixa sem tampa. Que dimensões devem ter os quadrados a cortar dos 4 cantos, para que esta tenha o máximo volume? (Fernandes, 1980, p. 250)

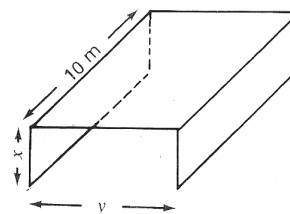
AC1. A maior área possível: Um indivíduo dispõe de 20 metros de arame com os quais quer vedar um pequeno parque de forma rectangular num terreno que



tem à sua disposição. Pretendendo obter a área máxima, que dimensões deve escolher para o parque? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 296)

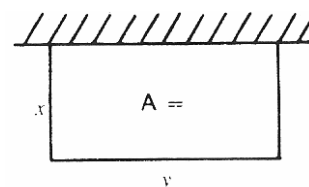
AC3. A construção mais barata: Pretende-se construir um túnel com a forma que a figura sugere, usando-se três placas rectangulares do mesmo material e espessura uniforme (duas laterais e uma em cima).

O túnel tem uma extensão de 10 m e a sua boca deve ter 72 m^2 de área. Que valores devem ter a largura e a altura do túnel para que a construção seja a menos cara possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 298)



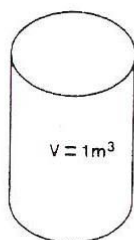
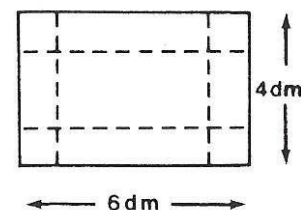
AC5. Pretendemos que um terreno de forma rectangular (em que um dos lados está encostado a um muro) tenha uma área de 50 m^2 .

Que dimensões deve ter o terreno para que o comprimento da vedação a utilizar ao longo dos outros três lados seja o menor possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)



AC7. Se cortarmos quatro quadrados iguais nos cantos de uma folha rectangular de $6 \text{ dm} \times 4 \text{ dm}$, poderemos dobrá-la e construir uma caixa aberta.

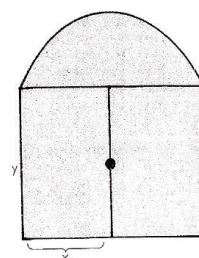
Qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar para que a caixa tenha volume máximo (indica um valor aproximado com erro inferior a 1 cm) (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)



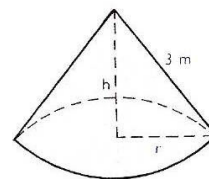
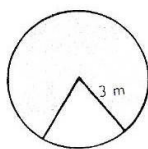
AC8. Quais devem ser as medidas do raio da base e da altura de um reservatório cilíndrico fechado com um volume de 1 m^3 , de modo que a sua área total seja mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 313)

NVA1. Uma janela tem a forma que a gravura ao lado reproduz: um rectângulo coroadado com um semicírculo. O perímetro da janela deve ser 714 cm .

Calcule as dimensões que permitem uma maior entrada de luz. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)



NVA2. Dispõe-se de um círculo de lona de 3m de raio. Cortando um sector circular pode construir-se uma tenda de campismo com a forma cónica. Para que a capacidade seja máxima, quais devem ser as dimensões da tenda (raio da base e altura)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 244)



NVA5. Pretende-se construir um cercado com a forma rectangular e com a área de 1200 m².

a. Mostre que o perímetro do cercado é dado pela fórmula

$$P = 2x + \frac{2400}{x}$$

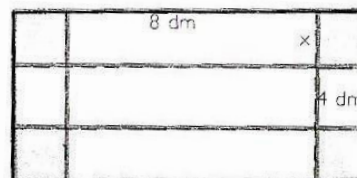
em que x representa o comprimento, em metros, do cercado.

b. Calcule as dimensões do cercado de modo que o perímetro seja mínimo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 243)

NVA9. Pretende-se construir um reservatório cilíndrico com a capacidade de 6280 m³. Quais devem ser as suas dimensões de forma que a sua área total seja mínima (menor custo)? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 245)

NVA10. Com chapas de latão de 8 dm/4 dm, cortando em cada canto um quadrado e fazendo dobragens convenientes, obtém-se caixas sem tampa.

Quanto deve medir o lado do quadrado, x, para que a capacidade seja máxima? (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 246)



NVA11. Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um rectângulo de comprimento duplo da largura.

a. Prove que, se o volume é 36 dm³ a área total em dm² é dada pela fórmula

$$A = \frac{108 + 2x^3}{x}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

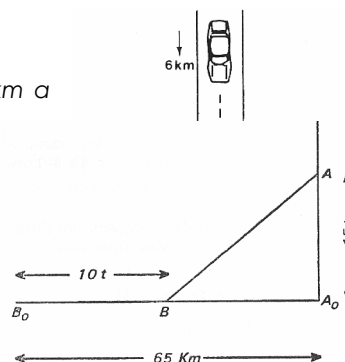
b. Calcule x de modo que a área seja mínima. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 247)

Problemas de Física

VM4. Às oito horas um navio B encontra-se a 65 km a Oeste de outro navio A. O navio B rumo a Leste, à velocidade de 10 km/h, enquanto A navega rumo ao Norte, com a velocidade de 15 km/h.

- a. Mostre que, em cada instante, em quilómetros, que separa os dois navios é dada pela expressão $\sqrt{(65-10t)^2 + 225t^2}$.

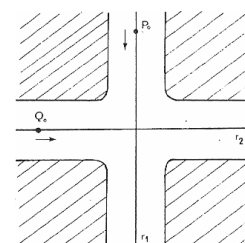
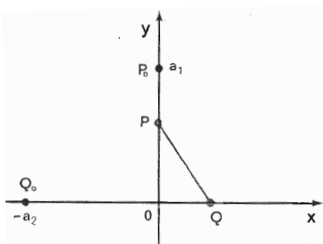
- b. Calcule a hora a que os dois navios se encontram à distância mínima. (Marques 1979, p.44) (Exames oficiais)



FG2. Dois pontos materiais P e Q movem-se sobre duas rectas perpendiculares r_1 e r_2 com movimentos uniformes de velocidades (algébricas) respectivamente v_1 e v_2 .

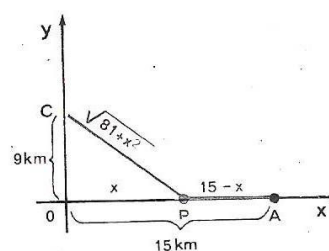
No instante inicial, isto é, no instante em que se começa a contar o tempo, P encontrava-se na posição P_0 à distância a_1 de r_2 e Q encontrava-se na posição Q_0 à distância a_2 de r_1 , como se esquematiza na Fig. 44.

Determinar o instante em que a distância dos pontos é mínima e calcular essa distância. (Freitas e Gomes, 1979, p.139)



FG4. Um ciclista vive num local isolado C, que dista 9 km do ponto O mais próximo de uma estrada rectilínea e alcatroada e pretende ir a uma aldeia A que dista 15 km de O, sobre essa estrada.

Supondo que o ciclista se desloca a 5 km/h na estrada alcatroada e a 4 km/h no acesso à estrada, determine em que ponto deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso total no menor tempo possível. (Freitas e Gomes, 1979, p. 141)

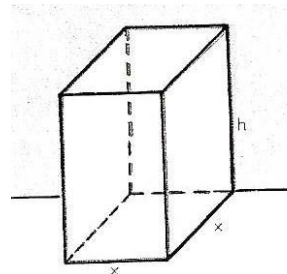


AC6. Dois automóveis deslocam-se, à mesma velocidade, em estradas perpendiculares e no sentido indicado pelas setas.

Um deles está a 6 km do cruzamento e o outro a 8 km do cruzamento. Quando é que a distância entre eles é mínima? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 312)

Problemas de Economia

NVA3. Pretende-se construir, encostado a uma parede, um reservatório de base quadrada e com a capacidade de 294 m^3 . Cada m^2 de face encostada à parede e da base fica por $1000\$00$ e cada m^2 das restantes faces fica por $2000\$00$.



- a. Representando por x a medida, em metros, da aresta da base, mostrar que o custo é dado pela fórmula

$$C = 1000 \left(3x^2 + \frac{2058}{x} \right).$$

- b. Calcular as dimensões do reservatório de modo que o custo seja mínimo e esse custo mínimo. (Neves, Vieira e Alves, 1988, p. 246)

AC2. O preço mais conveniente: A comissão de finalistas de uma escola secundária está a organizar um festival desportivo para angariar fundos. Tendo alugado o pavilhão de um clube da zona, calcularam que, vendendo por $150\$00$ cada bilhete, conseguiriam uma lotação de 500 pessoas. Porém, um estudo mais atento (baseado em sondagens) levou-os a concluir que, por cada $10\$00$ que baixassem àquele preço, teriam mais 50 pessoas a comprar o ingresso.

Supondo válidas estas previsões, qual é o preço de cada bilhete que assegura uma maior receita global? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 297)

C. Análise do período

Comecemos por fazer uma análise do programa oficial. Como vimos, a derivada é abordada no 11º ano, num capítulo respeitante à derivada, sendo precedido pelo estudo dos limites e continuidade. A parte referente ao estudo da derivada contém um ponto relativo às suas aplicações. Nesta altura começam a utilizar-se as calculadoras científicas, mas estas não são de grande auxílio para a resolução de problemas de optimização.

Relativamente aos cinco manuais analisados, averiguámos que, comparativamente ao período anterior, o número de problemas de optimização é

ligeiramente superior, cinquenta e seis, uma vez que também estudámos mais uma obra do que no período anterior. Na obra de Freitas e Gomes (FG) encontramos onze problemas de optimização; na de Verol Marques (VM) nove; na de Palma Fernandes (PF) doze; na de Abrantes e Carvalho (AC) nove e na de Neves, Vieira e Alves (NVA) encontramos dezasseis problemas de optimização.

Notámos também, através de um primeiro olhar pelos problemas de optimização deste período, que muitos já surgiram nas obras analisadas anteriormente, em particular os problemas que surgiram em exames oficiais.

Debrucemo-nos agora sobre as características dos problemas de optimização encontrados.

Começando pelo tipo de problema, observamos que a maioria dos problemas surgem como exercícios (trinta e quatro), sendo doze problemas apresentados como exemplos e apenas nove como exercícios resolvidos. Surge ainda uma demonstração e não detectámos nestes manuais nenhum relatório ou actividade de grupo. Na obra de Freitas e Gomes encontramos os quatro primeiros problemas sob a forma de exemplo (FG1, FG2, FG3, FG4) e os restantes sete sob a forma de exercícios. Na obra de Verol Marques todos os problemas se surgem sob a forma de exercício resolvido enquanto que na de Palma Fernandes encontramos um exemplo (PF1), uma demonstração (PF12) e os restantes são exercícios. Na de Abrantes e Carvalho, os três primeiros problemas surgem sob a forma de exemplo (AC1, AC2, AC3) e os restantes seis sob a forma de exercício. Por fim, na obra de Neves, Vieira e Alves os cinco primeiros problemas surgem também sob a forma de exemplo (NVA1, NVA2, NVA3, NVA4, NVA5) e os restantes sob a forma de exercício. Nota-se então que, a maioria dos manuais desta reforma, apresenta primeiro os problemas de optimização sob a forma de exemplo (com resolução) e posteriormente os exercícios de aplicação. Examinemos agora o problema que surge sob a forma de demonstração:

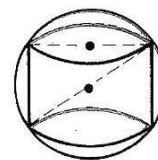
“ **(PF12)** A soma dos perímetros de uma circunferência e de um quadrado é constante. Demonstrar que a soma das áreas do círculo e do quadrado é mínima quando o diâmetro do círculo for igual ao lado do quadrado.”

Apesar deste surgir na parte destinada aos exercícios, o que se pretende fazer é uma demonstração, de tal modo que o aluno sabe, à partida, qual o resultado a que terá de chegar.

Quanto ao contexto em que o problema se enquadra, identificámos neste período problemas de todos os contextos, sendo grande parte de Geometria Métrica (vinte e quatro) ou em contexto real de medida (dezassete), ocorrendo os outros

contextos em número mais reduzido: cinco problemas de Geometria Analítica (FG10, NVA4, NVA13, NVA14, NVA15) quatro de Aritmética (AC4, PF3, PF4, NVA7), quatro de Física (AC6, VM4, FG2, FG4) e dois de Economia (NVA3, AC2). Vejamos alguns dos problemas:

“ **(NVA12)** Entre os cilindros de revolução inscritos numa superfície esférica de raio 2 dm, calcule as dimensões do que tem maior volume.”



Este é um problema de Geometria Métrica em que temos um cilindro inscrito numa esfera. O enunciado vem acompanhado de uma figura simples, ou seja, sem qualquer dado, mas alguns traços na figura ajudam a visualizar a forma de determinar a função a otimizar, em ordem a apenas uma variável.

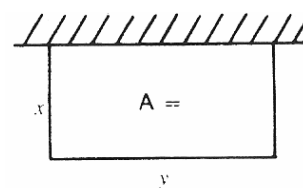
“ **(NVA13)** Quais as coordenadas do ponto da recta de equação

$$2y + 3x = 4$$

mais próximo do ponto (3,4)?”

Este é um problema de Geometria Analítica, sem qualquer tipo de ajuda para a resolução, em que se pretende achar a distância mínima de um ponto a uma recta.

“ **(AC5)** Pretendemos que um terreno de forma rectangular (em que um dos lados está encostado a um muro) tenha uma área de 50 m².

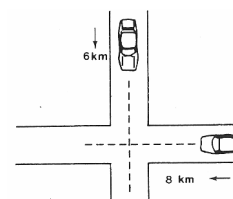


Que dimensões deve ter o terreno para que o comprimento da vedação a utilizar ao longo dos outros três lados seja o menor possível?”

Este é um problema de medida em contexto real em que se procura determinar o menor perímetro de um rectângulo sabendo a sua área.

“ **(AC6)** Dois automóveis deslocam-se, à mesma velocidade, em estradas perpendiculares e no sentido indicado pelas setas.

Um deles está a 6 km do cruzamento e o outro a 8 km do cruzamento. Quando é que a distância entre eles é mínima?”



Este último é um problema da área da Física em que se intenta determinar a distância mínima entre dois objectos (automóveis), sabendo que se deslocam à mesma velocidade e a distância a que se encontravam inicialmente.

Relativamente à função a otimizar, vêem-se, neste período, todos os tipos. Destacam-se os problemas em que se procura otimizar uma área (vinte e cinco) ou um volume (treze) que surgem em elevado número.

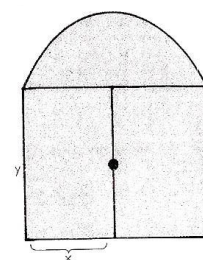
Nos problemas em que se optimiza uma área surgem as situações seguintes: optimizar a área de figuras planas ou de sólidos geométricos. Relativamente às figuras

planas, surgem situações em que se pretende optimizar a área de um rectângulo dado o valor do perímetro (PF1, NVA6, AC1, FG7), o raio da circunferência circunscrita ao rectângulo (FG1) ou as dimensões de um triângulo isósceles circunscrito ao rectângulo (FG5, AC9); optimizar a área de um triângulo rectângulo dada a medida da hipotenusa (FG9, PF2, PF6), de um triângulo rectângulo dada a soma das medidas dos catetos (PF7), de um triângulo isósceles dado o raio da circunferência circunscrita (VM8) ou de um triângulo formado pelas rectas que passam num determinado ponto e os eixos (NVA14). No problema PF9 determina-se a área máxima de um sector circular dado o seu perímetro; no problema FG3 pretende-se determinar a menor área da página de um livro dada a área de impressão e a medida das margens. Aparecem também situações em que se pretende optimizar a área de figuras planas compostas: No problema VM6 determina-se a área máxima de um canteiro delimitado por três semicircunferências, estando duas inscritas na terceira; dado o raio da terceira, no problema NVA1 pretende-se determinar a área máxima de uma figura composta por um rectângulo coroado com um semicírculo, dado o perímetro dessa figura; no problema PF12 pretende determinar-se a soma das áreas mínimas de círculo e de um quadrado dada a soma dos perímetros. Passando agora para os problemas em que se pretende determinar a área de um sólido geométrico, encontramos situações em que se pretende determinar: a área total mínima de um cilindro, prisma ou paralelepípedo dado o seu volume (AC8, NVA9, FG8, PF10, AC3, NVA11). Veja-se um exemplo em que se acha a área máxima de uma figura composta por um rectângulo e um semicírculo:

“ **(NVA1)** Uma janela tem a forma que a gravura ao lado reproduz: um rectângulo coroado com um semicírculo. O perímetro da janela deve ser 714 cm.

Calcule as dimensões que permitem uma maior entrada de luz.”

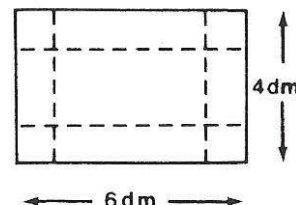
Nos problemas em que se optimiza um volume dão-se as situações: optimizar o volume de um cone circunscrito a uma esfera, dado o raio da esfera (VM2, FG11); o volume de um paralelepípedo ou prisma, dada a soma das suas dimensões (VM1, NVA8); o volume de um prisma dado o perímetro de uma secção feita (VM3); o volume de um cilindro, dado o raio de uma esfera que o circunscreve (OF11, NVA12); o volume de uma caixa de base rectangular, dada a sua área (VM5); o volume de uma caixa, dadas as dimensões da folha utilizada para a construir (PF8, AC7, NVA10); o volume de um cone dado o raio do sector circular utilizado para o construir (NVA2) ou optimizar o volume de um cone de revolução, dado o raio da



circunferência que contem o triângulo que o gera (VM8). Vejamos um exemplo da situação que surge em maior número:

“ **(AC7)** Se cortarmos quatro quadrados iguais nos cantos de uma folha rectangular de 6 dm x 4 dm, poderemos dobrá-la e construir uma caixa aberta.

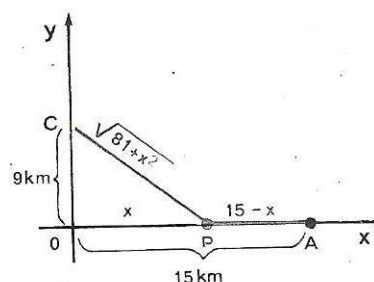
Qual deve ser a medida do lado do quadrado a cortar para que a caixa tenha volume máximo (indica um valor aproximado com erro inferior a 1 cm)”



Relativamente aos problemas restantes, em seis optimiza-se uma distância; em cinco o perímetro; em três a soma; num problema pretende-se optimizar um produto; num pretende-se optimizar o tempo e em dois pretende-se optimizar o custo. Quanto aos problemas em que se pretende optimizar a distância, no problema FG10 determina-se quando é mínima a soma da distância entre três pontos, nos problemas VM4, AC6 e FG2 pretende-se determinar a distância mínima entre dois objectos, sabendo a velocidade a que cada um se desloca e a distância a um determinado ponto; no problema NVA13 pretende-se determinar o ponto de uma recta cuja distância a um determinado ponto é mínima, e, por fim, no problema NVA15 pretende-se determinar quando é mínima a soma dos quadrados das distâncias entre uma recta e três pontos. Relativamente aos problemas em que se pretende optimizar um perímetro, em todos eles se pretende determinar o perímetro de um rectângulo dada a sua área (FG6, VM9, PF5, AC5, NVA5). Nos problemas aritméticos AC4, PF3, NVA7 pretende-se optimizar uma soma de dois números ou dos seus quadrados, dado o seu produto e no PF4 optimiza-se o produto de dois números sabendo a sua soma. No problema FG4 vai-se optimizar o tempo que um ciclista demora a percorrer um percurso repartido em duas partes em que se desloca a velocidades diferentes. Por fim, no problema AC2, pretende-se determinar o preço de um bilhete para tornar máximo o lucro, tendo em conta o número de pessoas que diminui se o preço aumentar um determinado valor e no problema NVA3 determinam-se as dimensões do reservatório de modo que o custo seja mínimo. Vejamos um exemplo de optimização de tempo que surge neste período:

“ **(FG4)** Um ciclista vive num local isolado C, que dista 9 km do ponto O mais próximo de uma estrada rectilínea e alcatroada e pretende ir a uma aldeia A que dista 15 km de O, sobre essa estrada.

Supondo que o ciclista se desloca a 5 km/h na estrada alcatroada e a 4 km/h no acesso à estrada, determine em que ponto deve atingir a estrada

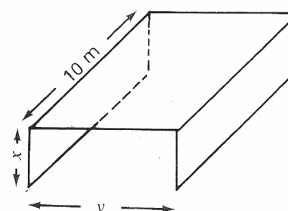


alcatroada para fazer o percurso total no menor tempo possível."

Passando agora para as figuras ou esquemas auxiliares do enunciado, concluímos que trinta e oito dos problemas não apresentam qualquer esquema, onze destes são os problemas de Geometria Analítica, Aritmética e Economia que não vêm acompanhados de qualquer tipo de figura ou esquema auxiliar no enunciado; quinze apresentam figuras com dados e apenas três apresentam figuras simples (VM5, AC1, NVA12). É ainda de referir que, por exemplo, no problema (FG4) se verifica que os dados estão representados num sistema de eixos coordenados, facilitando a compreensão do problema. Reparemos no exemplo seguinte em que temos uma figura com dados, de extrema importância, para a resolução do problema:

" (AC3) A construção mais barata: Pretende-se construir um túnel com a forma que a figura sugere, usando-se três placas rectangulares do mesmo material e espessura uniforme (duas laterais e uma em cima).

O túnel tem uma extensão de 10 m e a sua boca deve ter 72 m² de área. Que valores devem ter a largura e a altura do túnel para que a construção seja a menos cara possível? (Abrantes e Carvalho, 1984, p. 298)



Os dados são numéricos em quarenta e oito dos problemas surgindo de forma genérica em apenas oito (FG1, FG2, FG9, FG10, FG11, VM1, VM7, PF12). É ainda de referir que o livro de Freitas e Gomes apresenta o primeiro e o último problema com dados genéricos; o livro de Verol Marques apresenta o primeiro problema com dados genéricos e o livro de Palma Fernandes apresenta o último problema com dados genéricos. O livro de Abrantes e Carvalho e o livro de Neves Vieira e Alves apenas apresentam problemas com dados numéricos.

A maioria dos problemas apresenta um enunciado simples (quarenta e seis) e apenas dez dos problemas contêm uma resolução encaminhada. O livro de Freitas e Gomes, o de Palma Fernandes e o de Abrantes e Carvalho apenas mostram problemas com enunciado simples. No livro de Neves Vieira e Alves apenas quatro dos quinze problemas são de resolução encaminhada (NVA3, NVA5, NVA8 e NVA11) e no de Verol Marques seis dos nove problemas são de resolução encaminhada (VM3, VM4, VM5, VM6, VM8, VM9). Observemos alguns dos problemas com resolução encaminhada:

" (NVA11) Pretende-se construir uma caixa, sem tampa, em que a base seja um rectângulo de comprimento duplo da largura.

a. Prove que, se o volume é 36 dm³ a área total em dm² é dada pela fórmula

$$A = \frac{108 + 2x^3}{x}$$

Em que x é a medida, em dm, da largura do rectângulo da base.

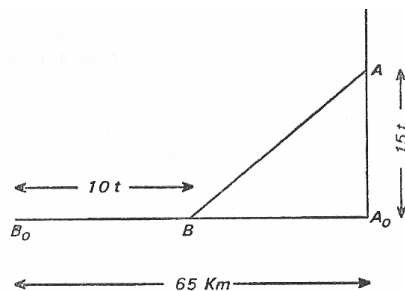
b. Calcule x de modo que a área seja mínima.”

“ **(VM4)** Às oito horas um navio B encontra-se a 65 km a Oeste de outro navio A. O navio B rumo a Leste, à velocidade de 10 km/h, enquanto A navega rumo ao Norte, com a velocidade de 15 km/h.

a. Mostre que, em cada instante, em quilómetros, que separa os dois navios é dada pela expressão

$$\sqrt{(65-10t)^2 + 225t^2}.$$

b. Calcule a hora a que os dois navios se encontram à distância mínima.”



Concluimos então que, em ambas as situações identificamos uma primeira alínea em que se procura que o aluno demonstre que a função a otimizar é a função dada e na segunda alínea que o aluno determine a solução óptima. Deste modo, mesmo que o aluno não consiga resolver a primeira alínea, consegue fazer a segunda, uma vez que já tem a expressão a otimizar.

A função auxiliar surge implicitamente na maioria dos problemas (trinta e dois) e surge explicitamente em vinte e quatro. No manual de Freitas e Gomes apenas dois problemas têm a função auxiliar de forma explícita (FG3, FG6). Os problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita são aqueles em que é dado, por exemplo, o valor da área, do perímetro, do volume, da soma ou do produto. Nestas situações o aluno sabe à partida que terá de utilizar essas fórmulas para determinar o valor de uma variável em função da outra. Os problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita são aqueles em que, por exemplo, é dada a medida da hipotenusa, do raio ou dos lados de uma figura e a partir daí o aluno tem de relacionar os dados para determinar o valor de uma variável em função da outra. Nos problemas de Física ou Economia a função auxiliar surge sempre implicitamente. Examinemos o exemplo de um problema de economia:

“ **(AC2)** O preço mais conveniente: A comissão de finalistas de uma escola secundária está a organizar um festival desportivo para angariar fundos. Tendo alugado o pavilhão de um clube da zona, calcularam que, vendendo por 150\$00 cada bilhete, conseguiriam uma lotação de 500 pessoas. Porém, um estudo mais atento (baseado em sondagens) levou-os a concluir que, por cada 10\$00 que baixassem àquele preço, teriam mais 50 pessoas a comprar o ingresso.

Supondo válidas estas previsões, qual é o preço de cada bilhete que assegura uma maior receita global?”

Num primeiro olhar sobre este problema, não é imediata a forma de calcular a função a otimizar apenas em função de uma só variável. Em primeiro lugar o aluno terá de apurar que a receita resulta do produto entre o número de bilhetes vendidos e o preço e logo a seguir terá de ver qual o aumento no número de pessoas correspondente a cada diminuição de 10\$00 no preço do bilhete. Só depois consegue chegar à função a otimizar em ordem apenas a uma variável.

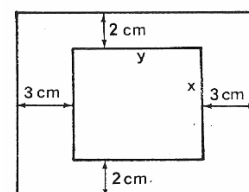
Apreciemos agora quais as noções aplicadas para a resolução dos problemas. Vemos então que, não existe uma noção que se destaque em relação às outras. A noção mais aplicada é o Teorema de Pitágoras que aparece em doze problemas, esta noção surge associada a problemas com triângulos em que necessitamos das medidas dos lados, ou em figuras inscritas, como, por exemplo triângulos em circunferências ou pirâmides/cones em esferas em que temos a medida do raio da circunferência ou da esfera e é necessário determinar a medida dos lados da figura inscrita. A fórmula de cálculo da área surge em dez problemas e a noção de perímetro também noutros dez e em cinco é aplicada a fórmula do volume. Estas surgem, normalmente, em problemas em que a função auxiliar aparece explicitamente, ou seja, no enunciado é dado o valor do perímetro, área ou volume da figura e a partir daí consegue-se determinar uma das variáveis em função da outra. A noção de distância surge em nove problemas, normalmente associada a problemas de Geometria Analítica ou de Física em que se pretende determinar a distância entre objectos ou em problemas de Geometria Métrica ou de Contexto Real de Medida em que é preciso de determinar a medida do lado ou parte do lado de uma figura em função de outros dados. Observemos dois exemplos:

“ **(FG10)** Considere um referencial o.n. no plano e os pontos $A = (0, a)$ e $B = (b, 0)$.

Determine um ponto P do eixo Ox tal que $\overline{AP} + \overline{PB}$ seja mínimo.”

“ **(FG3)** Pretende-se imprimir um livro por forma que, em cada página, a mancha impressa seja um rectângulo de 216 cm^2 e com margens superior e inferior de 2 cm e margens laterais de 3 cm .

Quais devem ser as dimensões mais económicas para o livro (admitindo que o custo do livro é tanto menor quanto menor for a área de cada página)?”



No primeiro caso temos um problema de Geometria Analítica em que se utiliza a noção de distância entre dois pontos. No segundo surge um problema em contexto real de medida em que se utiliza a noção de distância para chegar à medida de cada um dos lados do rectângulo com base na medida das partes do lado que nos são dadas.

A noção de semelhança de figuras detecta-se em cinco problemas, normalmente associada a problemas com figuras inscritas. Em quatro aplica-se a noção de velocidade, problemas da área da Física. Nos de Aritmética aplica-se a noção de soma (três problemas) ou de produto (dois problemas). A noção de função (equação da recta) aplica-se uma vez, num problema de Geometria Analítica e em nenhum problema se utilizam as funções trigonométricas. É ainda de referir que existem problemas em que é necessário aplicar mais do que uma noção, por exemplo, no problema AC9 aplica-se o Teorema de Pitágoras e a semelhança de figuras; nos problemas físicos é necessário, por vezes, usar a noção de velocidade e o Teorema de Pitágoras.

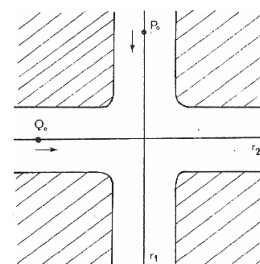
Relativamente à estratégia utilizada, apurámos que apenas vinte e três problemas aparecem, pela primeira vez; dos restantes, vinte e quatro já surgiram em manuais anteriores (FG1, FG6, FG7, FG8, FG9, PF2, PF3, PF4, PF5, PF6, PF8, PF9, PF11, PF12, AC2, AC4, AC7, AC8, NVA7, NVA8, NVA9, NVA10, NVA11, NVA12). Seis são retirados de enunciados de exames (VM1, VM3, VM4, VM5, VM6, VM7) e três pertenceram já a uma das obras históricas analisadas (PF1, PF10, NVA6).

Tal como no período anterior, a função que identificámos mais vezes é a função polinomial (vinte e cinco), seguida da função racional (dezoito) e as funções irracionais surgem em treze problemas. Os restantes tipos de funções não aparecem em nenhum problema. Note-se que todos os manuais analisados contêm os três tipos de funções. As funções irracionais vêm associadas a problemas em que se aplica o Teorema de Pitágoras ou a noção de distância, enquanto que as funções racionais surgem associadas a problemas em que se aplica a noção de área, volume, produto ou semelhança de figuras.

Apenas vinte e dois problemas mostram resolução. O esquema utilizado para cálculo dos extremos em catorze dos problemas é o cálculo dos zeros seguido do estudo do sinal. Apenas cinco problemas fazem o estudo do sinal da segunda derivada e os restantes dois problemas só calculam os zeros. No livro de Freitas e Gomes encontramos um problema em que apenas se calculam os zeros da derivada e os restantes que apresentam o cálculo dos zeros da derivada e o estudo do sinal. No livro de Verol Marques encontramos as três situações distintas. No livro de Palma Fernandes, no livro de Abrantes e Carvalho e ainda no livro de Neves Vieira e Alves todos os exercícios que apresentam solução são resolvidos da mesma forma: Cálculo dos zeros da derivada e estudo do seu sinal. Vejamos algumas situações:

“ (FG2) Dois pontos materiais P e Q movem-se sobre duas rectas perpendiculares r_1 e r_2 com movimentos uniformes de velocidades (algébricas) respectivamente v_1 e v_2 .

No instante inicial, isto é, no instante em que se começa a contar o tempo, P encontrava-se na posição P_0 à distância a_1 de r_2 e Q encontrava-se na posição Q_0 à distância a_2 de r_1 , como se esquematiza na Fig. 44.



Determinar o instante em que a distância dos pontos é mínima e calcular essa distância.

Considerando um sistema de eixos com origem no ponto de encontro das rectas, Fig. 45, a ordenada do ponto P no instante t será

$$y = a_1 - v_1 t$$

e a abcissa do ponto Q será

$$x = -a_2 - v_2 t$$

A distância dos dois pontos será nesse instante

$$\rho = \sqrt{(a_1 - v_1 t)^2 + (-a_2 - v_2 t)^2}$$

ou seja

$$\rho = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2) - 2(a_1 v_1 + a_2 v_2)t + (v_1^2 + v_2^2)t^2}$$

Trata-se, então, de averiguar da existência de um mínimo para a função $\rho(t)$.

Se este mínimo existe, ele corresponderá ao mínimo da função $\rho^2(t)$ e reciprocamente. Por isso e por simplicidade, vamos trabalhar com esta função que designaremos por $f(t)$. Tem-se

$$\frac{df}{dt} = -2(a_1 v_1 + a_2 v_2) + 2(v_1^2 + v_2^2)t$$

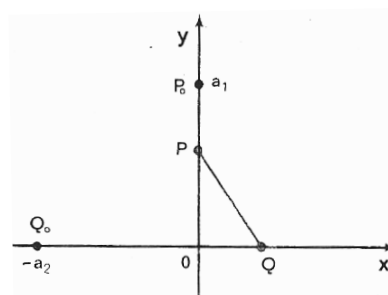
derivada esta que se anula para $t = \frac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$

Nesse caso a própria natureza do problema indica que se trata de um mínimo cujo valor é, como facilmente se pode calcular,

$$\frac{(a_1 v_2 - a_2 v_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

Então, $\rho = \frac{|a_1 v_2 + a_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$ é a distância mínima procurada."

Confirmamos que neste problema, o autor faz o cálculo dos zeros da derivada, como só obteve um valor, conclui de imediato que esse é o ponto em que se atinge o valor mínimo.



“ (VM2) Determine a altura do cone circular recto de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio 8 unidades.

Sendo x a altura do cone e y o raio da base.

Da semelhança de triângulos $[AEF]$ e $[ADC]$ resulta:

$$\frac{8}{y} = \frac{x-8}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{64}{y^2} = \frac{(x-8)^2}{x^2 + y^2}$$

$$64x^2 + 64y^2 = y^2(x-8)^2$$

$$64x^2 = y^2(x^2 - 16x + 64 - 64)$$

$$y^2 = \frac{64x^2}{x^2 - 16x}$$

Volume do cone:

$$V = \frac{\pi y^2 x}{3}$$

$$\therefore V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{64x^3}{x^2 - 16x}$$

$$V = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{x^2}{x-16}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{2x^2 - 32x - x^2}{(x-16)^2}$$

$$V' = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{x^2 - 32x}{(x-16)^2}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 32x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 32$$

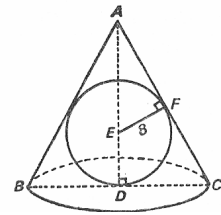
Como $x \neq 0$ é $x = 32$

$$V'' = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{(2x-32)(x-16)^2 - 2(x-16)(x^2 - 32x)}{(x-16)^4}$$

$$V'' = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{2(x-16)^3 - 2(x-16)x(x-32)}{(x-16)^4}$$

$$V''(32) = \frac{64\pi}{3} \cdot \frac{2 \cdot 16^3}{16^4} > 0$$

Como $V'(32) = 0 \wedge V''(32) > 0$, o volume do cone é mínimo quando a altura do cone for 32 unidades.”



Neste problema, após o cálculo dos zeros da derivada, confirma-se através da segunda derivada que num dos valores obtidos a função tem um mínimo. Apesar de se ter obtido dois zeros da derivada apenas o valor diferente de zero é considerado.

Quanto aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares na resolução dos problemas verificamos que, em onze problemas é utilizado o quadro de monotonia; em nove surge uma figura na resolução; em dois surge o gráfico da função a otimizar e em quatro não é utilizado qualquer auxiliar. Os problemas com resolução da obra de Abrantes e Carvalho e da obra de Neves, Vieira e Alves incluem sempre o quadro de monotonia. Dos quatro problemas com resolução da obra de Freitas e Gomes, dois trazem uma figura e os outros dois não apresentam nada. Na obra de Verol Marques apenas um exercício não apresenta nada; seis apresentam uma figura e três incluem quadro de monotonia. Nos dois exercícios resolvidos da obra de Palma Fernandes, um apresenta quadro de monotonia e o outro não apresenta nada. É ainda de referir que existe um problema que apresenta figura e quadro de monotonia (VM4) e existe também um problema que apresenta figura, quadro de monotonia e gráfico (AC1). Consideremos este último exemplo:

Problema 1: A maior área possível.

Um indivíduo dispõe de 20 metros de arame com os quais quer vedar um pequeno parque de forma rectangular num terreno que tem à sua disposição. Pretendendo obter a *área máxima*, que dimensões deve escolher para o parque?



■ Esquema:

$A = x \cdot y$

x y

Simplificando (e *matematizando*) o enunciado, o problema consiste em determinar, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, qual é aquele que tem maior área.

Designando por x e y as dimensões do rectângulo será

$$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$$

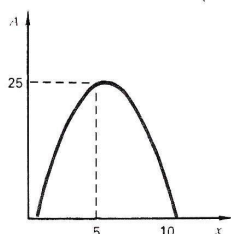
$P = 2x + 2y = 20$

e, como a área do rectângulo é dada por $A = x \cdot y$, ter-se-á

$$A = x \cdot (10 - x) \quad \text{ou seja} \quad A = 10x - x^2$$

expressão da área (A) em função de uma das dimensões (x).

■ Gráfico de $x \mapsto A = 10x - x^2$ no intervalo $[0, 10]$:



Para que valor de x obtemos o valor máximo de A ?

Derivando: $A' = D(10x - x^2)$, logo $A' = 10 - 2x$.

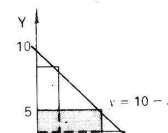
Facilmente se vê que A' se anula para $x = 5$, sendo positiva à esquerda de 5 e negativa à direita de 5.

Então A tem um máximo para $x = 5$, sendo 25 o valor da função nesse ponto. A área máxima é portanto de 25 m².

x	5		
$A' = 10 - 2x$	+	0	-
$A = 10x - x^2$	↗ 25 ↘		

máx.

Devendo ser $x = 5$, então também $y = 5$ (recorda que $y = 10 - x$) pelo que se conclui que o quadrado de lado 5 é, de entre todos os rectângulos de perímetro 20, aquele que tem **maior área**.



Observamos que este problema apresenta uma resolução extremamente completa. Está dividida em duas partes, um corpo principal onde surge toda a resolução do problema e uma coluna na margem do manual onde aparecem esquemas e gráficos.

Finalmente, em relação ao valor pedido, este aparece de forma explícita, em vinte e nove dos problemas e implicitamente nos restantes dezassete. Na obra de Verol Marques surge sempre explicitamente.

Assim sendo, este período é caracterizado por problemas que surgem sob a forma de exercício. Encontram-se mais problemas em contexto real de medida que nos períodos anteriores e, tal como no período anterior, o que mais se optimiza é a área ou o volume. Existe também um aumento no número de problemas que contêm figuras com dados. O enunciado é simples na maioria dos problemas. As noções mais utilizadas são: o Teorema de Pitágoras, noção de perímetro e de área e a noção de distância.

Quanto à estratégia, notámos que existem mais problemas que já apareceram anteriormente, essencialmente noutros manuais, do que problemas que surgem pela primeira vez, estando a função a optimizar, neste período, mais repartida entre polinomial, racional e irracional. Por fim, em relação ao esquema de cálculo, nota-se que na maioria dos problemas que vêm acompanhados da resolução esta é feita pelo cálculo dos zeros da derivada e do estudo do seu sinal, apresentando grande parte destes problemas o quadro de monotonia.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.4. A LEI DE BASES DO SISTEMA EDUCATIVO DE 1986

3.4.1. A REFORMA DE ROBERTO CARNEIRO E A LEI DE BASES DO SISTEMA EDUCATIVO (1986)

A. Análise do programa oficial

A 14 de Outubro de 1986 foi publicada a Lei de Bases do Sistema Educativo. Esta obrigava a uma reforma do sistema de ensino e definia princípios e orientações básicas para uma reorganização dos planos curriculares dos ensinos básico e secundário. A Comissão de Reforma do Sistema Educativo (CRSE) encarregou-se de interpretar as orientações curriculares da Lei de Bases, tomando as opções curriculares fundamentais, no que respeita aos critérios de selecção das matérias curriculares e aos princípios orientadores da estrutura curricular. Ficou definida então a configuração da educação secundária, nos seus objectivos, organização estrutural e plano de estudos.

O Ensino Secundário, composto por 3 anos, distribui-se por quatro agrupamentos distintos: 1) Científico-Natural, 2) Artes, 3) Económico-Social e 4) Humanidades. Cada um deles está subdividido em dois cursos: Curso Geral e Curso Tecnológico. Estando o primeiro vocacionado para os alunos que pretendiam prosseguir os seus estudos e o segundo vocacionado para a vida activa.

Neste quadro geral, a Matemática aparece como disciplina da Formação Específica, de vários agrupamentos, e a que é atribuída uma carga horária semanal de 4 horas em cada um dos anos do Ensino Secundário. Em 1987 é divulgado o documento Proposta de Reorganização dos Planos Curriculares dos Ensinos Básico e Secundário.

É neste quadro que é elaborado o programa do Ensino Secundário de Matemática, publicado em 1989, com uma primeira aplicação experimental, em algumas escolas no ano lectivo de 1991/92 e depois, desde 1993, com a aplicação generalizada em todas as escolas do país.

Com esta reforma foram criadas duas disciplinas distintas na área da Matemática: Matemática e Métodos Quantitativos. A primeira encorpava o agrupamento Científico-Natural, Artes e Económico-Social e a segunda o agrupamento Humanidades.

Analisaremos apenas o programa da primeira, uma vez que a segunda não contempla, no seu estudo, a Análise Infinitesimal.

Esta reforma marca a diferença em relação a todas as outras vistas até agora, já que é a primeira que se refere explicitamente aos problemas de optimização. É também inovadora em relação às ferramentas a utilizar, em particular para o estudo de funções, uma vez que contempla a utilização da calculadora gráfica e do computador no estudo das funções. Nessa altura não é ainda obrigatório o uso da calculadora gráfica na sala de aula pelo que as ferramentas auxiliares acabam por praticamente não ser utilizadas. Um outro aspecto a salientar é o facto de a derivada fazer parte do programa do 11º e do 12º ano e não apenas de um ano.

Uma vez que no 10º ano também se efectua o estudo de funções, iremos também analisar esse programa.

Examinemos então como ficou estruturado o programa experimental da disciplina de Matemática para o 10º ano.

Programas do Ensino Secundário de 1991

(Para aplicação em regime de experiência pedagógica)

10º Ano

Funções I – Generalidades. Função quadrática

- *Funções definidas por tabelas e por fórmulas; interpretação e elaboração de gráficos por pontos. Características gerais de uma função.*
- *Função quadrática*
- *Lógica. Primeiras leis de De Morgan. Quantificadores.*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Analisar fórmulas da Geometria e de outras disciplinas para identificar funções de uma variável.*
- *Identificar em gráficos dados ou construídos (calculadora) domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonia, **extremos**, taxa de variação média num dado intervalo, injectividade de uma função e interpretar o fenómeno por ela descrito.*
- *Determinar, com o auxílio do gráfico e da calculadora, o comportamento da função numa vizinhança de pontos especiais do domínio.*
- ***Resolver problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a um gráfico.***

Pelo que se observa que, apesar de não surgir de forma explícita o estudo dos problemas de optimização, mas como se calculam extremos a partir da calculadora e se pretende fomentar a resolução de problemas, podemos encontrar nos manuais escolares alguns problemas de optimização.

Repare-se agora como ficou estruturado o programa experimental da disciplina de Matemática para o 11º ano.

11º Ano

Funções III – Limites. Derivadas

- Limites e continuidade de funções
- Derivação de funções racionais. Segunda derivada. Aplicações
 - Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação; interpretação geométrica
 - Teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração)
 - Derivada da soma e do produto (com demonstração)
 - Derivada da potência e do quociente (informação)
 - Segunda derivada
 - **Aplicação da 1ª e da 2ª derivada ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades.**
 - Assíntotas verticais e não verticais.

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- Calcular derivadas usando a definição (em casos simples), ou as regras de derivação.
- Determinar a tangente ao gráfico de uma função dada num ponto dado.
- Fazer o estudo analítico duma função racional e aplicá-lo num traçado de gráficos.
- Identificar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolvê-las.
- **Resolver problemas de “máximos e mínimos”**

Este programa vem acompanhado de algumas indicações metodológicas. Em relação ao nosso tema há a seguinte indicação:

Os **problemas de optimização** devem ser acessíveis e ter algum interesse prático. Exemplo:

“De uma folha de cartão rectangular de 1m x 0,8m retira-se um quadrado em cada canto, para construir uma caixa sem tampa”. Quando é que a capacidade da caixa é máxima?

Observámos que neste programa se refere, pela primeira vez, o estudo dos problemas de optimização. Assim, após aprender a calcular derivadas, os alunos devem resolver os respectivos problemas de aplicação, em particular problemas de optimização. Nas indicações metodológicas apresentam o exemplo de um problema de optimização de um volume.

Também o programa para o 12º ano contempla o estudo da derivada. Vejamos como ficou estruturado este programa, no capítulo dedicado às derivadas.

12º Ano

Funções IV – Complementos sobre Derivadas

- *Derivada da função inversa e da função composta; aplicações. Derivadas sucessivas. Derivadas de funções implícitas.*
- *Derivada da função inversa e derivada da função composta; aplicação à derivada de $\sqrt[n]{f(x)}$*
- *Derivada de x^α , com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^+$ (informação)*
- *Derivada da função implícita.*
- *Estudo de funções irracionais.*
- *Funções irracionais: domínio, continuidade*

(Programa de Matemática, 10º-12º anos, 1991)

Nesta parte do programa surgem como objectivos:

- *Derivar funções compostas*
- *Fazer o estudo e gráfico de funções irracionais simples envolvendo apenas um radical quadrático ou cúbico.*

Surgem também algumas indicações metodológicas. Em relação ao nosso tema surge a seguinte indicação:

*Fazer o estudo de algumas funções irracionais dos tipos $\sqrt{x-3}$, $\sqrt[3]{x^2-x}$, as quais podem surgir ligadas a um **problema de optimização** como:*

“Determinar o rectângulo de área máxima que se pode inscrever num semicírculo de raio 10m.”

Apurámos então que, apesar de os conteúdos programáticos não fazerem referência às aplicações das derivadas, estes constam nas indicações metodológicas. Adverte-se então que se faça o estudo de algumas funções irracionais, podendo estas

estar ligadas a um problema de optimização. O exemplo apresentado é de um problema em que se pretende fazer a optimização de uma área.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

Relativamente às calculadoras, apenas eram utilizadas, pelos alunos, as calculadoras científicas, muito utilizadas para os cálculos estatísticos. De qualquer forma os professores podiam já utilizar as calculadoras gráficas como material de apoio às aulas.

B. Análise dos Manuais Escolares

Para esta reforma seleccionámos três manuais que iremos analisar para os três anos lectivos. Estes manuais foram seleccionados dado que foram os manuais mais utilizados pelos professores nesta época.

Vejamos agora as características de cada um dos manuais.

Manuais do 10º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1992, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca Pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é composto por 327 páginas repartidas por cinco unidades. Apesar de não analisarmos o programa para o 10º ano, uma vez que este não refere os problemas de optimização nem as derivadas, impõe-se neste momento examinar este tipo de manuais uma vez que apresentam problemas de optimização na unidade quatro, dedicada às funções, mas especificamente no estudo das funções quadráticas e funções polinomiais.

Como o programa não contempla especificamente os problemas de optimização nem a derivada, encontramos um número reduzido de problemas de optimização neste manual.

Este apenas apresenta um problema de optimização, que vem no final do capítulo dedicado às funções, como uma actividade para trabalho de grupo com relatório.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 10, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, contendo cada um dos volumes três capítulos. O segundo volume, onde encontramos os problemas de optimização, é composto por 272 páginas repartidas pelos seguintes capítulos: Geometria analítica I (Introdução ao método cartesiano), Funções I (Generalidades, função quadrática e função módulo) e Geometria analítica II (Vectores, rectas e paralelismo).

Os problemas de optimização constam no segundo capítulo deste volume, dedicado às funções. Cada capítulo está dividido em vários sub-capítulos, contendo no final, um conjunto de problemas resolvidos e um conjunto de problemas propostos. No final do capítulo é listado mais um conjunto de exercícios de revisão e actividades e no fim de cada volume as autoras apontam as soluções e um formulário. Cada tema vem acompanhado por um conjunto de exercícios resolvidos tendo nas margens exercícios de aplicação relacionados com o tema que se está a abordar.

Como no 10º ano ainda fora abordado o cálculo de máximos e mínimos, utilizando as derivadas, o manual expõe apenas dois problemas de optimização nos exercícios finais do capítulo das funções.

Observemos agora os problemas de optimização que encontramos nos manuais do 10º ano, desta reforma:

Problemas de Medida em Contexto Real

LG10.1. Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.

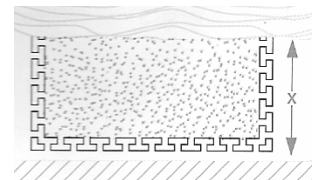
Exprime a área do terreno em função do lado x .

Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

Ilustra o relatório desenhos à escala de vários rectângulos possíveis. (Lima e Gomes 10º, 1994, p. 259)

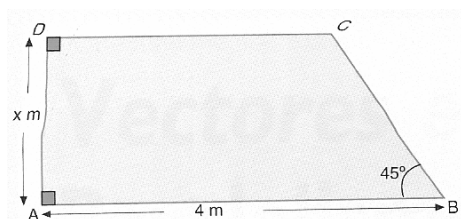


NB10.1 A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.

a. Escreva $\overline{DC}$ em função de x .

b. Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela fórmula:

$$A = 4x - \frac{x^2}{2}$$



c. Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a 6 m^2 .

d. Determine a área máxima do trapézio. (Neves e Brito 10º, Vol. 2, 1994, p. 167)

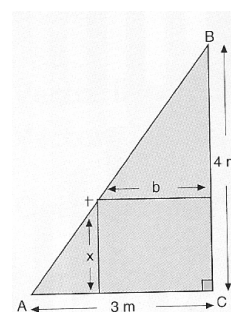
NB10.2. Pretende-se construir uma estante para

colocar numa parede triangular de umas águas-furtadas, como se indica na figura.

a. Escreve b em função de x .

b. Mostre que a área da estante pode ser dada pela fórmula:

$$A = 3x - \frac{3}{4}x^2$$



c. Para que valores de x é máxima a área? (Neves e Brito 10º, 1994, p. 167)

Manuais do 11º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: Xeqlmat, 11º Ano

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é constituído por um só volume composto por 368 páginas, repartidas por seis unidades, sendo a última dedicada aos limites e derivadas. É nesta unidade que identificámos os problemas de optimização. Veja-se como está constituída esta unidade:

- Limite de uma função real de variável real
- Continuidade num ponto e num intervalo
- Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação média: Interpretação geométrica, derivadas laterais, função derivada, teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração), derivada da soma e do

produto (com demonstração), do quociente e da potência de expoente racional (sem demonstração), segunda derivada, aplicação da 1ª e da 2ª derivadas ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades.

- *Assíntotas verticais e não verticais*

Na parte desta unidade dedicada à derivada de uma função são expostos os objectivos seguintes:

- *Encontrar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolvê-las.*
- *Resolver problemas de “máximos e mínimos”.*

Confirmámos então, que apesar de no desenvolvimento do tema não serem referidos os problemas de optimização, estes vêm-se, implicitamente, nos objectivos.

Achámos nesta parte quatro exemplos de problemas de optimização com a respectiva resolução. Nas margens do manual, ao longo da apresentação destes problemas, estão nove exercícios que são também problemas de optimização e, no final da unidade, os autores apresentam um conjunto de quarenta e quatro exercícios e actividades dos quais oito são problemas de optimização.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 11, 11º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra está dividida em dois volumes. O primeiro, com 170 páginas, é contempla o estudo das probabilidades I, funções II e trigonometria e o segundo, com 200 páginas, é dedicado à geometria analítica III, sucessões V e Funções III: Limites e derivadas.

É no sexto capítulo, que trata dos limites e derivadas das funções, que encontrámos os problemas de optimização.

Apreciemos qual a estrutura deste capítulo:

VI. Funções III: Limites e derivadas

1. *Limite de uma função real de variável real*
2. *Continuidade*
3. *Derivadas: Derivada de uma função num ponto, interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, interpretação cinemática da derivada de uma função num ponto: velocidade, derivadas infinitas, derivabilidade e continuidade*
 - 3.1. *Função derivada: Função derivada de algumas funções*

- 3.2. *Regras de derivação: Derivada da soma, derivada do produto, derivada de um quociente, derivada da potência de expoente natural, derivada de ordem superior*
- 3.3. *Aplicações da derivada*
 - *Sinal da derivada e sentido de variação*
 - *Extremos relativos de uma função*
 - **Problemas de máximos e mínimos**
Problemas de otimização
 - *Estudo analítico de funções**Aplicando*
Soluções

Neste manual, vemos os problemas de otimização na parte “Aplicações da derivada: problemas de máximos e mínimos. Problemas de otimização”. Encontramos também alguns problemas de otimização na parte “Aplicando” dedicada apenas aos exercícios.

Na parte destinada aos problemas de máximos e mínimos as autoras referem as etapas a seguir na resolução dos problemas:

- *Definir uma função que sirva de modelo matemático À situação a estudar (se possível com uma só variável)*
- *Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos*
- *Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e com a situação concreta do problema.*

Logo a seguir são expõem cinco problemas resolvidos, dos quais quatro são problemas de otimização.

No final deste capítulo as autoras apresentam 67 exercícios seguidos da respectiva solução. Nestes exercícios há seis problemas de otimização enunciados como tal.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: *Matemática 11, ° Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca da Escola Superior de Educação de Coimbra.

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, contendo cada um dos manuais três capítulos. O segundo manual contém 271 páginas e aborda os seguintes temas:

- 4. *Geometria analítica III: Produto escalar. Perpendicularidade no plano*

5. Sucessões

6. Funções III: Limites. Derivadas.

É no sexto ponto, consagrado aos limites, continuidade e derivadas que encontramos os problemas de optimização. Reparemos como está estruturado este capítulo:

1. Limites de funções

2. Limites e infinitos

3. Continuidade de uma função

4. Derivada de uma função

5. Função derivada. Regras de derivação

6. Aplicações das derivadas

6.1. Sentido de variação de uma função

6.2. Extremos relativos de uma função

6.3. Sentido da concavidade do gráfico de uma função

6.4. Representação gráfica de funções

6.5. Problemas de optimização.

Revisões e actividades

Soluções

Funções – Um pouco de história

Do exposto, deduz-se que os problemas de optimização surgem no último ponto a abordar dentro das aplicações das derivadas. As autoras começam por explicar que o estudo das derivadas permite determinar com rigor os máximos e mínimos de funções e que na vida real é importante determinar o custo mínimo, volume máximo, área máxima, etc. Posteriormente são indicados três exemplos de problemas de optimização, acompanhados nas margens de dois exercícios de aplicação. No final do ponto relativo às aplicações das derivadas existem doze problemas propostos, dos quais três são problemas de optimização. No final do capítulo as autoras mostram oito exercícios de cálculo e doze problemas e aplicações, sendo três desses problemas e aplicações problemas de optimização.

Examinemos agora quais os problemas de optimização encontrados nos manuais do 11º ano, desta reforma.

Problemas de Geometria Métrica

LG11.5. De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)

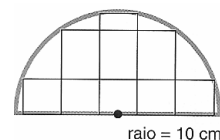
LG11.6. De entre os rectângulos com 60 dm^2 de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)

LG11.7 De entre os rectângulos com 80 m de perímetro, determina as dimensões do que têm área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)

LG11.10. Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.

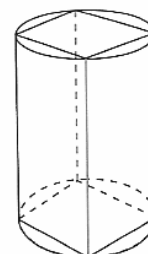
Calcula a altura do que em maior volume. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 320)

LG11.11. Dos rectângulos inscritos num semicírculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 320)



LG11.13. Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.

- Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.
- Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 321)



LG11.14. Determina as dimensões do rectângulo.

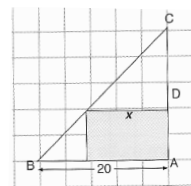
- Com 100 cm^2 de área e cujo perímetro é o menor possível.
- De maior área que se pode contornar com 1200 m de rede. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

LG11.16. Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.

Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.

Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

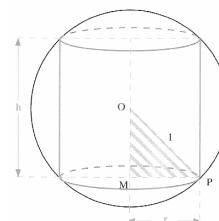
LG11.18. Na figura o rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm. Determina as dimensões do rectângulo de área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)



JAFB11.4. O maior cilindro inscrito numa esfera

Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindro de altura h e raio da base r inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

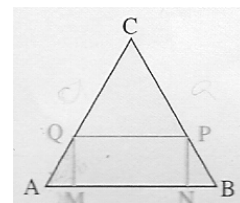
Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo? E qual é o valor desse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.343)



JAFB11.8. Considere o triângulo equilátero $[ABC]$ de lado a . Inscribe-se neste triângulo um rectângulo $[MNPQ]$.

Faça-se $\overline{AM} = x$

Para que valor de x a área do rectângulo é máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)



JAFB11.10. $[ABCD]$ é um trapézio isósceles de área $5\sqrt{2} \text{ cm}^2$

Os ângulos agudos medem 45° .

Seja x (em cm) a altura do trapézio e $P(x)$ o seu perímetro (em cm).

a. Exprima $\overline{DH}$ e $\overline{CK}$ em função de x .

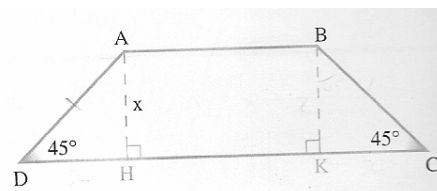
b. Exprima $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ em função de x .

c. Utilize a área do trapézio para exprimir $\overline{AB}$ em função de x .

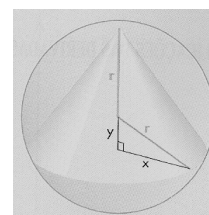
d. Mostre que $P(x) = 2\sqrt{2}x + \frac{10\sqrt{2}}{x}$

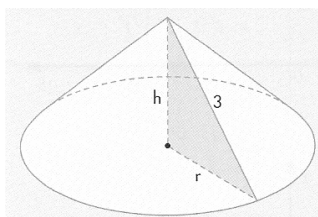
e. Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo.

Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.368)



NB11.3. Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 225)





1994, p. 228)

NB11.8. Como gerar um cone

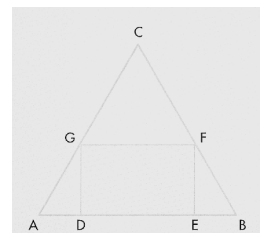
Um triângulo rectângulo de hipotenusa 3 cm é rodado em torno de h para gerar um cone de revolução de raio r .

Determine o raio, a altura e o volume do cone gerado deste modo e que tenha volume máximo. (Neves e Brito 11°, 1994, p. 228)

NB11.11. O triângulo $[ABC]$ é equilátero de lado 10 cm.

Construiu-se um rectângulo $[DEFG]$ como se indica na figura.

Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha área máxima. (Neves e Brito 11°, 1994, p. 235)



Problemas de Geometria Analítica

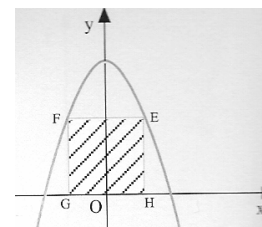
LG11.17. São dados, num referencial o.n. os pontos $A(0, 1)$, $B(6, 1)$ e $P(x, 0)$.

Determina x de forma que $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ seja mínima. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 334)

JAFB11.12. Considere a parábola definida por

$$y = -x^2 + 9$$

Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo $[EFGH]$ de área máxima sabendo que E e F são pontos da parábola e G e H são pontos do eixo das abcissas. (Prova de exame E. S. Filipa de Vilhena, 1993) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11° V2, p. 374)

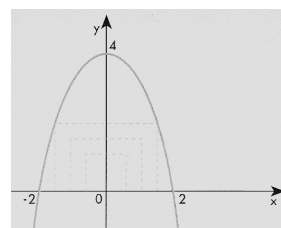


NB11.9. Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os

outros dois vértices pertencem à parábola de equação

$$y = 4 - x^2$$

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter? (Neves e Brito 11°, 1994, p. 235)



Problemas de Aritmética

LG11.8. Calcula os números:

a. Cujas soma é 30 e cujo produto é máximo.

- b. Cujas diferença é 20 e cujo produto é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)

NB11.7. A soma é 20

A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

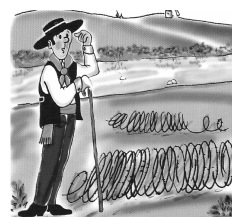
- a. O seu produto é máximo
b. A soma dos seus quadrados é mínima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 228)

Problemas de Medida em Contexto Real

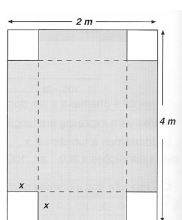
LG11.1. A horta à beira rio

O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

"Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira rio. Só quer vedar 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fica a maior possível..." (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 317)

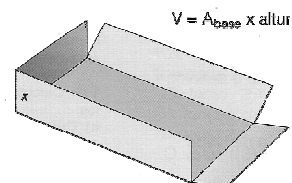


LG11.2. Um pequeno contentor



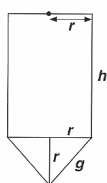
Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 metros por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).

Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o volume do contentor seja o maior possível. (Lima e



Gomes 11º, 1994, p. 318)

LG11.3. Silos para cimento

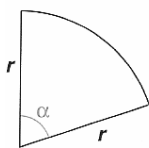


Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r .

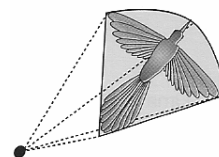
Para silos com volume total de 100 m^3 determinar r de modo que a área lateral seja o menor possível para minimizar o custo do silo. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 319)

LG11.9. De um cartão quadrado com 1 m^2 de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).

Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 318)



LG11.12. Uma fábrica de jogos produz "papagaios" de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de um sector circular tendo 2 metros de perímetro total.

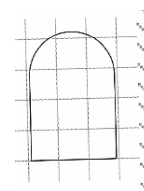


Determina, em radianos, o ângulo alfa do sector para que a resistência ao vento seja máxima (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 320)

LG11.15. Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para definir um círculo. Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja mínima? (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

LG11.19. Uma janela com a forma de um rectângulo com um semicírculo em cima, tem de ter 4 metros de perímetro.

Determina as dimensões da janela que correspondem a um vão máximo (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1994, p. 334)

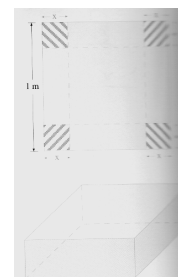


JAFB11.1. Economia no fabrico

Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1m de lado.

Corta-se em cada canto um quadrado de lado x , com o fim de fazer uma caixa paralelepipedica sem tampa.

Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, então, esse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p.340)

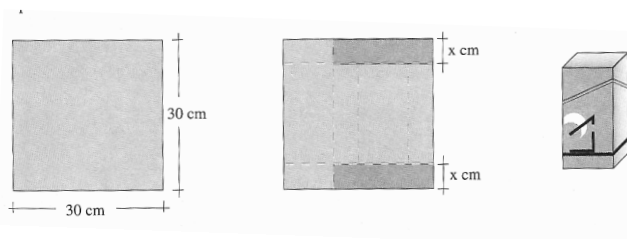


JAFB11.2. Economia no fabrico

Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.

A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se

por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.



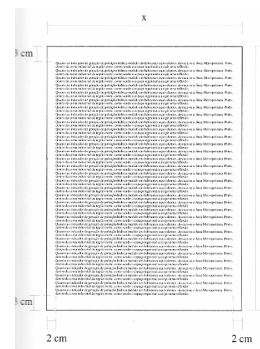
Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 340)

JAFB11.3. Economia no fabrico

Um editor pretende conhecer as dimensões x e y (em centímetros) das folhas de um livro que pensa publicar, de modo a garantir que o consumo de papel seja mínimo e que sejam respeitadas as seguintes condições:

- Cada página deverá ter margens laterais de 2 cm e margens de topo e de fundo de 3 cm.

- A área disponível para impressão deve ser, em cada página, 600 cm^2 . (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 341)



JAFB11.7. Uma janela é formada por um rectângulo $[ABCD]$ e por um semicírculo de diâmetro $[AB]$.

Seja x o raio do semicírculo e y a distância $\overline{BC}$ expressa em metros.

O perímetro da janela é igual a 5 metros.

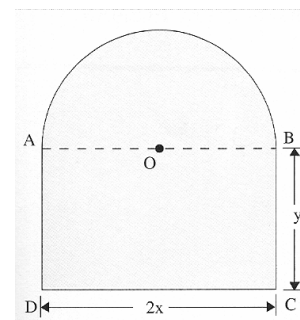
Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.

- Exprima o perímetro da janela em função de x e de y .
- Retire da expressão o valor de y em função de x .
- Para que valores de x se tem $y > 0$?
- Exprima a área da janela em função de x e de y .
- Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma

$$A(x) = 5x - \frac{4 + \pi}{2} x^2$$

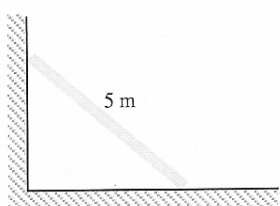
- Deduza para que valores de x e de y a área da janela é máxima.

Encontre o valor exacto dessa área e em seguida o valor aproximado a menos de 10^{-2} (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)



JAFB11.9. Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).

Compare a altura com o diâmetro da caixa. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 368)

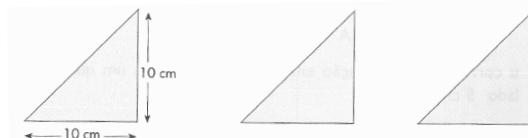
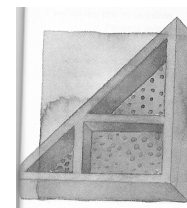


JAFB11.11. Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.

Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada? (Prova de exame E. S. Filipa de Vilhena, 1993) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 373)

NB11.1. O canteiro num jardim

Num jardim com a forma de um triângulo isósceles queremos desenhar um canteiro como se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.



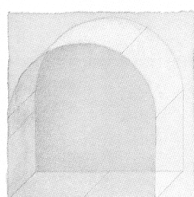
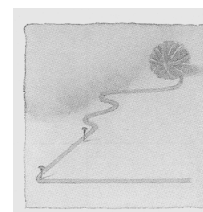
Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 221)

NB11.2. O cilindro de latão

Uma empresa fabrica cilindros em latão com 1 m^3 de volume.

Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo latão possível na sua construção. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 222)

NB11.4. Com um fio de 150 cm de comprimento, quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir? (Neves e Brito 11º, 1994, p. 222)

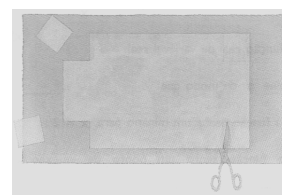


NB11.5. Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada em cima, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].

Determine as dimensões do rectângulo de modo a que a área seja máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 223)

NB11.6. A construção da caixa

Para construir uma caixa vão ser cortados quatro cantos quadrados iguais a um quadrado de 12 cm de lado. Determine o lado de cada quadrado de modo que o volume da caixa obtida seja máxima. (Neves e Brito 11º, 1994, p. 227)

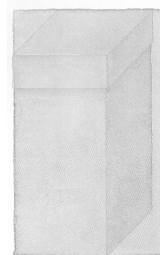


NB11.10. Uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm, tem uma área total de 150 cm^2 .

a. Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

$$V = \frac{75x - x^3}{2}$$

b. Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo. (Neves e Brito 11°, 1994, p. 235)



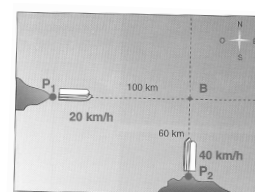
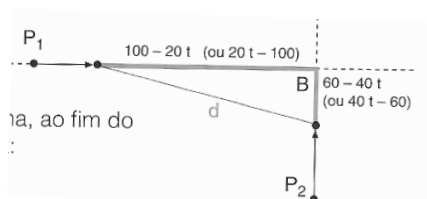
Problemas de Física

LG11.4. Os “ferry-boats”

Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do ponto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do ponto P_2 para norte, a 40 km/h .

A bóia B , no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 e 60 km de P_2 .

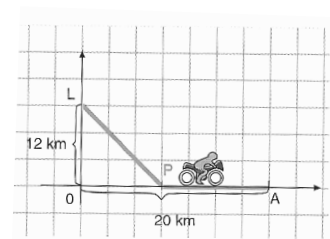
Determina ao fim de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 321)



LG11.20. Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto O mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de O sobre essa estrada.

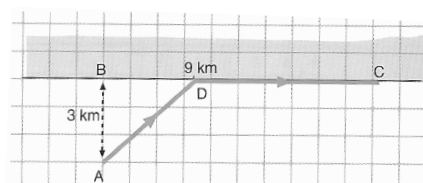
O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada.

Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível. (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 334)



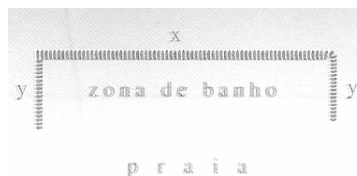
LG11.21. Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A , e tem de ir ao outro ponto C da praia a 9 km de B .

Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível? (Lima e Gomes 11°, 1994, p. 334)



Problemas de Economia

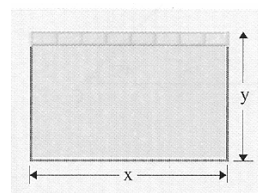
JAFB11.5. Pretende-se vedar com uma fita de flutuadores uma zona rectangular com 200 m^2 de área, para o banho das crianças, como mostra a figura.



Se cada metro de fita de flutuadores custar 2 000 \$00, qual deverá ser o valor de x e de y para que o gasto na compra seja mínimo? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)

JAFB11.6. Um agricultor dispõe de 20 000\$00 para vedar parte de um terreno rectangular.

A vedação deve ser feita do seguinte modo: um dos lados de tijolo e rede nos três lados restantes, conforme ilustra a figura.



Cada metro de rede custa 200\$00 e cada metro de parede em tijolo fica por 600\$00.

Qual é a área máxima que se consegue vedar? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 367)

Manuais do 12º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: Xeqmat, 12º Ano

Ano, editora e lugar de edição: 1994, Editorial O Livro: Lisboa

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual é composto por um só volume, com 408 páginas, repartidas por seis unidades obrigatórias e pelas quatro unidades opcionais. A unidade 4 é dedicada às funções trigonométricas em IR e a 5 às funções exponencial e logarítmica. A parte relativa às funções trigonométricas inclui a derivada e também os problemas de optimização, mas a parte dedicada à função exponencial e logarítmica não inclui a derivada e, consequentemente, não inclui problemas de optimização. Observemos a estrutura que apresenta a unidade 4:

Unidade 4: Funções trigonométricas em IR

- Seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real
- Fórmulas trigonométricas. Equações

- *Derivadas das funções trigonométricas*
 - Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quando $x \rightarrow 0$
 - Derivada do seno
 - Derivada do co-seno e da tangente
 - Derivada de uma função composta
- *Estudo analítico e gráficos de funções trigonométricas. Áreas sob gráficos.*
 - Estudo analítico da função $x \mapsto \sin x$
 - Estudo analítico da função $x \mapsto \cos x$
 - Estudo analítico da função $x \mapsto \tan x$
 - **Estudo de outras funções trigonométricas. Problemas**
 - Exercícios e actividades
 - Breve nota histórica
 - Soluções

Resulta que existem alguns problemas de optimização na unidade 4, após a abordagem das derivadas das funções trigonométricas, mais especificamente, no ponto "Estudo de outras funções trigonométricas. Problemas". Nesta parte existem seis exemplos, mas nenhum destes é um problema de optimização. Nas margens desta parte, tal como ao longo do manual, são expostos alguns exercícios, sendo um deles um problema de optimização.

No final da unidade surgem mais 16 exercícios/actividades mas apenas um dos exercícios é um problema de optimização.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 12, 12º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1995, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, o primeiro tem 183 páginas repartidas por três capítulos:

- I – Análise combinatória e probabilidades
- II – Geometria analítica IV
- III – Funções IV, Áreas

O segundo volume tem 205 páginas repartidas por quatro capítulos:

- IV – Funções V: Funções trigonométricas em IR
- V – Função exponencial e logarítmica
- VI – Noções de grupo e de corpo
- VII – Corpo dos números complexos (capítulo de opção)

Encontramos os problemas de optimização no primeiro capítulo do segundo volume, dedicado às funções trigonométricas.

O capítulo dedicado às funções trigonométricas apresenta a estrutura seguinte:

IV: Funções V – Funções trigonométricas em IR

1. Fórmulas da diferença, da soma e da duplicação
2. Seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real

- Estudo do $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
- Derivabilidade das funções seno, co-seno e tangente
- Derivada da função composta
- Estudo da representação gráfica das funções seno, co-seno e tangente, recorrendo às respectivas derivadas
- Estudo comparativo de funções
- **Resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas**
Um problema de optimização

3. Primitivas do seno e do co-seno

Aplicando

Este manual refere a abordagem dos problemas de optimização na parte em que se trata das funções trigonométricas. Há neste manual apenas três problemas de optimização. O primeiro referido como problema de optimização na parte final, dedicada à resolução de problemas envolvendo funções trigonométricas. Os outros dois na parte dedicada aos exercícios. Nesta encontramos trinta e seis exercícios dos quais dois são problemas de optimização, fazendo o último, parte das questões saídas em provas de aferição.

Autor: M. Augusta F Neves; M. Luísa C. Brito

Título: Matemática 12, 12º Ano

Ano, editora e lugar de edição: 1995, Porto Editora

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes, sendo o segundo volume constituído por 218 páginas, repartidas por três capítulos:

- Funções V – Funções trigonométricas em IR
- Funções VI – Funções exponenciais e logarítmicas
- VI – Noções de grupo e corpo.

O capítulo quatro, dirigido às funções trigonométricas, apresenta uma parte relativa à derivada, mas não indica nenhum problema de optimização.

O capítulo cinco, dedicado às funções exponenciais e logarítmicas, também apresenta uma parte com a derivada mas não mostra nenhum problema de otimização.

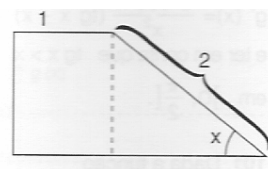
Tal como é referido no índice do manual, no desenvolvimento do capítulo apenas aparece um problema de otimização. Na parte destinada aos exercícios de aplicação "Aplicando" inclui mais trinta e seis exercícios sendo apenas dois problemas de otimização.

Examinemos então os problemas de otimização que identificámos nos manuais do 12º ano.

Problemas de Geometria Métrica

LG12.1.

- a. Exprime a área deste trapézio $\left(\frac{B+b}{2} \cdot h\right)$ em função de x .
- b. Determina a área máxima
- c. Qual a taxa de variação instantânea da área quando $x = 1$ radiano? (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 204)



LG12.2. A pedido de um cliente, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2 \text{ dm}$.

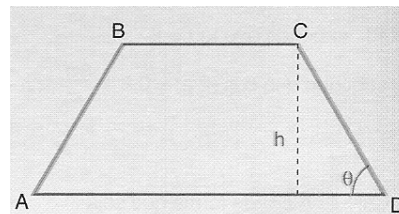
Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC.

- a. Exprime a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ .
- b. Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm^2 , por

$$A(\theta) = 4 \cdot \sin \theta + 2 \sin(2\theta)$$

- c. Determina o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcula essa área.

- d. Calcule $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$



Aferição 94 Ep. Normal (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 210)

JAFB12.3. A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2 \text{ dm}$.

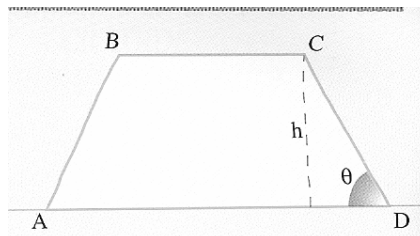
Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC:

- Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ
- Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm^2 , por

$$A(\theta) = 4 \sin \theta + 2 \sin 2\theta$$

- Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;
- Calcule $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$.

(Prova de Aferição, Época normal, 1994) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 60)

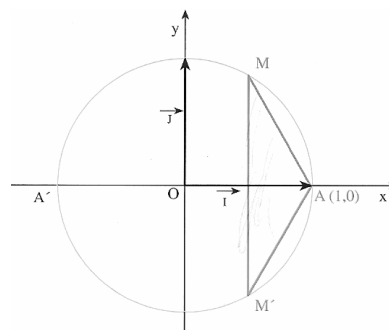


Problemas de Geometria Analítica

JAFB12.1. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j})$ um referencial o.n.

Seja C o círculo de centro O e de raio 1, A , o ponto de coordenadas $(1, 0)$ e A' , o ponto de coordenadas $(-1, 0)$. Seja M um ponto de C distinto de A e de A' , de ordenada positiva e M' o seu simétrico em relação a AO .

Pretende-se determinar a posição do ponto M , de modo que a área do triângulo $[AMM']$ seja máxima e conhecer a natureza do triângulo. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 48)



Problemas de Medida em Contexto Real

JAFB12.2. Na figura está representado um corredor de um museu.

Considere a recta que passa por O , sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que encontra as paredes em A e B .

1. Exprima $\overline{OA}$ em função de α .
2. Exprima $\overline{OB}$ em função de α .
3. a. Faça $\overline{AB} = f(\alpha)$ e mostre que

$$f(\alpha) = \frac{5}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

- b. Determine a função derivada de f em

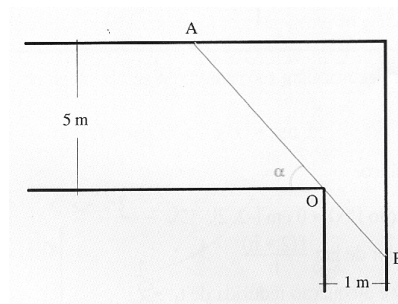
$$\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ e deduza recorrendo à}$$

calculadora um valor aproximado α_0 de α para o qual f admite extremo.

- c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ para $\alpha = \alpha_0$.

- d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical.

Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 55)



C. Análise do período

O primeiro aspecto a salientar neste período é o facto de detectarmos os problemas de optimização, não apenas num ano lectivo específico, mas sim nos três anos do Ensino Secundário.

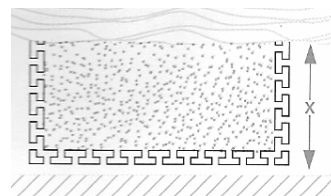
Quando fizemos a análise dos programas concluímos que no 10º ano o programa não contempla o estudo da derivada. Então, como podemos justificar o facto de encontrar problemas de optimização neste ano?

Ora, dado que o programa contempla o estudo de funções, e em particular o estudo da função quadrática, tornou-se possível inserir os problemas de optimização como exercícios de aplicação da função quadrática, ou seja, antes do estudo da derivada.

Um outro ponto importante que surge com esta reforma é o facto de se começar a utilizar as calculadoras gráficas. Estas não são de uso obrigatório, apenas são de uso obrigatório as calculadoras científicas, no entanto, os professores, já as podem utilizar como material de apoio, na sala de aula. Alguns manuais mostram gráficos elaborados com a calculadora gráfica.

Apesar de a abordagem dos problemas de optimização ser feita nos três anos do Ensino Secundário, o número de problemas assinalados para este período não aumentou

relativamente ao período anterior, pelo contrário, há menos um problema. A grande maioria dos problemas de optimização faz parte dos manuais do 11º ano (quarenta e sete). Os manuais do 10º ano apenas têm três problemas e os manuais do 12º ano apenas têm cinco. É ainda de referir que o livro de Lima e Gomes **(LG)**, do 11º ano é o que contém o maior número de problemas de optimização deste período (vinte e três problemas).



Na análise deste período iremos contemplar os três anos em conjunto referindo apenas pontualmente, quando se justificar, algumas características em separado.

Vejamos agora as características dos problemas deste período.

Confirmamos que o número de problemas sob a forma de exercício (quarenta e dois) é significativamente superior aos que surgem sobre a forma de exemplo resolvido (doze). Neste período há pela primeira vez um problema de optimização sob a forma de actividade de grupo, com relatório, e nenhum sob a forma de demonstração. Relativamente ao 10º ano, o livro de Lima e Gomes **(LG)** apenas apresenta um problema de optimização como actividade de grupo/relatório:

" (LG10.1.) Actividade (Trabalho de grupo com relatório):

Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.

Exprime a área do terreno em função do lado x .

Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

Ilustra o relatório desenhos à escala de vários rectângulos possíveis."

O livro de Neves e Brito **(NB)**, para o 10º ano, indica dois problemas de optimização sob a forma de exercício, ou seja, sem um exemplo prévio. Nos manuais do 11º ano surgem para todos os autores, primeiramente, três ou quatro exemplos de problemas de optimização e só depois os exercícios. Por fim, nos manuais do 12º ano existe, no manual de Jorge e outros **(JAFB)** um problema sob a forma de exemplo e depois dois como exercício. No livro de Lima e Gomes os dois problemas encontram-se sob a forma de exercício.

Quanto ao contexto dos problemas observamos que os problemas geométricos predominam, sendo que de contexto real de medida detectamos vinte e três problemas

e de geometria métrica dezanove. Neste período, pela primeira vez, há mais problemas em contexto real de medida do que de geometria métrica. Os outros contextos surgem em número reduzido: quatro problemas de aritmética (JAFB11.8.a, JAFB11.8.b, NB11.7.a, NB11.7.b), quatro de geometria analítica (JAFB11.12, LG11.17, NB11.9, JAFB12.1), três de física (LG11.4, LG11.20, LG11.21) e dois de Economia (JAFB11.5, JAFB11.6).

Quanto à função a otimizar, uma vez que predominam os problemas geométricos, na maioria dos problemas se pretende otimizar uma área (trinta e um): Área de um rectângulo dado o seu perímetro (LG10.1, LG11.7, LG11.14.b, LG11.1, NB11.4, JAFB11.6); área de um rectângulo inscrito noutra figura (NB10.2, LG11.11, LG11.18, JAFB11.8, NB11.11, NB11.1); área de um rectângulo com dois vértices sobre uma curva dada (JAFB11.12, NB11.9); área de um trapézio dadas as medidas de alguns lados (NB10.1, LG11.16, LG12.1, LG12.2, JAFB12.3); área de um triângulo dadas algumas medidas de lados (LG11.5); área de um sector circular dado o seu perímetro (LG11.12); área de um triângulo inscrito no círculo trigonométrico (JAFB12.1); soma da área de um quadrado com um círculo dada a soma dos seus perímetros (LG11.15); área de uma figura composta por um rectângulo e um semicírculo dado o perímetro (LG11.19, JAFB11.7, NB11.5); área de um rectângulo circunscrito a outro rectângulo dada a área do mais pequeno (JAFB11.3); área de um triângulo rectângulo dada a hipotenusa (JAFB11.11); área lateral de um sólido formado por um cilindro e um cone dado o seu volume (LG11.3); área total de um cilindro dado o seu volume (JAFB11.9, NB11.2). Em onze pretende-se otimizar o volume: Volume de um paralelepípedo, dadas as dimensões da folha para o construir (LG11.2, LG11.9, JAFB11.1, JAFB11.2, NB11.6, NB11.10); volume de um paralelepípedo dada a sua área total (NB11.10); volume de um prisma dado o perímetro de uma secção (LG11.13); volume de um cilindro/cone dado o raio da esfera que o circunscribe (JAFB11.4, NB11.3); volume de um cone dada a medida da geratriz (NB11.8). Os outros tipos aparecem em número reduzido. Em três pretende-se otimizar um perímetro: perímetro de um trapézio dada a sua área (JAFB11.10); perímetro de um rectângulo dada a sua área (LG11.6, LG11.14.a). Em três pretende-se otimizar uma distância: Distância entre dois objectos móveis dada a velocidade de cada um e a distância inicial (LG11.4); soma mínima dos quadrados das distâncias entre dois pontos fixo e um ponto móvel (LG11.17); distância entre dois pontos dado o ângulo que a recta que os une forma com um segmento (JAFB12.2). A optimização do produto entre dois números dada a sua soma ou diferença surge também três vezes (LG11.8.a, LG11.8.b, NB11.7.a); a optimização de tempo que se demora a percorrer uma distância repartida em duas partes em que o objecto se move a velocidades diferentes surge duas vezes

(LG11.20, LG11.21); a otimização de uma soma dos quadrados de dois números dada a sua soma surge apenas uma vez (NB11.7.b) e a otimização do custo de uma vedação dada a área e o custo do lado (JAFB11.5) surge também apenas uma vez.

Nestes problemas, em trinta e um a figura apresenta dados, em onze dos problemas geométricos, não encontramos nenhum tipo de figura (JAFB11.9, LG11.5, LG11.6, LG11.7, LG11.10, LG11.14.a, LG11.14.b, LG11.15, LG11.16, LG11.17, LG11.18, NB11.4) e em apenas nove a figura é simples (JAFB11.8, JAFB11.12, LG11.11, LG11.13, LG11.19, NB11.5, NB11.6, NB11.10, NB11.11). Verificamos que nos manuais do 10º ano e do 12º ano todos os problemas apresentam uma figura com dados; nos manuais do 11º ano verificamos que, a maioria dos problemas do livro de Jorge e outros e do livro de Neves e Brito apresentam uma figura com dados, mas no livro de Lima e Gomes cerca de metade dos problemas não têm qualquer tipo de figura. Examinemos o exemplo de um problema geométrico, que apesar de não ter qualquer figura, contém uma nota que irá auxiliar o aluno na resolução:

“ **(LG11.16)** Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.

Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.

Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases.”

Tal como no período anterior, quase todos os problemas apresentam dados numéricos (cinquenta e três), sendo apenas um o problema com dados genéricos. Vejamos:

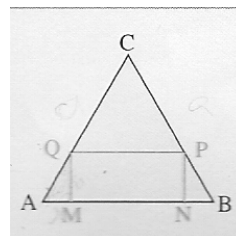
“ **(JAFB11.8)** Considere o triângulo equilátero $[ABC]$ de lado

a .

Inscribe-se neste triângulo um rectângulo $[MNPQ]$.

Faça-se $\overline{AM} = x$

Para que valor de x a área do rectângulo é máxima?”



Em relação ao tipo de enunciado, surgem em número significativo (quarenta e três) os problemas em que o enunciado é simples e apenas doze problemas com a resolução encaminhada. Todos os problemas do 10º ano são de resolução encaminhada e, dos problemas do 12º ano, apenas um não apresenta a resolução encaminhada (JAFB12.1). Quanto aos manuais do 11º ano verificamos que, no manual de Jorge e outros, apenas dois problemas têm resolução encaminhada (JAFB11.7, JAFB11.10); no manual de Lima e Gomes também apenas dois problemas têm resolução encaminhada (LG11.13, LG11.16) e no manual de Neves e Brito apenas um problema tem resolução

encaminhada (NB11.10). Indicámos a seguir alguns exemplos de problemas com resolução encaminhada:

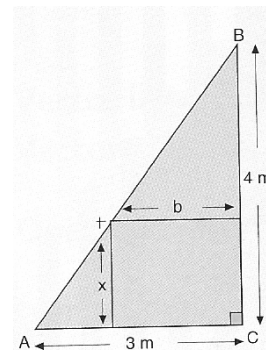
“ **(NB10.2)** Pretende-se construir uma estante para colocar numa parede triangular de umas águas-furtadas, como se indica na figura.

a. Escreve b em função de x .

b. Mostre que a área da estante pode ser dada pela fórmula:

$$A = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

c. Para que valores de x é máxima a área?!



“ **(LG11.16)** Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um.

Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.

Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases.”

“ **(JAFB12.2)** Na figura está representado um corredor de um museu.

Considere a recta que passa por O, sendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que encontra as paredes

em A e B.

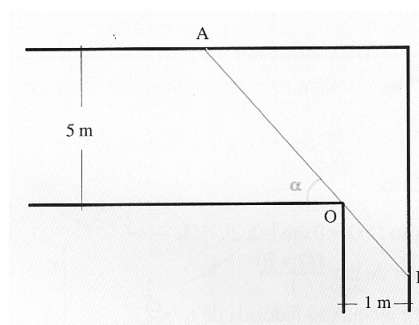
1. Exprima $\overline{OA}$ em função de α .

2. Exprima $\overline{OB}$ em função de α .

3. a. Faça $\overline{AB} = f(\alpha)$ e mostre que

$$f(\alpha) = \frac{5}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e deduza recorrendo à



calculadora um valor aproximado α_0 de α para o qual f admite extremo.

c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ para $\alpha = \alpha_0$.

d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical.

Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores?”

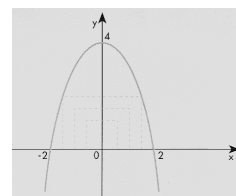
No primeiro exemplo, as duas alíneas que precedem a questão em que se pretende determinar a solução óptima ajudam o aluno a equacionar o problema. No segundo, apesar de não haver questões prévias, surge no final uma sugestão para chegar à função a otimizar em ordem a apenas uma variável. No último, também as questões prévias auxiliam o aluno a chegar à solução. Neste não é pedida explicitamente

a solução óptima mas é pedido que se calcule o extremo e posteriormente a interpretação do valor.

A função auxiliar é implícita em trinta e oito dos problemas e apenas em dezassete surge explicitamente. Nos problemas do 10º ano e do 12º ano a função auxiliar é sempre implícita. Quanto aos manuais do 11º ano, no manual de Jorge e outros a função surge explicitamente apenas em três problemas (JAFB11.5, JAFB11.7, JAFB11.9); no manual de Lima e Gomes a função auxiliar surge explicitamente em nove problemas (LG11.3, LG11.6, LG11.7, LG11.8.a, LG11.8.b, LG11.9, LG11.14.a, LG11.14.b, LG11.19) e no manual de Neves e Brito a função auxiliar surge explicitamente em cinco problemas (NB11.2, NB11.5, NB11.7.a, NB11.7.b, NB11.10). A função auxiliar surge explicitamente em problemas geométricos em que, por exemplo, é dado o valor da área, perímetro ou volume de uma figura, ou em problemas aritméticos em que, por exemplo é dado o valor da soma ou produto entre dois números. A função auxiliar surge implicitamente em problemas em que é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras, noção de distância, semelhança de figuras, equação da recta, funções trigonométricas, noção de velocidade, ou seja, problemas em que não é imediato, a partir dos dados, a forma de obter uma variável a partir da outra. Apresentamos agora um exemplo de um problema em que a função auxiliar surge implicitamente:

“ **(NB11.9)** Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter?”



Neste, para determinar o valor da largura em função do comprimento do rectângulo, será necessário usar a equação da curva que nos fornece o valor do y em função do valor do x , ou seja, não é tão imediato como se fosse dado, por exemplo, o valor do perímetro do rectângulo.

Passemos agora às noções aplicadas na resolução dos problemas. Uma vez que predominam os problemas geométricos, também as noções mais aplicadas são as noções geométricas. Vemos que o Teorema de Pitágoras e a fórmula de cálculo do perímetro são as noções mais aplicadas, surgindo a primeira em onze problemas (JAFB11.4, JAFB11.8, JAFB11.10, JAFB11.11, LG11.5, LG11.6, LG11.11, LG11.13, LG11.16, NB11.3, NB11.8). Normalmente esta noção aplica-se em problemas em que temos triângulos rectângulos, ou figuras inscritas e a segunda surge em treze problemas (LG10.1, JAFB11.6, JAFB11.7, LG11.1, LG11.7, LG11.9, LG11.12, LG11.13, LG11.14.b, LG11.15, LG11.19, NB11.4, NB11.5), problemas em que é dado o perímetro de uma figura que nos auxilia a determinar a medida de um lado em função dos outros lados. As outras noções são

aplicadas menos vezes, sendo que a fórmula da distância surge em seis problemas (NB10.1, JAFB11.1, JAFB11.2, JAFB11.3, LG11.17, NB11.6); a noção de soma também em seis problemas (LG11.2, LG11.8.a, LG11.8.b, LG11.10, NB11.17.a, NB11.17.b); a semelhança de figuras (NB10.2, JAFB11.8, LG11.18, NB11.1, NB11.11) e as funções trigonométricas (JAFB12.1, JAFB12.2, JAFB12.3, LG12.1, LG12.2) em cinco problemas; a fórmula da área (JAFB11.5, LG11.6, LG11.14.a, NB11.10) e a do volume (JAFB11.9, JAFB11.10, LG11.13, NB11.2) em quatro problemas e a as magnitudes físicas em três problemas (LG11.4, LG11.20, LG11.21). Em todos os problemas dos manuais do 12º ano se aplicam as fórmulas trigonométricas, ou seja, são problemas apenas relativos aos conteúdos leccionados no 12º ano. Eis um exemplo:

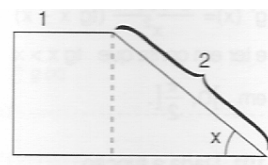
LG12.1.

- a. Exprime a área deste trapézio $\left(\frac{B+b}{2} \cdot h\right)$ em

função de x .

- b. Determina a área máxima

- c. Qual a taxa de variação instantânea da área quando $x = 1$ radiano? (Lima e Gomes 12º, 1994, p. 204)



Neste problema, é necessário usar as fórmulas trigonométricas para calcular, em função de x , a medida da base maior do trapézio e a medida da altura.

Quanto à estratégia a utilizar na resolução dos problemas, a maioria dos problemas já surgiram nos manuais anteriores (trinta) e cinco são retirados de provas de exame (JAFB11.11, JAFB11.12, LG11.11, JAFB12.3, LG11.12). Assim sendo, apenas vinte problemas são novos neste período.

Relativamente às funções utilizadas, verificamos que em grande parte dos problemas a função utilizada para otimizar é polinomial (trinta e três problemas); as funções racionais surgem em dez problemas (JAFB11.3, JAFB11.5, JAFB11.9, JAFB11.10, LG11.3, LG11.6, LG11.12, LG11.14.a, NB11.2, NB11.10), isto é, em problemas em que se aplica a noção de área ou volume; as funções irracionais surgem em sete problemas (JAFB11.11, LG11.4, LG11.11, LG11.16, LG11.20, LG11.21, NB11.8), ou seja, em problemas em que se aplica o teorema de Pitágoras ou se pretende determinar uma distância e as trigonométricas em apenas cinco problemas (JAFB12.1, JAFB12.2, JAFB12.3, LG12.1, LG12.2), isto é, nos problemas em que se aplicam as fórmulas trigonométricas.

O esquema de cálculo utilizado, nos problemas com resolução, foi sempre o mesmo, cálculo dos zeros da função derivada seguido do estudo do sinal. Os problemas do 10º ano surgem como exercícios não apresentando a respectiva resolução, mas estes

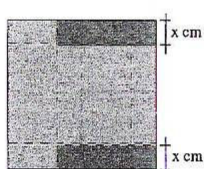
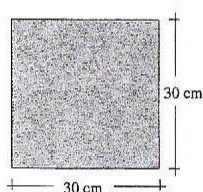
encontram-se após o estudo da função quadrática. Observemos a resolução do problema JAFB11.2:

Problema 2

Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.

re c o r d e

A act. 2 (pág. 51)



A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.

Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume.

Resolução

Designemos por V a função que nos dá o volume da caixa.

Vem

$$V(x) = x(15 - x) \cdot (30 - 2x) =$$

$$= 2x^3 - 60x^2 + 450x \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 15$$

visto que as dimensões da caixa são, em centímetros, x , $15 - x$ e $30 - 2x$ e o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura.

Teremos então que

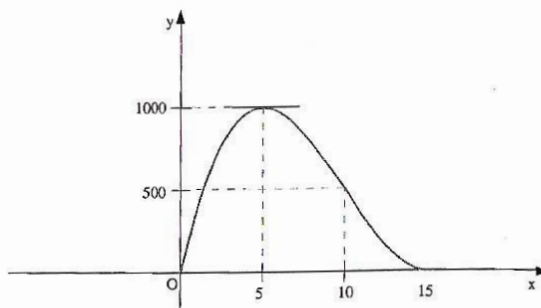
$$V'(x) = 6x^2 - 120x + 450$$

Os zeros de $V'(x)$ são 5 e 15 e o quadro de variação de V é:

x	0	5	15
$V'(x)$		+	-
V	0	↗	↘ 0

O volume será pois máximo para $x = 5$, e o valor do volume máximo é 1000 cm^3 .

Para confirmarmos os resultados encontrados, representemos graficamente a função $x \mapsto V(x)$ no intervalo $[0, 15]$.

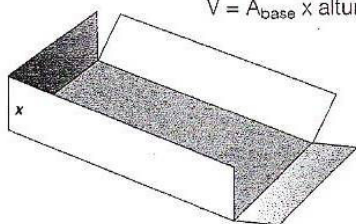


Relativamente ao enunciado, este vem acompanhado de uma sequência de figuras que ilustram a construção da caixa e têm os dados representados. Relativamente

à resolução, esta contém uma figura com dados na margem esquerda e a resolução é feita acompanhando os seguintes passos: equação do problema, cálculo da derivada, cálculo dos zeros da derivada e construção do quadro de monotonia e resposta ao problema. A seguir apresenta o gráfico obtido através da calculadora gráfica para confirmar o resultado.

Quanto aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares, todos os problemas que apresentam resolução, contêm o quadro de monotonia e três dos problemas que apresentam resolução possuem o gráfico da função (JAFB11.2, LG11.1, LG11.2). Reparemos no problema LG11.2 que apresenta quadro de monotonia e gráfico:

149. De um cartão quadrado com 1m^2 de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa). Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível.



Exemplo 2. Um pequeno contentor.

Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).

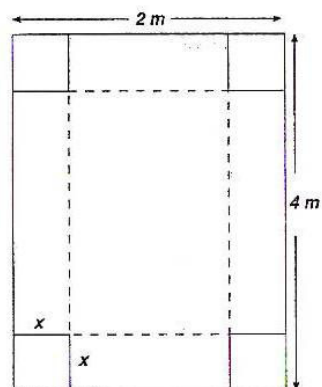
Determinar o lado do quadrado a suprimir de modo que o volume do contentor seja o maior possível.

Resolução:

A – Função a maximizar:

V , volume dum paralelepípedo rectângulo.

$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$$



Assim, este período é caracterizado por problemas enunciados sob a forma de exercício, pela primeira vez encontramos mais problemas em contexto real de medida do que de geometria métrica mas, em contrapartida, na maioria dos problemas apenas se pretende otimizar uma área. Existe um elevado número de problemas com uma figura com dados e apenas um problema apresenta dados genéricos. Na maioria dos casos o enunciado é simples e a função surge explicitamente.

Quanto às noções aplicadas na resolução, dividem-se, essencialmente, entre o teorema de Pitágoras e a fórmula do perímetro. A maioria dos problemas já surgiu em manuais anteriores, aparecem essencialmente funções polinomiais e os extremos são calculados apenas através dos zeros e sinal da derivada apresentando estas resoluções o quadro de monotonia.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.5. INTRODUÇÃO DO USO DA CALCULADORA GRÁFICA NOS PROGRAMAS OFICIAIS

3.5.1. O REAJUSTAMENTO DE MARÇAL GRILO (1997)

A. Análise do programa oficial

Como durante a aplicação experimental do programa anterior, respeitante à Lei de Bases do Sistema Educativo, surgiram dificuldades de concretização, mesmo contando com cargas horárias excepcionais, a generalização da sua aplicação em todas as escolas multiplicou essas dificuldades. Este facto deu-lhes uma visibilidade nacional que o quadro da experiência, pela sua própria natureza, não podia ter dado. Ao segundo ano da generalização, o volume dos problemas tornou clara a necessidade de proceder a ajustamentos desse programa.

Este ajustamento não veio constituir um novo programa. Procurando preservar os objectivos da renovação do ensino da Matemática este pretendeu estabelecer maior clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos; explicitar a articulação entre metodologias, objectivos e conteúdos; reforçar a articulação vertical com o 3º ciclo do ensino básico e harmonizar no tempo, quando possível, algumas articulações interdisciplinares.

Dado que uma das principais dificuldades dos professores nas escolas e um dos maiores problemas residia na extensão do programa, o ajustamento deste teve em conta também a exclusão de itens de conteúdo que a experiência mostrou constituírem sobrecarga e impedimento para que aos alunos fosse dado acesso a temas fundamentais e fundadores. Foi também trocada a ordem em que eram dados alguns dos temas.

Assim, a 19 de Setembro de 1997, sendo a pasta da educação ocupada por Eduardo Carrega Marçal Grilo, foi publicada uma alteração à Lei de Bases do Sistema Educativo de 1986, cujos programas tinham entrado em vigor em 1993.

Com esta reformulação, cada um dos anos lectivos do Ensino Secundário passou a ser composto por três temas. No 10º ano abordava-se a Geometria, Funções e Estatística; no 11º eram estudados a Geometria, Funções e Sucessões e no 12º ano os três temas eram Probabilidades, Funções e Trigonometria e Números Complexos.

Esta modificação dos programas introduziu o uso das calculadoras gráficas no ensino Secundário. Foram inovadoras no estudo da geometria plana, das funções, das sucessões, da estatística e da análise combinatória.

Apesar de as derivadas apenas serem abordadas no 11º ano, também no 10º ano são abordados os problemas de otimização. Neste mesmo ano os problemas de otimização surgem no capítulo dedicado ao estudo de funções, em particular no estudo de funções quadráticas.

Eis então, a estrutura do programa relativo ao 10º ano de escolaridade:

Programas do Ensino secundário de 1997

10º Ano

2. Funções e Gráficos – Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo.

- *Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal*
- *Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função.*
- *Estudo intuitivo de propriedades das:*
 - Funções quadráticas; referência à parábola*
 - Função módulo*
 - Funções definidas por 2 ou mais ramos*
 - Funções polinomiais (graus 3 e 4)*
- *Equações e inequações do 2º grau; Inequações com módulos*
- *Decomposição de polinómios*

Nas indicações metodológicas deste programa podemos encontrar a seguinte informação:

*"Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras áreas da matemática como os constantes em livros de Física, Química, Geografia, Economia, etc., em recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, **situações de modelação matemática** e a exemplos ligados com os trabalhos da Área-Escola e com a Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos estudados no tema anterior. Os alunos devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes tipos de situações problemáticas.*

Os alunos devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador.

No estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações."

Como se vê, há um interesse por parte dos seus autores em relacionar os temas matemáticos, neste caso o estudo de funções, com situações do contexto real, em particular na modelação matemática.

Apesar de a optimização não surgir explicitamente no referido programa, nos manuais relativos a esta reforma abordam este tipo de problemas.

Analisemos, pois o programa de Matemática para o 11º ano:

Programas do Ensino Secundário de 1997

11º Ano

2. *Introdução ao Cálculo Diferencial I – Funções Racionais e com Radicais. Taxa de variação/Derivada*

- *Estudo das propriedades das Funções racionais do tipo $f(x) = a+b/(cx+d)$; referência à hipérbole.*
- *Aproximação experimental da noção de limite*
- *Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição.*
- *Noção de taxa de variação; interpretação geométrica e física.*
- ***Determinação da derivada em casos simples; aplicações***
- *Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cúbicos.*

(Matemática, Programas, 10º, 11º e 12º anos, 1997)

Refere-se no desenvolvimento dos temas, em relação ao nosso tema, o seguinte:

“Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações.”

Assim, apesar de o programa não contemplar o estudo dos problemas de optimização, explicitamente, faz referência a que se abordem aplicações da derivada.

Passemos seguidamente ao programa de Matemática para o 12º ano. Em relação ao Cálculo Diferencial, este ficou estruturado da seguinte forma:

Programas do Ensino Secundário de 1997

12º Ano

2. *Introdução ao Cálculo Diferencial II*

- *Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1*
Regras operatórias de exponenciais e logaritmos. Aplicações concretas.
- *Limite de uma função Heine; propriedades operatórias sobre limites; limites notáveis; indeterminações. Assíntotas.*
- *Continuidade*
Teorema de Bolzano – Cauchy e aplicações numéricas
- *Funções deriváveis. Regras de derivação e derivadas de funções elementares.*
Segunda definição de número e segundas derivadas e concavidade

- *Estudo de funções em casos simples*
- **Problemas de optimização**

(Matemática, Programas, 10º, 11º e 12º anos, 1997)

Refere-se no desenvolvimento dos temas, em relação ao nosso tema, o seguinte:

“Os **problemas de optimização** devem ser escolhidos de uma forma a que um aluno trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.”

Tal como no programa anterior do 12º ano, também neste se contempla o estudo dos problemas de optimização. Notamos ainda que com o estudo destes tem como objectivo que o aluno identifique a importância do Cálculo Diferencial no mundo actual.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

B. Análise dos Manuais Escolares

Manuais do 10º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1996, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este apresenta uma estrutura semelhante ao manual dos mesmos autores apresentado no período anterior. É composto por 336 páginas repartidas pelas três unidades: Geometria, Funções e Estatística.

Os problemas de optimização surgem na unidade dedicada às funções. Este capítulo está assim estruturado:

- Funções e gráficos
- Função quadrática
- Função módulo
- Polinómios. Funções polinomiais
- Métodos Gráficos
- Nota histórica
- Soluções

Ao longo do capítulo, vão surgindo, nas margens, exercícios de aplicação e no final de cada sub-capítulo os autores apresentam um conjunto de exercícios de revisão.

Apesar de no respectivo ano lectivo, ainda não ter sido abordado o Cálculo Diferencial, é possível calcular máximos e mínimos, uma vez que o programa contempla o cálculo do vértice de uma parábola. É também possível calcular máximos e mínimos uma vez que os alunos utilizam já a calculadora gráfica e, portanto, apesar de não ser possível calcular máximos e mínimos de funções polinomiais, analiticamente, pode fazer-se o seu cálculo apenas graficamente.

Encontramos neste manual três problemas de optimização. O primeiro nos exercícios de revisão do primeiro sub-capítulo, o segundo nos exercícios acerca das inequações do 2º grau e o último nos exercícios de revisão das funções.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 10, 10º Ano Volume 2*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em dois volumes. O primeiro, constituído por 180 páginas, é dedicado à Geometria no Plano e no Espaço. O segundo, constituído por 220 páginas, trata das Funções e Gráficos e da Estatística.

Os problemas de optimização estão no capítulo dedicado às funções e gráficos. Este capítulo contempla o estudo dos seguintes pontos:

- Noção de função; gráfico e representação gráfica de uma função
- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos
- Função afim. Resolução de problemas
- Funções definidas por ramos. Aplicações
- Função quadrática. Resolução de problemas
- Funções polinomiais. Polinómios numa variável
- Operações com funções. Função soma, função diferença e função produto.
- Zeros de uma função polinomial.

Pela análise dos temas abordados pelo manual, nota-se uma preocupação em apresentar para cada tipo de função, problemas concretos e aplicações. Os problemas de optimização surgem na parte dedicada às funções quadráticas e na parte dedicada às funções polinomiais.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática, 10º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está dividido em três volumes. O primeiro trata a Geometria, o segundo de Funções e o último de Estatística. Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, este também estava dividido em três volumes abordando cada um deles um do tema.

Os problemas de optimização encontram-se no volume dedicado às Funções. Este volume é composto por 224 páginas, repartidas por seis sub-temas:

- Funções e gráficos
- Transformações de gráficos de funções
- Função quadrática
- Parábola
- Função módulo
- Operações com polinómios. Decomposição de polinómios em factores.

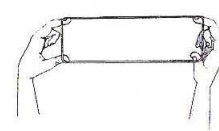
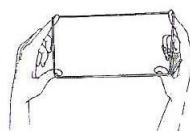
Cada um destes sub-temas apresenta no final uma síntese do que se tratou, um conjunto de problemas resolvidos e outro de problemas propostos. No final do livro há um conjunto de exercícios acerca de todos os assuntos abordados acerca de funções, de seguida as soluções de todos os exercícios e, por fim informação relativa ao uso das calculadoras gráficas no estudo das funções.

Vejamos, então, os problemas de optimização que identificámos ao longo deste manual.

Problemas de Geometria Métrica

JAFB10.1. *Actividade 9 – Problema de Euclides*

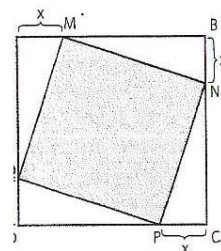
De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 232)



JAFB10.2. Considere-se o quadrado $[ABCD]$ tal que $\overline{AB} = 6$. Constrói-se o quadrado $[MNPQ]$ inscrito em $[ABCD]$ de modo que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ} = x$.

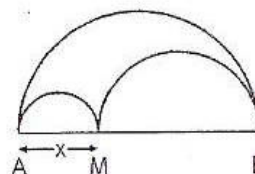
Pretende-se saber:

- Como varia a área $A(x)$ de $[MNPQ]$ com os valores de x .
- Para que valores de x é mínima a área de $[MNPQ]$ e qual o seu valor neste caso.
- Quais os valores de x para os quais a área $A(x)$ é igual a 20 unidades quadradas?
- Para que valores de x é $A(x) > 30$? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 244)



JAFB10.6. Designando por $A(x)$ a área do domínio limitado pelas três semicircunferências de diâmetro $[AB]$, $[AM]$ e $[MB]$, onde $\overline{AB} = 6$ e $\overline{AM} = x$, sendo M um ponto de $[AB]$.

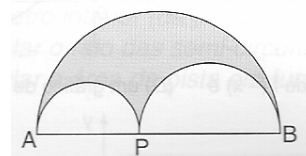
- Mostre que $A(x) = \frac{\pi}{4}(6x - x^2)$
- Represente graficamente a função $A: x \mapsto \frac{\pi}{4}(6x - x^2)$ e determine x de modo que a área A seja máxima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)



LG10.3. Na figura estão um semicírculo de diâmetro fixo $\overline{AB} = d$ e dois outros semicírculos de diâmetros $\overline{AP} = x$ e $\overline{PB}$, variáveis, sendo $P \in [AB]$

- Exprime em função de x a área colorida.
- Que relação deverá existir entre d e x para que a área colorida seja máxima.

(Lima e Gomes 10º, 1996, p. 173)

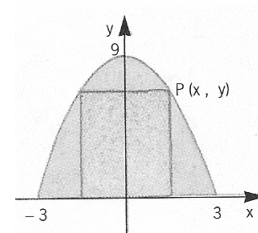


Problemas de Geometria Analítica

N10.5. O rectângulo na parábola

Observe a figura. A unidade é o centímetro.

- Escreva uma equação que represente o arco da parábola.
- Escreva a área do rectângulo em função de x e determine:



- i. A área máxima do rectângulo, com uma aproximação às centésimas;
- ii. Entre que valores de x a área do rectângulo é superior a 2 cm^2 . (Neves 10º, 2001, p. 177)

Problemas de Medida em Contexto Real

JAFB10.3. O caminho mais curto

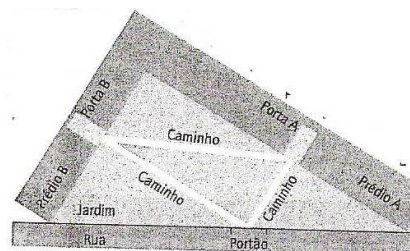
As fachadas de dois prédios fazem entre si um ângulo recto.

O muro que os separa da rua limita um jardim triangular.

O jardim é atravessado por três caminhos que ligam entre si o portão de tal modo que:

- 1º Cada caminho do portão até às portas é perpendicular ao prédio.
- 2º O caminho que liga as duas portas é o mais curto possível.

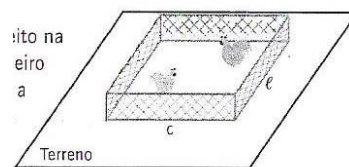
Em que ponto do muro está o portão? Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, (p. 261)



JAFB10.4. Um agricultor comprou 6 metros de rede para fazer 1 galinheiro rectangular, como ilustra a figura.

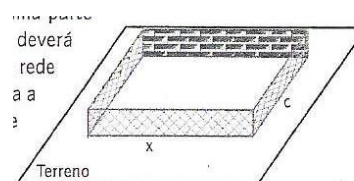
Para otimizar o empate de capital feito na compra da rede, pretende que o galinheiro tenha área máxima. Ajude o agricultor a resolver o problema seguindo os passos que a seguir se indicam:

1. Exprima l em função de c .
2. Exprima a área A do galinheiro em função de c .
3. Determine o valor de c para o qual a área é máxima e o correspondente valor de l . (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 312)



JAFB10.5. Dispõe-se de 20 000\$00 para vedar uma parte de um terreno rectangular. A vedação deverá ser feita em tijolo num dos lados e em rede os três lados restantes, conforme ilustra a figura ao lado. Cada metro de rede custa 200\$00 e cada metro de parede em tijolo, 600\$00. Qual a área máxima que se consegue vedar?

Tente resolver o problema seguindo os passos que a seguir se sugerem:

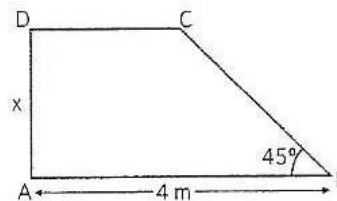


1. Exprima c em função de x , recorrendo ao capital de que se dispões.
2. Prove que a área da parte do terreno a vedar em função de x é $A(x) = 50x - 2x^2$.

Determine o valor de x para o qual a área A é máxima e o valor dessa área. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 312)

JAFB10.7. A figura representa um jardim com a forma de um trapézio rectângulo.

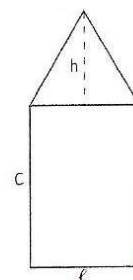
- a. Escreva $\overline{DC}$ em função de x .
- b. Mostre que a área do trapézio em função de x é dada pela expressão $A(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$



- c. Calcule a altura x do trapézio de modo que a área seja inferior a 6 m^2 .
- d. Recorrendo à representação gráfica da função A , determine o valor de x para o qual é máxima a área do jardim e indique o seu valor. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)

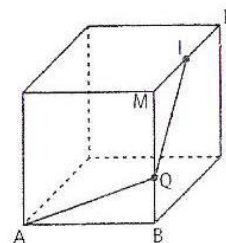
JAFB10.8. As janelas de uma casa têm 6 metros de perímetro e a configuração da figura – um rectângulo encimado por um triângulo equilátero.

1. Exprima c e h em função de l .
2. Exprima a área A da janela em função de l e represente graficamente a função $l \rightarrow A(l)$. (Utilize valores aproximados Às décimas)
3. Determine c e l de modo que entre pela janela a maior quantidade de luz possível (isto é, a área seja máxima). (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 313)



JAFB10.9. O cubo da figura tem 2 cm de aresta. Uma formiga desloca-se de A para I , ponto médio da aresta $[MN]$, passando sempre por um ponto (Q) da aresta $[BM]$ e percorrendo segmentos rectilíneos. Designando $\overline{BQ}$ por x e por $D(x)$ a distância percorrida pela formiga:

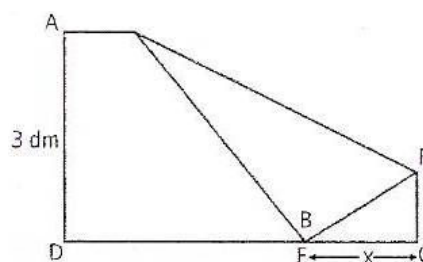
1. Escreva uma expressão de $D(x)$.
2. Entre que valores pode variar x ?
3. Recorrendo a uma calculadora gráfica, represente a função D e apresente um valor aproximado de x a menos de 0,01 para o qual a distância percorrida pela formiga seja mínima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 315)



JAFB10.10. Considere uma folha rectangular de papel de 3 dm de largura.

Dobra-se o canto B de modo que coincida com o ponto E do lado oposto.

Mostre que a área $A(x)$ do triângulo rectângulo [ECF] é dada por $A(x) = 0,75x - \frac{1}{12}x^3$



Qual o seu valor máximo? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 10º, V2, p. 323)

LG10.1. Com 100 m de rede temos de vedar 3 lados de um terreno rectangular à beira de um rio.

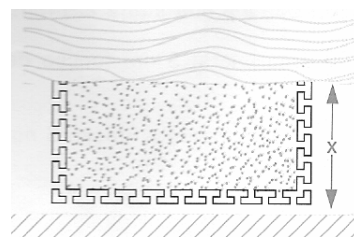
a. Exprime a área do terreno em função do lado x .

b. Estuda o domínio da função; esboça o gráfico.

c. Faz um estudo da função relativamente a zeros, monotonia, extremos, injectividade.

d. Conclui qual a área máxima que se pode vedar com os 100 m de rede.

e. Faz um relatório com desenhos à escala de vários rectângulos possíveis.



(Lima e Gomes 10º, 1996, p. 149)

LG10.2

a) Sendo 80 m o perímetro dum terreno rectangular, exprime a área A em função da altura h .

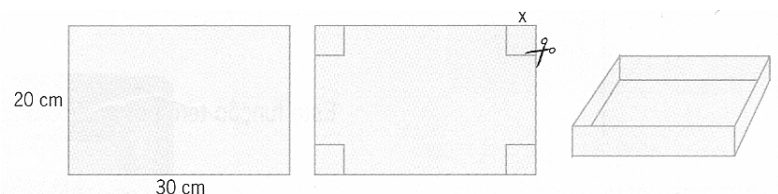
b) Esboça o gráfico da função $h \mapsto A$ e calcula a área máxima que o terreno pode ter.

c) Calcula para que valores de h vem $A > 200 \text{ m}^2$. (Lima e Gomes 10º, 1996, p. 159)

N10.1. Volume da caixa

Tem-se uma cartolina rectangular com 30 cm de comprimento e 20 cm de largura.

Pretende-se construir uma caixa sem tampa, cortando nos quatro cantos um quadrado de lado x .



a. . Escreva a expressão do volume da caixa.

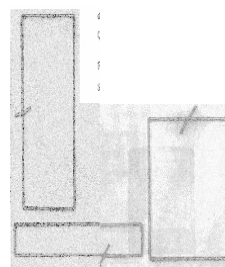
b. Qual é o domínio da função?

- c. Use a calculadora gráfica para obter o gráfico da função que escreveu em 20.1.
 d. Indique um valor aproximado de x para o qual o volume da caixa é máximo.
 (Utilize o TRACE da calculadora gráfica) (Neves 10º, 2001, p. 51)

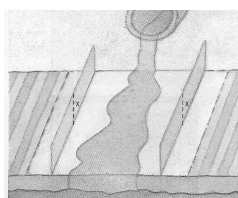
N10.2. A importância do vértice

Com cem metros de rede pretende-se vedar um terreno rectangular de modo a que este tenha o máximo de área.

Quais devem ser as dimensões do terreno? (Neves 10º, 2001, P. 90)



N10.3. Tem-se uma "folha" de metal com 50 cm de largura.



Pretende-se fazer uma peça para conduzir água de uma conduta de águas pluviais, como mostra a figura, dobrando de cada lado, na vertical, uma parte da folha com a mesma altura x .

Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x ? (Neves 10º, 2001, p. 100)

N10.4. A caixa do presente

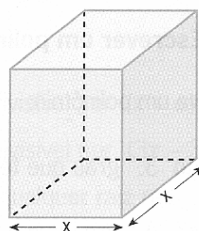
Para embalar uma peça de louça de colecção a empresa "Vista contente" produziu uma caixa com a forma de um prisma quadrangular regular.

A caixa levará uma fita dourada cobrindo todas as arestas da caixa.

Para cada caixa são necessários 160 cm de fita dourada.

De acordo com a figura:

- Determine o valor de x , em função de y ;
- Determine um valor aproximado, a menos de uma décima, para o volume máximo da caixa;
- Se pretender um volume para a caixa de 2000 cm^3 , qual deve ser o valor de x ?
 (Neves 10º, 2001, p. 176)

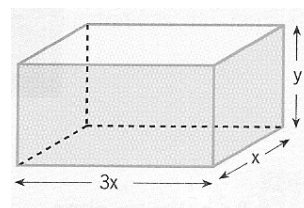


N10.6. A caixa fechada

Uma caixa com a forma de um paralelepípedo tem a base rectangular cujo comprimento é o triplo da largura.

Mostre que:

- Se a área da caixa é 168 cm^2 , o volume v da caixa, em cm^3 , é dado pela expressão:



$$V = 63x - \frac{9}{4}x^3$$

em que x é a medida, em cm, da largura da base da caixa.

b. Determine um valor aproximado para o qual o volume da caixa é máximo e indique o valor do volume para essa aproximação. (Neves 10º, 2001, p. 184)

Manuais do 11º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: *Xeqmat, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual apresenta uma estrutura semelhante ao manual dos mesmos autores apresentado no período anterior. É composto por 344 páginas repartidas por três capítulos: Trigonometria e Geometria, Funções e Derivadas e o último tema Sucessões.

Os problemas de optimização encontram-se na parte referente às Funções e Derivadas. Veja-se como está estruturada esta unidade.

- Funções racionais
- Funções definidas por troços
- Operações com funções
- Limite. Taxa de variação média. Derivada
- Inversão de uma função. Funções com radicais.

No final de cada sub-unidade surge uma revisão/síntese e a seguir um conjunto de exercícios de revisão. No final da unidade ainda surge mais um conjunto de exercícios de revisão geral do tema, separados por sub-temas.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 11, 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra é composta por dois volumes, sendo o segundo composto por 318 páginas repartidas por dois capítulos: Cálculo Diferencial e Sucessões.

O capítulo dedicado ao cálculo diferencial apresenta os conteúdos seguintes:

- Funções racionais
- Operações com funções

- Função composta
- Resolução de problemas envolvendo as funções estudadas
- Taxa de variação de uma função. Derivada
- Função derivada. Funções derivadas de algumas funções
 - Função derivada
 - Funções derivadas de algumas funções
 - Sinal da derivada e sentido de variação
 - Extremos relativos de uma função
- Função inversa
- Funções com radicais quadráticos e cúbicos
- Determinação da equação reduzida da elipse recorrendo às propriedades focais
- Aplicando

Os problemas de otimização estão na parte dedicada às aplicações dos extremos relativos.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática 11º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2001, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual tem uma estrutura semelhante ao manual do 10º ano. Tem em três volumes: Geometria, Funções e Sucessões. Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, este também com três volumes, sendo cada um deles dedicado a cada um dos temas referidos.

Os problemas de otimização fazem parte do segundo volume, respeitante às Funções. Este manual é composto por 208 páginas divididas por cinco sub-temas:

- Funções Racionais
- Funções Irracionais
- Operações com funções. Resolução de problemas envolvendo funções
- Taxa média de variação e taxa de variação de uma função. Cálculo da derivada de algumas funções
- A derivada e os extremos de uma função. Problemas de otimização.

Problemas de Geometria Métrica

LG11.5. De todos os triângulos rectângulos cujos catetos somam 50 cm, determina o que tem área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)

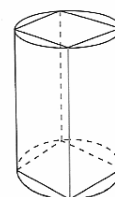
LG11.6. De entre os rectângulos com 60 dm^2 de área, descobre as dimensões do que tem perímetro mínimo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)

LG11.7. De entre os rectângulos com 80 m de perímetro, determina as dimensões do que têm área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)

LG11.10. Considera os vários paralelepípedos de base quadrada cujas dimensões somam 1 metro.

Calcula a altura do que em maior volume. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 204)

LG11.12. Um prisma quadrangular regular está inscrito num cilindro. A secção desse cilindro por um plano contendo o eixo tem 30 cm de perímetro.

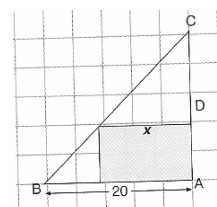


a. Exprime o volume do prisma em função do diâmetro x do cilindro.

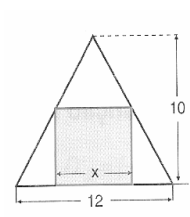
b. Determina o domínio da função e o valor de x que torna o volume máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)

LG11.13. Na figura um rectângulo em cor está inscrito no triângulo rectângulo isósceles cujos catetos medem 20 cm.

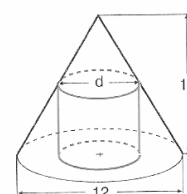
Determina as dimensões do rectângulo de área máxima. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)



LG11.14. Quais são as dimensões do rectângulo de área máxima que se pode inscrever, como indica a figura, num triângulo isósceles com 12 cm de base e 10 cm de altura? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)



LG11.15 Calcula o diâmetro do cilindro de revolução, de volume máximo, que se pode inscrever, como indica a figura junta, num cone de revolução com 12 m de diâmetro da base e 10 m de altura. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)



LG11.17. Determina a altura do cone de revolução com 30 cm de geratriz cujo volume é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)

LG11.18. Um triângulo equilátero $[ABC]$ tem 6 m de perímetro. Sendo M um ponto de $[BC]$ determina a sua posição de forma que o produto das distâncias de M às rectas AB e AC seja máximo.

Sugestão: Recorre à Trigonometria ($\sin 60^\circ$). (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)

LG11.25. Um trapézio tem três lados com 8 cm cada um. Determina o comprimento do 4º lado de forma que a área seja máxima.

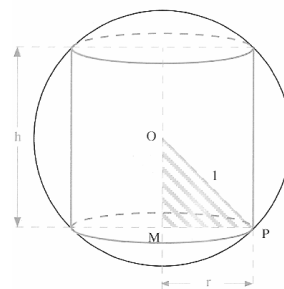
Sugestão: Exprima a área em função de metade da diferença das bases. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 232)

JAFB11.3. O maior cilindro inscrito numa esfera.

Consideremos uma esfera de raio 1 dm e um cilindro de altura h e raio da base r inscrito na esfera (as suas duas bases são círculos da esfera).

Qual o valor de h para o qual o volume do cilindro é máximo?

E qual é o valor desse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 134)



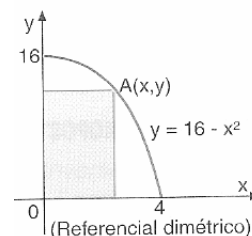
N11.5. Determine o volume máximo de um cone inscrito numa esfera de raio 3 cm. (Neves 11º, 2001, p. 137)

Problemas de Geometria Analítica

LG11.20. Um rectângulo de área A não nula tem dois lados sobre os eixos coordenados sendo a origem um dos vértices. O vértice oposto é ponto da parábola de equação $y = 16 - x^2$.

a) Exprime a área do rectângulo em função de x indicando o domínio de $A(x)$.

b) Para que valores de x a área do rectângulo é máxima? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)



LG11.21. A figura representa uma elipse na qual se inscreveu um rectângulo [MNPQ].

A elipse tem centro na origem O do referencial, distância focal 6 (cm) e eixo maior sobre o eixo das abcissas, com 10 cm de comprimento.

a) Escreve uma equação cartesiana da elipse.

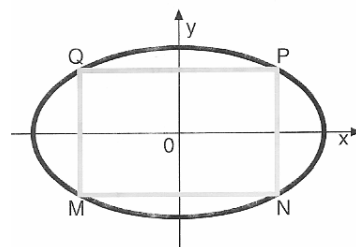
b) Sendo (x, y) as coordenadas do ponto P da elipse prova que a área do rectângulo representado se pode exprimir em função de x do seguinte modo

c) Determina o valor de x para o qual é máxima a área do rectângulo e calcula essa área.

Sugestão: na área é máxima quando

$$25x^2 - x^4 \text{ o for.}$$

Aferição, 94 – 1ª Chamada – Época Especial. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 224)

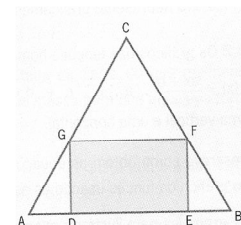


N11.12. O rectângulo de área máxima

O triângulo [ABC] é equilátero de lado 10 cm.

Construiu-se um rectângulo [DEFG] como se indica na figura.

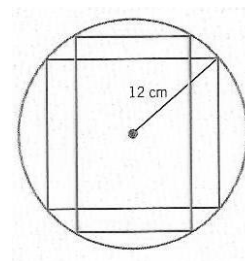
Determine as dimensões do rectângulo de modo que este tenha área máxima. (Neves 11º, 2001, p. 143)



N11.15. O rectângulo no círculo

Num círculo de raio 12 cm inscreveu-se um rectângulo.

Quais as dimensões do rectângulo de modo que a área deste seja máxima? (Neves 11º, 2001, p. 157)



Problemas de Aritmética

LG11.8. Calcula os números:

a. Cuja soma é 30 e cujo produto é máximo.

b. Cuja diferença é 20 e cujo produto é máximo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)

N11.6. A soma é 20

A soma de dois números positivos é 20. Determine os números sabendo que:

a. O seu produto é máximo

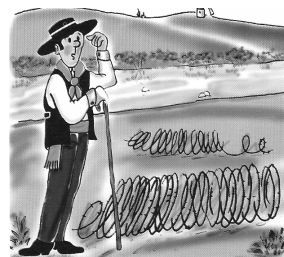
b. A soma dos seus quadrados é mínima. (Neves 11º, 2001, p. 141)

Problemas de Medida em Contexto Real

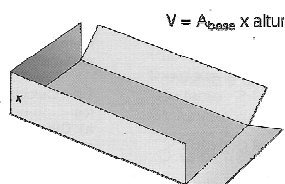
LG11.1. A horta à beira rio

O Sr. Joaquim pediu-nos ajuda:

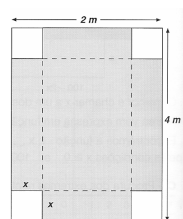
"Tem 100 metros de rede para vedar um terreno rectangular à beira rio. Só quer vedar 3 lados que não dão para o rio. Mas quer que a área da horta fica a maior possível..." (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 201)



LG11.2. Um pequeno contentor – volume máximo



Suprimindo um quadrado em cada canto de uma chapa metálica rectangular, de 2 metros por 4 metros, vai construir-se um contentor (sem tampa).



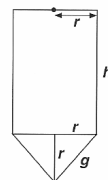
Determinar o lado do quadrado a

suprimir de modo que o volume do contentor seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 202)

LG11.3. Silos para cimento – área mínima

Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r .

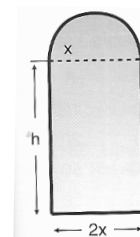
Para silos com volume total de 100 m^3 determinar r de modo que a área lateral seja o menor possível para minimizar o custo do silo. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 203)



LG11.4. Janela com vão máximo.

Um edifício vai ter janelas com a forma dum semicírculo sobreposto a um rectângulo.

O perímetro da janela não pode exceder 4 metros. Determina o formato óptimo da janela para obter o vão máximo (área máxima). (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 205)



LG11.9. De um cartão quadrado com 1 m^2 de área, tira-se um quadrado a cada canto para fazer um caixote (sem tampa).

Determina qual deve ser o lado desses quadrados para que o volume do caixote seja o maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 202)

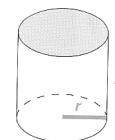
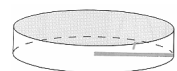
LG11.11. Pensa em vários gasómetros cilíndricos com capacidade de 2 m^3 . Repara que podem ter formas muito diferentes.

a. Prova que a área total é dada, em função do raio r , por

$$A = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}, r > 0.$$

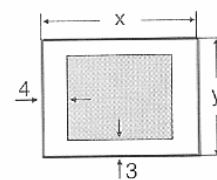
b. Estuda a monotonia da função $r \rightarrow A$ recorrendo à derivada.

c. O custo do gasómetro será mínimo quando a área A for mínima. Que valor deve ter o raio para obter o custo mínimo? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 204)



LG11.19. Um editor decidiu que as páginas dum livro a editar deveriam ter margens de 3 cm em cima e em baixo e de 4 cm de cada lado e que a área da página seria de 432 cm^2 .

Determina as dimensões da página para que a área impressa seja a maior possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)



LG11.22. Determina as dimensões do rectângulo.

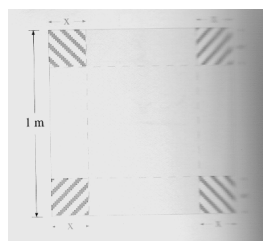
a. Com 100 cm^2 de área e cujo perímetro é o menor possível.

b. De maior área que se pode contornar com 1200 m de rede. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 231)

LG11.24. Um arame com 24 cm vai ser cortado em duas partes, uma para formar um quadrado e outra para definir um círculo.

Em que ponto deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do quadrado e do círculo seja mínima? (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 231)

JAFB11.1. Economia no fabrico.



Considere-se uma placa de cartão de forma quadrada com 1m de lado.

Corta-se em cada canto um quadrado de lado x , com o

fim de fazer uma caixa paralelepipedica sem tampa.

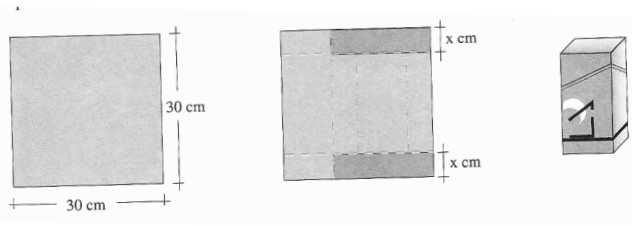


Qual o valor de x que torna o volume da caixa máximo? E qual é, então, esse volume? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 133)

JAFB11.2. Economia no fabrico.

Uma empresa fabrica caixas em cartão cortando duas faixas da mesma largura numa folha quadrada.

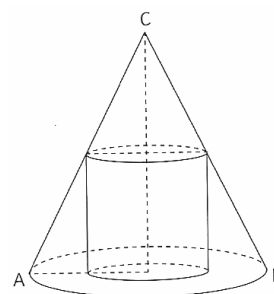
A medida do lado da folha é 30 cm e designa-se por x a medida, em centímetros, da largura da faixa que se retira.



Determinemos o valor de x que torna o volume da caixa máximo e, seguidamente, calculemos esse volume. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 133)

JAFB11.4. Num circo, uma lâmpada emite um cone de luz de altura 16m e raio da base 8m. Para um trabalho dos trapezistas, é preciso saber que espaço é utilizado dentro desse cone de luz. Chegou-se à conclusão que interessaria o espaço limitado pelo cilindro interior ao cone de volume máximo.

Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 165)



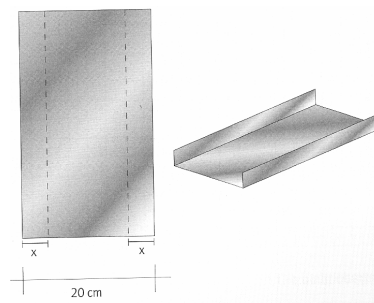
JAFB11.5. Um aquário aberto em cima, de forma paralelepípedica, de 45 cm de altura, deve ter um volume de 170 litros.

Sejam x e y o comprimento e a largura da base, respectivamente.

- Exprima y como função de x .
- Exprima, em função de x , a área total de vidro necessária.
- Determine para que valor de x essa área é mínima. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 173)

JAFB11.6. Uma folha rectangular de metal com 20 cm de largura vai ser dobrada para se fabricarem caleiras, como mostra a figura:

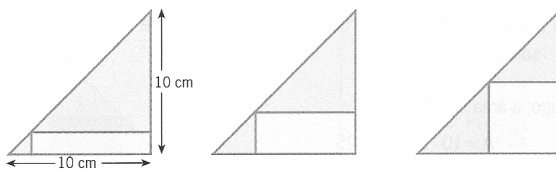
Por onde devem ser feitas as dobras para que a caleira transporte a maior quantidade possível d'água? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 11º V2, p. 183)



N11.1. O canteiro num jardim

Num jardim com a forma de um triângulo isósceles queremos desenhar um canteiro como se indica na figura: um dos vértices do rectângulo pertence à hipotenusa e os outros aos catetos.

Um destes rectângulos terá área máxima. Qual deles é? (Neves 11º, 2001, p. 131)



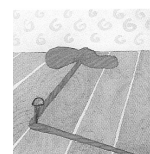
N11.2. O cilindro de latão

Uma empresa fabrica cilindros em latão com 1m^3 de volume.

Estudar as dimensões do cilindro de modo a gastar o mínimo latão possível na sua construção. (Neves 11º, 2001, p. 132)

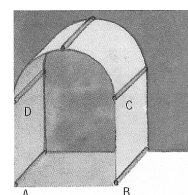


N11.3. Com um fio de 150 cm de comprimento, quais as dimensões do rectângulo de área máxima que é possível construir? (Neves 11º, 2001, p. 132)



N11.4. Com 714 m de rede pretende-se vedar um terreno, com a forma indicada em cima, constituído por um rectângulo [ABCD] e um semicírculo de diâmetro [DC].

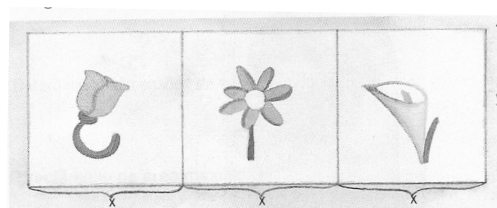
Determine as dimensões do rectângulo de modo a que a área seja máxima. (Neves 11º, 2001, p. 133)



N11.7. O problema do jardineiro

Um jardineiro pretende criar três canteiros rectangulares vedados como se indica na figura.

Ele tem 300 metros de rede.



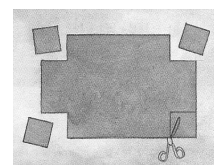
a. De acordo com os dados da figura, mostre que a área dos canteiros em função de x é dada por:

$$A(x) = 450x - 9x^2$$

b. Determine x e y de modo que a área seja máxima. Qual o valor máximo dessa área? (Neves 11º, 2001, p. 141)

N11.8. A construção da caixa

Para construir uma caixa vão ser cortados quatro cantos quadrados iguais a um quadrado de 12 cm de lado. Determine o

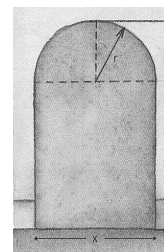


lado de cada quadrado de modo que o volume da caixa obtida seja máximo. (Neves 11º, 2001, p. 142)

N11.9. A porta

Uma porta será constituída por um rectângulo por um semicírculo, como se ilustra na figura.

Sabendo que o perímetro da porta será 18, determine a área máxima da porta. (Neves 11º, 2001, p. 142)



N11.10. O rectângulo com vértices na parábola

Um rectângulo tem base no eixo dos xx e os outros dois vértices pertencem à parábola de equação $y = 4 - x^2$.

Qual a área máxima que o rectângulo pode ter? (Neves 11º, 2001, p. 143)

N11.11. Volume máximo

Uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm, tem uma área total de 150 cm².

a. Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela fórmula:

$$V = \frac{75x - x^3}{2}$$



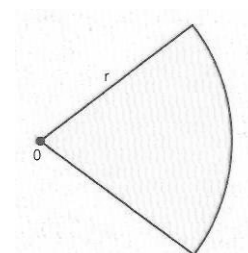
b. Determine as dimensões da caixa de modo que ela tenha volume máximo. (Neves 11º, 2001, p. 143)

N11.14. O sector circular

Um canteiro de um jardim terá a forma de um sector circular de raio r.

O perímetro do canteiro terá de ser 20 metros.

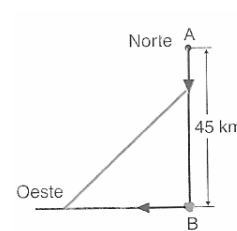
Determine r de modo que a área do canteiro seja máxima. (Neves 11º, 2001, p. 157)



Problemas de Física

LG11.16 Em dado momento o barco A está a 45 km a norte do barco B.

O barco A dirige-se para Sul à velocidade de 9 km/h e o barco B vai para Oeste à velocidade de 12 km/h.



No seu movimento qual a distância mínima que separa os barcos?

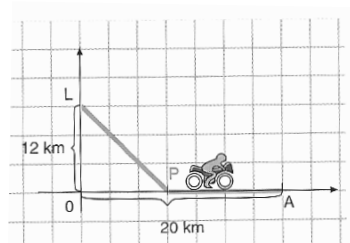
Sugestão: Estuda a função $f: t \mapsto d^2(t)$ visto que d mínima equivale a d^2 mínima.

(Lima e Gomes 11º, 1997, p. 209)

LG11.23. Um ciclista está na localidade L a 12 km do ponto O mais próximo de uma estrada, rectilínea e alcatroada, e pretende ir à aldeia A que dista 20 km de O sobre essa estrada.

O ciclista desloca-se a 10 km/h na estrada alcatroada e a 8 km/h fora da estrada.

Determina o ponto P em que deve atingir a estrada alcatroada para fazer o percurso no menor tempo possível. (Lima e Gomes 11º, 1997, p. 231)



Nota: $(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

Problemas de Economia

N11.13. O custo da vedação

A Beatriz queria ter um jardim com a forma de um rectângulo. Ela entendeu que não queria mais do que 200 m² de terreno pois não teria tempo de cuidar dele devidamente.

Suponha que x representa o comprimento e y a largura do jardim.



a. Escreva y em função de x .

b. Escreva o perímetro P em função de x .

c. Se a Beatriz pretende vedar o jardim com rede que custe 9 euros (1 804\$00) o metro, qual é a função custo para a vedação?

d. Represente graficamente a função custo e determine gráfica e algebricamente o custo mínimo da vedação em função de x . (Neves 11º, 2001, p. 156)

Manuais do 12º ano

Autor: Yolanda Lima; Francelino Gomes

Título: Xeqmat, 12º Ano

Ano, editora e lugar de edição: 1997, Editorial O Livro

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Este manual está estruturado de modo muito semelhante ao manual editado para a reforma anterior. É composto por 392 páginas, num só volume, repartidas por três temas: Probabilidades e combinatória, Introdução ao Cálculo Diferencial II e, por fim, Trigonometria e Números Complexos.

Encontramos os problemas de optimização em dois capítulos: no do Cálculo Diferencial e no da trigonometria.

Autor: Ana M.B. Jorge, C.B. Alves; Graziela Fonseca; Judite Barbedo

Título: *Infinito 12, 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2002, Areal Editores: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Esta obra tem uma estrutura muito semelhante à obra dos mesmos autores analisada no período anterior, também está dividida em três partes, sendo a primeira dedicada às probabilidades e combinatória, a segunda ao cálculo diferencial e a última à trigonometria e números complexos.

Os problemas de optimização constam na segunda e na terceira parte. Os capítulos estão assim estruturados:

1. Introdução ao cálculo diferencial II

- Função exponencial de base superior a um
- Função logarítmica de base a ($a > 1$). Logaritmo de um número
- Limite de uma função segundo Heine
- Continuidade
- Teorema de Bolzano-Cauchy
- Assíntotas
- Funções deriváveis
- Derivada de uma função exponencial
 - Derivada da função logarítmica
 - Teorema da derivada da função composta
 - Primeira derivada e sentido de variação
 - Extremos relativos de uma função
 - Segundas derivadas e concavidades
 - Estudo analítico de funções
 - Problemas de máximos e mínimos
 - Problemas de optimização

2. Trigonometria e números complexos

- Função seno, co-seno e tangente
 - Função seno
 - Função co-seno
 - Estudo intuitivo de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$
 - Derivabilidade das funções seno e co-seno
 - Função tangente
 - Derivabilidade da função tangente
 - Aplicações
 - Resolução de problemas

Os problemas de optimização encontram-se no segundo volume, na parte dedicada aos problemas de optimização. Nesta parte as autoras começam por explicar as etapas a seguir na resolução deste tipo de problemas:

- Definir uma função que sirva de modelo matemático à situação a estudar (se possível com uma só variável);
- Estudar a variação dessa função determinando, em particular, os seus extremos;
- Confrontar os resultados teóricos com o fenómeno real e a situação concreta do problema.

De seguida mostra um conjunto de problemas resolvidos e no final do capítulo, na parte dos exercícios, aparece mais um conjunto de problemas de optimização.

No terceiro volume os problemas de optimização surgem na parte referente às aplicações da derivada e no final do capítulo, na parte destinada aos exercícios.

Autor: Maria Augusta F. Neves

Título: *Matemática 12º Ano*

Ano, editora e lugar de edição: 2002, Porto Editora: Porto

Localização da obra consultada: Biblioteca pessoal

Caracterização e estrutura da obra: Também esta obra tem uma estrutura semelhante à dos manuais da mesma autora analisados anteriormente. Este manual está dividido em três volumes, o primeiro trata as Probabilidades, o segundo as Funções e o último a trigonometria.

Encontramos os problemas de optimização no segundo e no terceiro volume. O segundo volume é composto por 256 páginas repartidas pelos vários sub-temas:

- Funções exponenciais e logarítmicas
- Limites
- Continuidade de uma função
- Derivadas
- Aplicações das derivadas
 - Funções estritamente crescentes e funções estritamente decrescentes
 - Extremos de uma função
 - Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função
 - Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função
 - Extremos relativos e primeira derivada de uma função
 - Teste da segunda derivada
 - Estudo de funções
 - **Problemas de otimização**
 - O que estudou no tema
 - Problemas resolvidos
 - Problemas propostos

O terceiro volume é composto por 176 páginas repartidas pelos vários sub-temas:

- Radiano. Razões trigonométricas
- Fórmulas trigonométricas
- Funções trigonométricas. Equações trigonométricas
- Derivada das funções trigonométricas
 - Estudo intuitivo do $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$
 - Derivada de funções trigonométricas
 - O que estudou no tema
 - Problemas resolvidos
 - Problemas propostos
- Introdução aos números complexos
- Representação trigonométrica de um complexo. Operações
- Domínios planos e condições em variável complexa

Da mesma autora foi também publicado um livro de exercícios, também dividido em três volumes, sendo cada um deles dedicado a cada um daqueles temas.

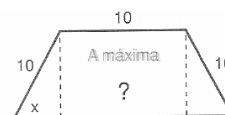
Os problemas de otimização existem nos dois manuais. No segundo surgem explicitamente na parte das aplicações da derivada. No terceiro surgem, não de forma explícita, na parte relativa às derivadas de funções trigonométricas.

Observemos então, os problemas de otimização presentes nas obras.

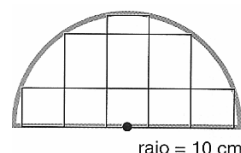
Problemas de Geometria Métrica

LG12.5. De entre os rectângulos com 1 m^2 de área, qual é o que tem perímetro mínimo? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)

LG12.6. Um trapézio tem 3 lados com 10 m cada um, Qual deve ser o comprimento do 4º lado para que a área seja a maior possível? (Fazer base maior = $10 + 2x$.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)

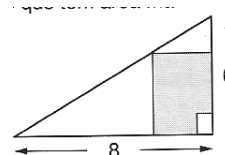


LG12.7. Dos rectângulos inscritos num semicírculo de raio 10 cm, determina a base do que tem maior área. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)



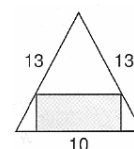
LG12.8. De entre os rectângulos que se podem inscrever neste triângulo rectângulo, determina as dimensões do que tem área máxima.

(um dos ângulos do rectângulo coincide com o ângulo recto do triângulo.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.12. Num triângulo isósceles de lados 10, 13, 13, inscreve-se um rectângulo como a figura indica (base contida na base do triângulo).

Determina as dimensões do rectângulo de modo que a sua área seja máxima. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)



JAFB12.1. [DABC] é uma pirâmide tal que [ABC] é um triângulo em A. O ponto D pertence à recta perpendicular a ABC no ponto B.

Os triângulos [DBA] e [DBC] são rectângulos em B.

$\overline{AB} = 9$ (em centímetros).

$\overline{AC} = 12$ (em centímetros).

$\overline{BD} = 16$ (em centímetros).

Designa-se por M um ponto do segmento [AB] e $\overline{AM} = a$.

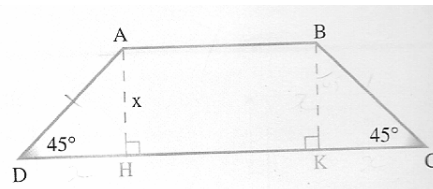
Por M trace-se um plano perpendicular a [AB]. Designa-se por N a sua intersecção com [BC], por P a sua intersecção com [CD] e Q a sua intersecção com [AD].

Exprima em função de a a área do quadrilátero [MNPQ] e averigúe quando é máxima esta área. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 179)

JAFB12.9. $[ABCD]$ é um trapézio isósceles de área $5\sqrt{2} \text{ cm}^2$

Os ângulos agudos medem 45° .

Seja x (em cm) a altura do trapézio e $P(x)$ o seu perímetro (em cm).



- Exprima $\overline{DH}$ e $\overline{CK}$ em função de x .
- Exprima $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ em função de x .
- Utilize a área do trapézio para exprimir $\overline{AB}$ em função de x .
- Mostre que $P(x) = 2\sqrt{2}x + \frac{10\sqrt{2}}{x}$
- Encontre o valor de x para o qual o perímetro do trapézio é mínimo.

Qual é então a medida dos lados do trapézio? Interprete graficamente. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 216)

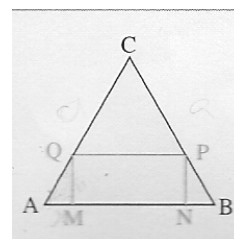
JAFB12.11. Considere o triângulo equilátero $[ABC]$ de lado a .

Inscribe-se neste triângulo um rectângulo $[MNPQ]$.

Faça-se $\overline{AM} = x$

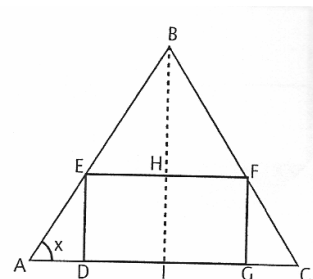
Para que valor de x a área do rectângulo é máxima?

(Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 217)



JAFB12.17. Na figura

- O triângulo $[ABC]$ é isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$)
- $[DEFG]$ é um rectângulo
- $\overline{DG} = 2$
- $\overline{DE} = 1$



- x designa a amplitude do ângulo BAC

a. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de x , por

$$f(x) = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \left(x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right)$$

(Nota: pode ser-lhe útil reparar que $\widehat{BEF} = \widehat{BAC}$)

b. Mostre que $f'(x) = \frac{-\cos(2x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ (f' designa a derivada de f).

c. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é mínima.

Obs: $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

(Exame Nacional, 2ª fase, 1998) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 127)

N12.8. O perímetro mínimo

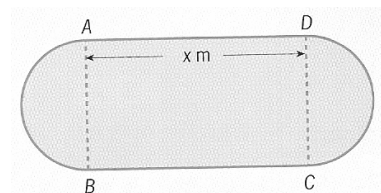
A figura representa uma superfície constituída por um rectângulo $[ABCD]$ e dois semicírculos de diâmetros $[AB]$ e $[CD]$.

A área do rectângulo é 200 m^2 e $\overline{AD} = x \text{ m}$.

a. Mostre que o perímetro $P \text{ m}$ da figura é dado por:

$$P = \frac{200\pi}{x} + 2x$$

b. Determine o perímetro mínimo que a figura pode ter. (Neves, 12º V2, p. 231)

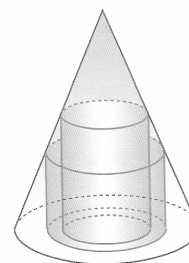


N12.5. Observe a figura:

Os cilindros e o cone têm a base assente no mesmo plano e as respectivas alturas estão contidas na mesma recta.

O cone tem de altura 60 cm e raio da base 10 cm .

Determine o volume máximo do cilindro que se pode inscrever no cone. (Neves, 12º V2, p. 217)



Problemas de Geometria Analítica

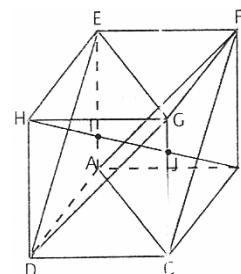
JAFB12.3. Consideremos o cubo de aresta 1 unidade.

Considere o referencial $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ e considere o plano de equação

$$x - y + z = a \quad a \in [-1, 2]$$

Determine a de modo que a secção do plano com o cubo tenha área máxima.

Quais são os vértices do polígono secção correspondente à área máxima? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 209)

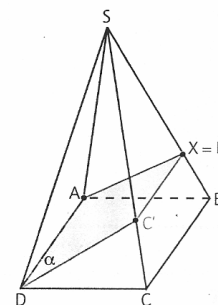


JAFB12.4. Considere a pirâmide $[SABCD]$ de base quadrada $[ABCD]$, em que SA é perpendicular à base $[ABCD]$, tal que $\overline{AB} = 3$ e $\overline{SA} = 3\sqrt{3}$ (em centímetros).

O plano α contém AD , intersecta $[SB]$ em B' e $[SC]$ em C' .

a. Designando por x o comprimento $\overline{SX}$, mostre que

$$\overline{AB'}^2 + \overline{B'C'}^2 + \overline{C'D}^2 = \frac{5}{2}x^2 - 21x + 63$$



b. Faça $y = \overline{AB}^2 + \overline{B'C}^2 + \overline{C'D}^2$, estude a função

$$f: x \rightarrow y$$

e interprete o significado dos extremos relacionando-os com a secção correspondente.

(Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 210)

JAFB12.5. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial o.n. e A, B, C, S definidos por

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}; \overrightarrow{OC} = \vec{j}; \overrightarrow{AB} = \vec{j}; \overrightarrow{OS} = \vec{k}$$

Seja a um número real do intervalo $]0, 1[$.

Pretende-se determinar a área máxima da secção definida pela intersecção do plano de equação $x + y = a$ com a pirâmide [SOABC].

1. Designemos por E, F, H, I e G os pontos de intersecção do plano com as arestas da pirâmide.

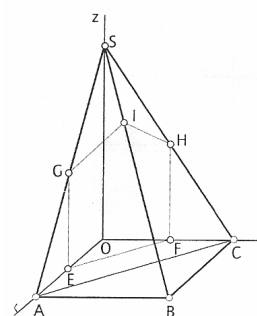
Prove que [GEFH] é um rectângulo.

2. Determine as coordenadas de I e calcule a área do triângulo [GHI].

3. Seja f a função, área da secção, definida em $]0, 1[$ por $f(a) = a\sqrt{2} \frac{(4-3a)}{4}$.

Estude a variação de f . Para que valor de a é esta área máxima?

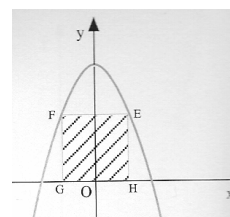
4. Mostre que o plano que determina a área máxima é paralelo a AC e OS e passa pelo baricentro do triângulo [OAC]. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 210)



JAFB12.7. Considere a parábola definida por

$$y = -x^2 + 9.$$

Supondo que a unidade adoptada é o cm, determine as dimensões do rectângulo [EFGH] de área máxima sabendo que E e F são pontos da parábola e G e H são pontos do eixo das abcissas. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 215)



JAFB12.12. Seja $(O, \vec{i}, \vec{j})$ um referencial o.n.

Seja C o círculo de centro O e de raio 1, A, o ponto de coordenadas (1, 0) e A', o ponto de coordenadas (-1, 0). Seja M um ponto de C distinto de A e de A', de ordenada positiva e M' o seu simétrico em relação a AO.

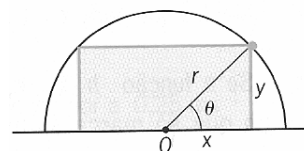


Pretende-se determinar a posição do ponto M, de modo que a área do triângulo [AMM'] seja máxima e conhecer a natureza do triângulo. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.59)

N12.16. O rectângulo no semicírculo: Observe a figura ao lado.

De acordo com os dados na figura, mostre que o rectângulo inscrito num semicírculo de raio r tem área

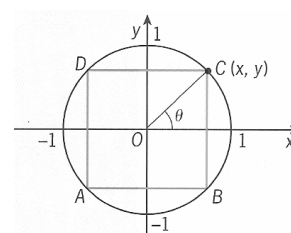
máxima se $x = y = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ (Neves, 12º V3, p.110)



N12.17. O rectângulo no círculo

Com centro na origem do referencial representou-se uma circunferência de raio 1 e um rectângulo.

- Escreva uma equação para a circunferência.
- Escreva a área A do rectângulo [ABCD] em função de θ .



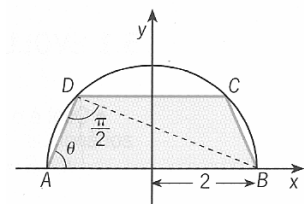
- Qual é a área máxima do rectângulo [ABCD]? (Neves, 12º V3, p.111)

N12.18. O trapézio no semicírculo

Observe a figura.

Num semicírculo de raio 2 inscreveu-se um trapézio [ABCD] isósceles e de base maior igual ao diâmetro.

Qual é a área máxima do trapézio [ABCD] (com aproximação às décimas)? (Neves, 12º V3, p.111)

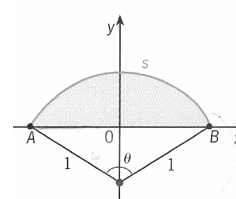


N12.19. A área máxima

Na figura está representado um arco circular de comprimento s e raio 1.

Os pontos A e B, que limitam o arco, pertencem ao eixo das abcissas.

Mostre que A é máxima quando $\theta = \pi$ (Neves, 12º V3, p.111)



Problemas de Medida em Contexto Real

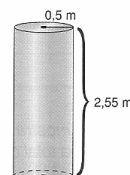
LG12.1. Gasómetros de volume constante – preço mínimo.

Função radical fraccionária

O custo de fabrico dum gasómetro cilíndrico com volume de 2 m^3 será mínimo quando a área total for mínima, porque se usa assim menos material, e essa área depende do raio das bases.

Qual é então o raio óptimo para que o custo seja mínimo?

(Lima e Gomes 12º, 1997, p. 231)



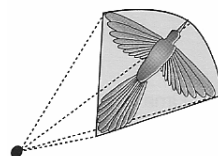
LG12.3. "Papagaio" com área máxima.

Função racional fraccionária

Uma fábrica de artigos de desporto produz "papagaios" de tecido muito fino esticado numa armação de alumínio com a forma de um sector circular e tendo 2 m de perímetro total.

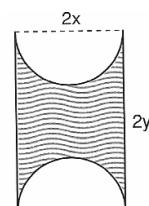
Determina, em radianos, a amplitude do sector para que

a resistência ao vento seja máxima (área máxima). (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.9. Vai construir-se um lago com a forma indicada na figura – um rectângulo ao qual se suprimem dois semicírculos. Para contornar o lago (a zona com água) dispõe-se de 100 m de gradeamento.

Quais as dimensões do rectângulo inicial para que a área com água seja máxima? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 235)



LG12.10. A Direcção dum banco encomendou uma mesa com a forma desta figura.

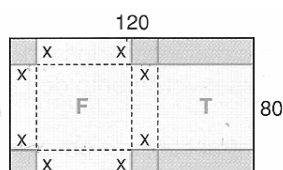
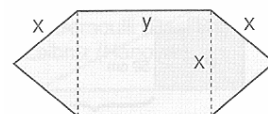
(Um rectângulo e dois triângulos equiláteros)

O perímetro da mesa tem de ter 10 m para dar lugar aos 10 membros da Direcção, mas a área tem de ser a maior possível.

Tendo em conta o perímetro, o fabricante resolveu tomar $y = 3 \text{ m}$ e $x = 1 \text{ m}$, mas foi uma opção errada e teve de fazer outra mesa. Porquê?

Quais são os valores correctos com aproximação ao cm?

Se x e y (metros) tivessem de ser números inteiros, a solução do fabricante teria sido aceite? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 236)

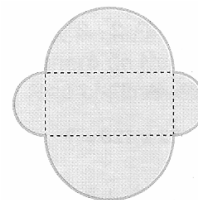


LG12.11. Num rectângulo de cartão fazem-se os cortes indicados a vermelho e dobra-se pelo ponteadado de

modo a obter uma caixa com tampa. Os rectângulos F (fundo) e T (tampa) são iguais. Calcula x de modo que o volume da caixa seja máximo. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)

LG12.13. Com um gradeamento de 100 m de comprimento contorna-se um jardim com a forma indicada (um rectângulo e 4 semicírculos):

Determina as dimensões do rectângulo de modo que a área do jardim seja o maior possível (Designa por $2x$ e $2y$ as dimensões do rectângulo.) (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)



JAFB12.2. Num cilindro de 30 cm de altura e em que a base é um círculo de 10 cm de raio, coloca-se uma esfera de raio r , em centímetros.

A esfera está coberta de água como mostram as figuras.

a. O raio da esfera é 8 cm. Qual é, em centímetros cúbicos, o volume de água necessário para cobrir?

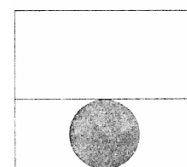
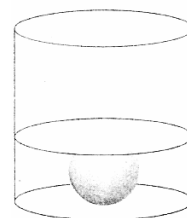
b. Exprima, em função de r , o volume de água $V(r)$ necessário para cobrir uma esfera de raio r .

c. Qual é o domínio da função V ?

d. Estude $V'(r)$ e o sentido de variação de V .

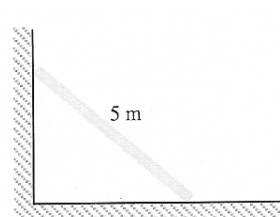
e. Qual é o raio da esfera correspondente a um volume máximo?

f. Haverá esferas de raios diferentes que necessitem da mesma quantidade de água para serem cobertas? Analise o gráfico de $y = V(r)$ e tire conclusões. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 207)



JAFB12.6. Num canto de um terreno murado pretende-se delimitar com uma trave de madeira a maior área de terreno possível.

Sabendo que a trave mede 5 metros, em que posição deverá ser colocada? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 214)



JAFB12.8. Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).

Compare a altura com o diâmetro da caixa. (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p.216)

JAFB12.10. Uma janela é formada por um rectângulo $[ABCD]$ e por um semicírculo de diâmetro $[AB]$.

Seja x o raio do semicírculo e y a distância $\overline{BC}$ expressa em metros.

O perímetro da janela é igual a 5 metros.

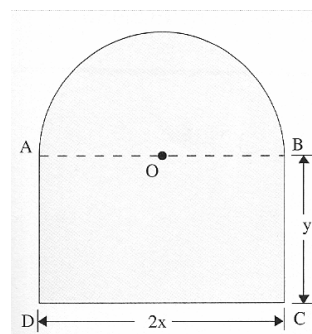
Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima.

- Exprima o perímetro da janela em função de x e de y .
- Retire da expressão o valor de y em função de x .
- Para que valores de x se tem $y > 0$?
- Exprima a área da janela em função de x e de y .
- Utilizando os resultados das questões anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma

$$A(x) = 5x - \frac{4 + \pi}{2} x^2$$

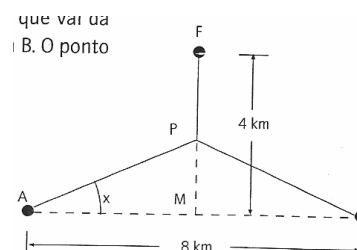
- Deduz para que valores de x e de y a área da janela é máxima.

Encontre o valor exacto dessa área e em seguida o valor aproximado a menos de 10^{-2} (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V2, p. 216)



JAFB12.13. Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até ao ponto P, e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.



Tem-se ainda que:

- O ponto M, ponto médio de $[AB]$, dista 4 km de F;
- x é a amplitude do ângulo PAM $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

a. Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$g(x) = 4 + \frac{8 - 4 \sin x}{\cos x}$$

(Sugestão: comece por mostrar que $\overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4 \tan x$)

b. Calcule $g(0)$ e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c. Determine o valor de x para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

(Exame Nacional 1ª Chamada, 1998) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 115)

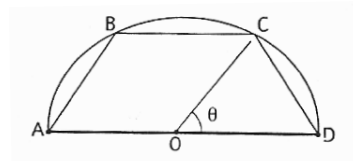
JAFB12.14. A secção de um túnel é um semicírculo com 1 hm de raio.

No interior do túnel há uma estrutura com a forma de um trapézio, como mostra a figura.

Qual é o valor de θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ que torna

máxima a área da secção da estrutura trapezoidal?

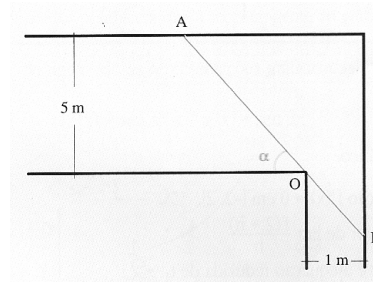
(Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.117)



JAFB12.15. Na figura está representado um corredor de um museu.

Considere a recta que passa por O, sendo

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e que encontra as paredes em A e B.



1. Exprima $\overline{OA}$ em função de α .

2. Exprima $\overline{OB}$ em função de α .

3. a. Faça $\overline{AB} = f(\alpha)$ e mostre que $f(\alpha) = \frac{5}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$

b. Determine a função derivada de f em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e deduza recorrendo à

calculadora um valor aproximado α_0 de α para o qual f admite extremo.

c. Calcule o valor de $\overline{AB}$ para $\alpha = \alpha_0$.

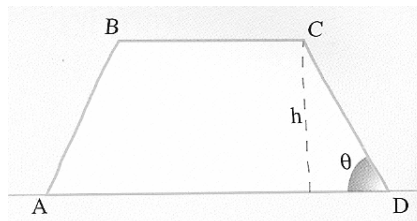
d. Pretende-se transportar naquele corredor um painel, em posição vertical.

Quais as consequências práticas que se podem tirar do estudo feito nas alíneas anteriores? (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 118)

JAFB12.16. A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima, com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2 \text{ dm}$.

Designando por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC,

1. Exprima a altura h do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ



2. Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em dm^2 , por

$$A(\theta) = 4\sin\theta + 2\sin 2\theta$$

3. Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área;

4. Calcule $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{A(\theta)}{\theta}$.

(Prova de Aferição, Época normal, 1994) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p. 122)

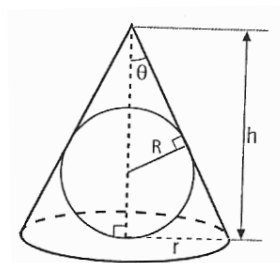
Obs: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

JAFB12.18. Um desenhador de peças de arte decorativas projecta pôr no mercado esferas de cobre dentro de cones de cristal transparentes.

Cada esfera tem raio R e será comercializada num cone com base de raio r e altura h (ver figura).

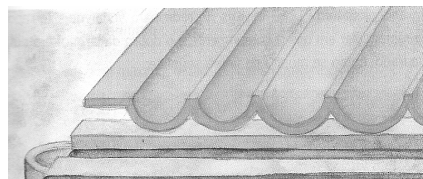
Muitos cones poderão ser fabricados tendo diferentes ângulos θ .



1. Exprima o volume V de cada cone em função do ângulo θ .
2. Que valor deve ser escolhido para θ de modo que o cone a ser fabricado tenha volume mínimo? (Esta escolha minimiza a quantidade de cristal a gastar e dá o máximo destaque à esfera introduzida.) (Jorge, Alves, Fonseca e Barbedo, 12º V3, p.13)

N12.1. A caleira de capacidade máxima

Uma folha rectangular de metal com 28 m de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.



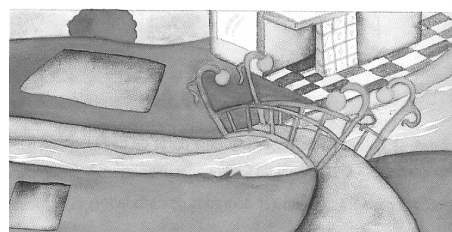
Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo a que a capacidade da caleira seja máxima.

Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado? (Neves, 12º V2, p. 215)

N12.2. As vedações

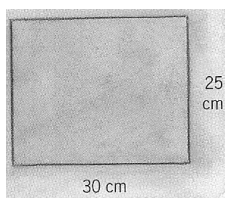
Um agricultor tem 1680 metros de rede para vedar dois terrenos: um rectangular em que o comprimento é o dobro da largura e o outro quadrado, como mostra a figura seguinte.

Determine as dimensões dos terrenos de



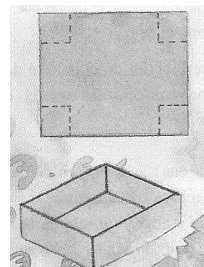
modo a maximizar a área dos dois espaços. (Neves, 12º V2, p. 216)

N12.3. Uma caixa aberta com a base rectangular vai ser construída de uma folha de cartolina com 25 cm por 30 cm.



Na folha serão cortados quatro cantos com a forma de um quadrado.

Determine, com aproximação às centésimas, as dimensões dos cantos a cortar de modo a obter-se uma caixa de volume máximo. (Neves, 12º V2, p. 215)



N12.7. Um depósito de água aberto tem a forma de um prisma rectangular com duas faces laterais quadradas.

A área total do depósito (Sem tampa) é de 54 m².

Seja x a altura do tanque:

a. Mostre que o volume, V m³, do tanque é dado por:

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

b. Determine s de modo a que o volume seja máximo. (Neves, 12º V2, p. 222)

N12.9. O tanque de superfície mínima

Um tanque com a forma de um cilindro, aberto na parte superior, tem de altura 4 metros e raio r m.

O volume do tanque é 1 m³.

a. Mostre que $h = \frac{1}{\pi r^2}$

b. Sendo S a sua área total interior, mostre que, em m², $S = \frac{2}{r} + \pi r^2$.

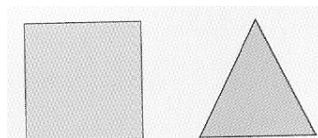
c. Determine o valor de r de modo que a área da superfície interior, S , seja a menor possível. (Neves, 12º V2, p. 231)

N12.10. O triângulo e o quadrado

Com um arame de 20 m de comprimento fez-se um quadrado e um triângulo equilátero.

Pretende-se minimizar as áreas das duas figuras.

Escreva uma curta composição onde explique como deveria ser partido o arame. (Neves, 12º V2, p. 231)



N12.11. Maximizar a iluminação.

Observe a figura.

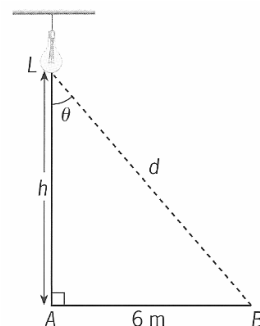
No ponto L está uma lâmpada, situada à distância h do solo.

O ponto B, no solo, dista 6 m do ponto A.

Sabe-se que a intensidade i da iluminação no ponto B é dada por $i(\theta) = k \times \frac{\cos \theta}{d^2}$ (i é directamente proporcional ao $\cos \theta$ e inversamente proporcional ao quadrado da distância, d , da lâmpada ao ponto B.)

Calcule a que distância deve estar a lâmpada do solo de modo a que seja máxima a iluminação no ponto B.

Na figura $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (Neves, 12º V3, p.97)



N12.12. O comprimento do autocarro.

Duas ruas formam um ângulo de 90° .

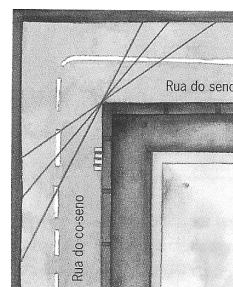
Um autocarro circula numa das ruas e pretende ir para a outra rua.

Uma das ruas tem 4 m de largura e a outra tem 6 m.

Será que o autocarro dá a volta?

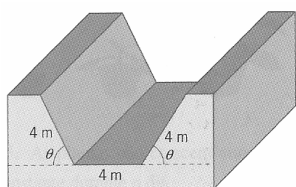
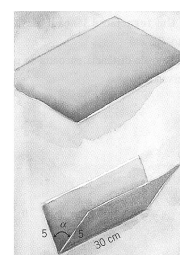
Na resolução do problema não considere a largura do autocarro.

Efectue os cálculos necessários e use as derivadas e a calculadora gráfica na sua resolução. (Neves, 12º V3, p.98)



N12.13. Com uma folha de metal de 30 cm de comprimento e 10 cm de largura fez-se uma caleira como se mostra na figura.

Determine α de modo a maximizar a quantidade de água que a caleira pode comportar. (Neves, 12º V3, p.95)



N12.14. A secção de um canal de drenagem tem a forma de um trapézio, como se mostra na figura;

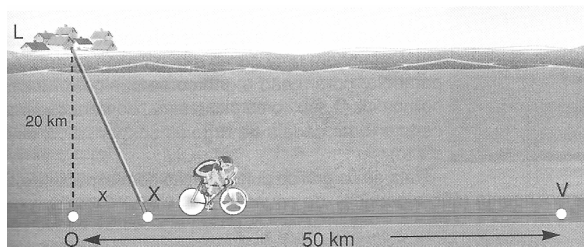
De acordo com os dados da figura, calcule a amplitude de θ de modo a que o caudal da água que o canal possa suportar seja máximo. (Neves, 12º V3, p.100)

Problemas de Física

LG12.2. O trajecto mais rápido pode não ser o mais curto.

Função com radicais

Um ciclista mora na localidade L que dista 20 km da estrada alcatroada; O é o ponto da estrada mais próximo de L .

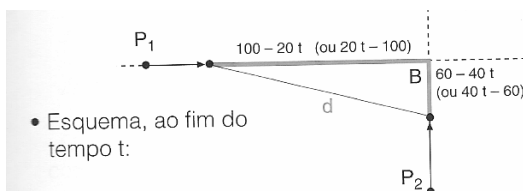
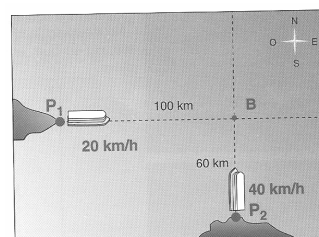


Diariamente tem de se deslocar à vila V , a 50 km de O . Na estrada desloca-se a 25 km/h, mas ao atravessar o campo só consegue andar a 15 km/h. Determina o ponto X onde deve entrar na estrada de modo a fazer o percurso no menor tempo possível. Supõe que os dois trajectos a cores são rectilíneos. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 233)

LG12.4. Os "ferry-boats" com rotas cruzadas

Função com radicais

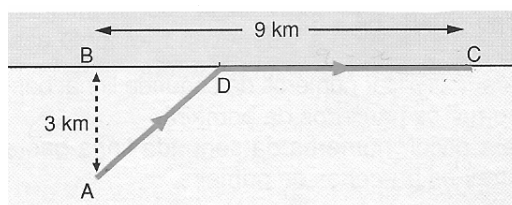
Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do ponto P_1 para leste, a 20 km/h e outro do ponto P_2 para norte, a 40 km/h. A bóia B , no cruzamento das rotas, dista



100 km de P_1 e 60 km de P_2 .

Determina ao fim de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima. (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 236)

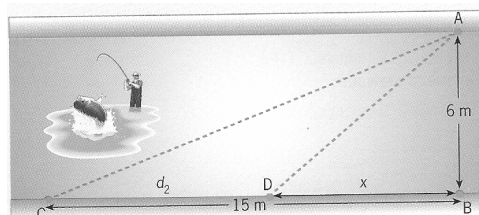
LG12.14 Uma pessoa está num barco A a 3 km do ponto B da praia, mais próximo de A , e tem de ir ao outro ponto C da praia a 9 km de B .



Se o barco se desloca à velocidade de 6 km/h e o tripulante pode correr à velocidade de 10 km/h como deve este proceder para chegar a C no mais curto tempo possível? (Lima e Gomes 12º, 1997, p. 247)

N12.6. Um rio tem 6 metros de largura.

Um pescador encontra-se no local A , numa margem do rio, e pretende ir para C , na outra margem, demorando o menor tempo possível.



A distância de C ao local B, oposto a A, é de 15 m.

A velocidade do pescador na água é de 20 km/h e em terra é de 60 km/h.

Como deve proceder o pescador? (Neves, 12º V2, p. 220)

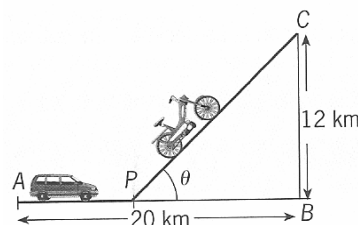
N12.15. Minimizar o tempo: Observe a figura.

Para ir de A a C o Vítor terá de usar dois meios de transporte: Carro de A a um ponto P de [AB] e de bicicleta de P a C.

De carro a velocidade média é de 60 km/h e de bicicleta é de 10 km/h.

O Vítor quer minimizar o tempo necessário para ir de A a C.

Quantos km deve o Vítor andar de carro? (Neves, 12º V3, p. 110)



Problemas de Economia

N12.4. Uma fábrica de frascos destinados a produtos de conserva pretende o seguinte:

- Construir uma embalagem cilíndrica com a capacidade de $48\pi \text{ cm}^3$;
- A base inferior do cilindro é do mesmo material da superfície lateral que custa 2 euros por m^2 ;
- A base superior do cilindro é de um material mais raro, que custa 3 euros por m^2 .

Supondo que não haverá perdas de material determine, com aproximação às centésimas, a altura e o raio da base do cilindro de modo a minimizar o custo do material gasto. (Neves, 12º V2, p. 216)

C. Análise do período

Começando pela análise do programa oficial, constatamos que os problemas de otimização fazem parte do programa de 11º e de 12º ano. Estes estão inseridos no capítulo sobre Cálculo Diferencial. Também no 10º ano os problemas de otimização são abordados, mas no capítulo destinado às Funções e Gráficos. No 10º ano os problemas são abordados num contexto de problemas de máximos e mínimos; no 11º ano como aplicação das derivadas e no 12º são referidos como problemas de otimização. Nesta

reforma o uso da calculadora gráfica já se torna obrigatório e os programas não fazem qualquer referência aos manuais escolares a utilizar.

O primeiro aspecto a salientar para este período é o facto de o número de problemas de optimização encontrados ser significativamente superior ao número de problemas encontrados nos períodos anteriores. Neste período encontrámos cerca de cento e dezanove problemas, enquanto que no período anterior foram apenas cinquenta e cinco, ou seja, temos neste período mais do dobro do que no período anterior. Acrescentamos também que, como os manuais analisados neste período são dos mesmos autores dos manuais do período anterior, muitos dos problemas encontrados neste período são os mesmos que tinham sido publicados no manual da reforma anterior. Assim, destes cento e dezanove problemas, cinquenta e um surgiram já nos manuais do período anterior. Apenas quatro problemas do período anterior não estão presentes nos manuais deste período.

O aumento mais significativo foi no número de problemas do 12º ano que passou de cinco referentes ao período anterior para cinquenta e um neste período. Este aumento está relacionado com o facto de, neste período, encontrámos problemas de vários tipos enquanto que no período anterior apenas contemplavam problemas relacionados com Trigonometria. Também os problemas dos manuais do 10º ano sofreram um aumento significativo, pois passaram de três no período anterior para dezanove neste período. Quanto ao 11º ano, o aumento foi irrelevante, uma vez que passámos de quarenta e sete problemas para quarenta e nove problemas neste período. O número de problemas encontrados distribui-se de forma muito semelhante pelos três autores. Nos manuais de Brito e outros (**JAFB**) existem trinta e quatro problemas; nos manuais de Lima e Gomes (**LG**) quarenta e quatro problemas e nos manuais de Neves (**N**) quarenta e um problemas.

Outro aspecto a salientar é o facto de, neste período, o uso das calculadoras gráficas pelos alunos ser obrigatório. Por esse motivo, é possível, por parte dos alunos, resolver os problemas de optimização, graficamente, sem que seja necessário o auxílio da derivada para o cálculo dos extremos. Por isso, a forma de resolução dos problemas de optimização sofre algumas alterações relativamente aos períodos anteriores.

Olhemos agora para as características dos problemas.

Relativamente ao tipo de problema constatámos que a maioria dos problemas surge sob a forma de exercício (oitenta e oito); vinte e quatro sob a forma de exemplo (JAFB10.2, N10.2, N10.3, JAFB11.1, JAFB11.2, JAFB11.3, JAFB11.4, LG11.1, LG11.2, LG11.3, LG11.4, N11.1, N11.2, N11.5, JAFB12.1, JAFB12.12, LG12.1, LG12.2, LG12.3, LG12.4, N12.1,

N12.2, N12.11, N12.12); três sob a forma de relatório (JAFB10.1, LG10.1, N12.10); dois sob a forma de exemplo resolvido (N12.6, N12.7) e dois sob a forma de demonstração (JAFB12.5, N12.16). Os manuais do 11º e do 12º ano mostram, primeiro, alguns exemplos ou exercícios resolvidos e, posteriormente, os outros exercícios. Nos manuais do 10º ano isso não acontece, uma vez que o manual de Jorge e outros assim como o manual de Lima e Gomes apresentam o primeiro problema de optimização sob a forma de relatório e o manual de Neves expõe o primeiro problema de optimização sob a forma de exercício. É ainda de referir que, relativamente aos manuais do 10º ano, em que surgem os primeiros problemas de optimização, o manual de Jorge e outros apenas apresenta um exemplo (JAFB10.2), o manual de Lima e Gomes não tem nenhum exemplo ou exercício resolvido e o manual de Neves tem dois exemplos. Examinemos um dos problemas que surge sob a forma de demonstração:

“ **(JAFB12.5)** Seja $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um referencial o.n. e A, B, C, S definidos por

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i}; \overrightarrow{OC} = \vec{j}; \overrightarrow{AB} = \vec{j}; \overrightarrow{OS} = \vec{k}$$

Seja a um número real do intervalo $]0, 1[$.

Pretende-se determinar a área máxima da secção definida pela intersecção do plano de equação $x + y = a$ com a pirâmide $[SOABC]$.

1. Designemos por E, F, H, I e G os pontos de intersecção do plano com as arestas da pirâmide.

Prove que $[GEFH]$ é um rectângulo.

2. Determine as coordenadas de I e calcule a área do triângulo $[GHI]$.

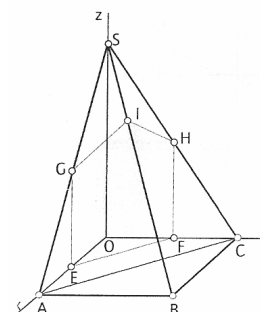
3. Seja f a função, área da secção, definida em $]0, 1[$ por $f(a) = a\sqrt{2} \frac{(4-3a)}{4}$.

Estude a variação de f . Para que valor de a é esta área máxima?

4. Mostre que o plano que determina a área máxima é paralelo a AC e OS e passa pelo baricentro do triângulo $[OAC]$.”

Infere-se que na última alínea deste problema é pedido para mostrar que a área é máxima quando o plano é paralelo a duas rectas e passa num determinado ponto.

Relativamente ao contexto em que os problemas se enquadram verifica-se que a maioria dos problemas são Geométricos/de Medida, sendo cinquenta e seis de Contexto Real de Medida, trinta e cinco de Geometria Métrica e quinze são de Geometria Analítica. Detectámos depois sete problemas de Física (LG11.16, LG11.23, LG12.2, LG12.4, LG12.14, N12.6, N12.15), quatro de Aritmética (LG11.8.a, LG11.8.b, N11.6.a, N11.6.b) e dois



de Economia (N11.13, N12.4). Observámos ainda que os manuais de Jorge e outros não têm problemas de Física, Aritmética ou Economia, indicando apenas problemas Geométricos. No entanto e apesar de este manual apresentar apenas problemas Geométricos, estes são muito diversificados. Referimos ainda que apenas o manual de Neves nos mostra problemas de Economia.

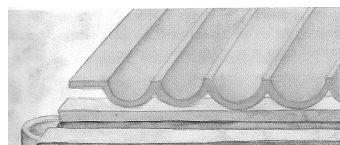
Passando agora para o que se pretende otimizar, vemos que na maioria dos problemas se pretende otimizar uma área (setenta); em vinte e três um volume; em dez uma distância; em cinco um perímetro; em cinco o tempo; em três o produto; em dois o custo e num a soma.

Quanto aos esquemas ou figuras auxiliares, vemos que na maioria dos problemas há uma figura com dados (setenta e um); em vinte e cinco uma figura simples e em vinte e três problemas não encontramos esquemas ou figuras auxiliares. Examinemos a seguir um exemplo de cada um destes problemas:

" **(JAFB12.8)** Que dimensões, com aproximação a 0,1 mm, deve ter uma caixa de conservas cilíndrica, com a capacidade de 1l, para que no seu fabrico se gaste o mínimo de material? (A espessura do material de que é feita não é de considerar).

Compare a altura com o diâmetro da caixa."

" **(N12.1)** A caleira de capacidade máxima
Uma folha rectangular de metal com 28 m de largura vai ser utilizada para construir uma caleira.



Pretende-se dobrar na perpendicular uma parte de cada lado da folha, de modo a que a capacidade da caleira seja máxima.

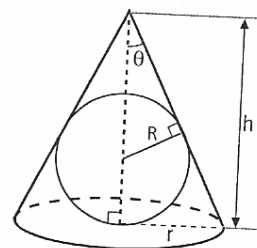
Quantos centímetros devem ser dobrados de cada lado?"

" **(JAFB12.18)** Um desenhador de peças de arte decorativas projecta pôr no mercado esferas de cobre dentro de cones de cristal transparentes.

Cada esfera tem raio R e será comercializada num cone com base de raio r e altura h (ver figura).

Muitos cones poderão ser fabricados tendo diferentes ângulos θ .

1. Exprima o volume V de cada cone em função do ângulo θ .
2. Que valor deve ser escolhido para θ de modo que o cone a ser fabricado tenha volume mínimo? (Esta escolha minimiza a quantidade de cristal a gastar e dá o máximo destaque à esfera introduzida.)"



Nestes problemas as figuras dão um apoio importante, auxiliando no raciocínio da resolução do problema. No primeiro problema não é dado qualquer apoio, no segundo é

apresentada a ilustração da figura e no último, para além da ilustração encontramos alguns dados na figura.

Passando agora para o tipo de dados do enunciado, reparamos que a maioria dos problemas apresenta dados numéricos (cento e catorze), sendo apenas cinco os problemas com dados genéricos (JAFB10.3, LG10.3, JAFB12.11, JAFB12.18, N12.6). Portanto, os manuais do 11º ano não contêm problemas com dados genéricos e tanto os manuais de Lima e Gomes, como os manuais de Neves, apenas referem um problema com dados genéricos.

Em relação ao enunciado, apuramos que oitenta problemas apresentam um enunciado simples e apenas trinta e nove uma resolução encaminhada. Nos problemas dos manuais do 10º ano apenas três problemas apresentam um enunciado simples (JAFB10.3, N10.2 e N10.3). Nos problemas dos manuais do 11º ano apenas cinco apresentam uma resolução encaminhada (LG11.12, LG11.20, LG11.21, N11.7, N11.9). Por fim, nos manuais do 12º ano o número de problemas com enunciado simples é ligeiramente superior ao número de problemas com resolução encaminhada. Analisemos o exemplo a seguir:

“(N12.9) O tanque de superfície mínima

Um tanque com a forma de um cilindro, aberto na parte superior, tem de altura 4 metros e raio r m.

O volume do tanque é 1 m^3 .

a. Mostre que $h = \frac{1}{\pi r^2}$

b. Sendo S a sua área total interior, mostre que, em m^2 , $S = \frac{2}{r} + \pi r^2$

c. Determine o valor de r de modo que a área da superfície interior, S , seja a menor possível.”

Vemos, neste problema, que as duas alíneas que precedem a questão de otimização são muito importantes na medida em que, a primeira auxilia na determinação de uma das variáveis em função da outra variável e a segunda alínea auxilia na determinação da função que posteriormente se pretende otimizar.

Indo agora para a função auxiliar, esta surge implicitamente na maioria dos problemas (oitenta e cinco) e surge explicitamente em apenas trinta e quatro. A função auxiliar aparece explicitamente em problemas geométricos em que, por exemplo, é dado o valor da área, perímetro ou volume de uma figura, ou em problemas aritméticos em que, por exemplo, é dado o valor da soma ou produto entre dois números. Surge implicitamente em problemas em que é necessário aplicar o Teorema de Pitágoras,

noção de distância, semelhança de figuras, expressão de uma função, funções trigonométricas, noção de velocidade, ou seja, problemas em que não é imediato, a partir dos dados, a forma de obter uma variável a partir da outra.

Tratemos agora das noções aplicadas na resolução dos problemas. Uma vez que predominam os problemas geométricos, também as noções mais aplicadas são as geométricas. A fórmula de cálculo do perímetro é a noção mais aplicada, surgindo em vinte e oito problemas. Normalmente esta noção aplica-se em problemas em que é dado o perímetro de uma figura que nos auxilia a determinar a medida de um lado em função dos outros lados. O Teorema de Pitágoras aplica-se em vinte problemas, normalmente naqueles em que temos triângulos rectângulos, ou figuras inscritas. A fórmula da distância surge em vinte problemas e as funções trigonométricas surgem em dezassete problemas. As outras noções encontram-se em número mais reduzido; a semelhança de figuras surge em onze problemas; a fórmula da área surge em oito; a fórmula do volume surge em nove e a as magnitudes físicas em sete. Também a noção de soma surge em sete problemas e, por fim, a noção de função surge em três (função quadrática e equação da elipse). É de salientar que o número de problemas em que se utilizam as fórmulas trigonométricas sofreu um grande aumento. Os problemas dos manuais do 10º ano apenas aplicam quatro noções: Teorema de Pitágoras, noção de distância, fórmula do perímetro e fórmula da área. Existem oito problemas em que é utilizada mais do que uma noção, como por exemplo o Teorema de Pitágoras e a semelhança de figuras.

Quanto à estratégia para a resolução, apenas encontramos um problema histórico (JAFB10.1) e seis que saíram em exame (JAFB10.6, LG10.3, JAFB12.7, JAFB12.13, JAFB12.16, JAFB12.17). Dos restantes, a maioria já saiu em manuais anteriores (setenta e nove) e trinta e três surgem neste manual pela primeira vez.

As funções utilizadas são maioritariamente as polinomiais (setenta e três problemas). As restantes ocorrem em número semelhante: dezassete são trigonométricas, dezasseis são racionais e treze são irracionais. Nos manuais do 10º ano apenas encontramos um problema com uma função irracional (JAFB10.9), sendo todos os restantes com funções polinomiais e nos manuais do 11º ano apenas existe um em que se aplicam as funções trigonométricas (LG11.18).

Com respeito ao esquema de cálculo, utilizado nos vinte e seis problemas que apresentam resolução, verificamos que na maioria dos casos (quinze problemas) o extremo é determinado a partir do sinal da derivada e em quatro é calculado o vértice da parábola (JAFB10.2, N10.2, N10.3, JAFB12.1). Em três faz-se o cálculo apenas dos zeros da derivada (JAFB11.4, N12.11, N12.12), em três o estudo do sinal da segunda derivada

(N12.1, N12.2, N12.7), em cinco utiliza-se a calculadora gráfica (JAFB10.1, JAFB11.4, N12.1, N12.7, N12.12) e num problema a resolução é feita de outra forma (JAFB10.1), sendo neste caso, algebricamente e geometricamente. Existem cinco problemas que apresentam mais do que uma resolução (JAFB10.1, JAFB11.4, N12.1, N12.7, N12.12).

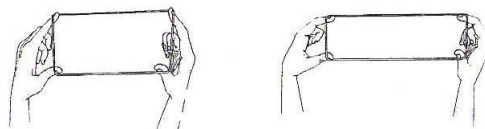
Olhando para a resolução dos problemas do 10º ano, verificámos que em quase todos se faz apenas o cálculo do vértice da parábola, não se utilizando ainda as potencialidades da calculadora gráfica para calcular os extremos. Apenas na resolução do problema JAFB10.1 não se faz o cálculo do vértice da parábola. Nos problemas do 11º ano apenas num se faz apenas o cálculo dos zeros da derivada e nos restantes calculam-se os zeros da derivada e faz-se o estudo do seu sinal. Por fim, nos problemas dos manuais do 12º ano, reparámos que estes apresentam uma maior diversidade de processos de resolução, sendo que os problemas em que indicam o estudo do sinal da segunda derivada e os problemas em que se utiliza a calculadora gráfica, para calcular os extremos, apenas surgem neste ano.

Em relação aos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares não existem problemas que não apresentem um destes auxiliares. Na maioria dos problemas é encontrámos o quadro de monotonia (quinze problemas); em treze o gráfico da função e só num a figura (JAFB11.4). Verificamos ainda que em todos os problemas em que o extremo é calculado, fazendo o estudo do sinal da derivada, é apresentado o quadro de monotonia.

Apreciemos alguns exemplos de resoluções apresentadas nos manuais e de auxiliares à resolução:

“ (JAFB10.1) Problema de Euclides

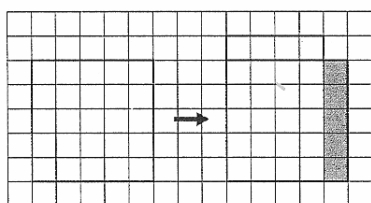
De todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual o que tem área máxima?



I. Geometricamente

A observação de diversos rectângulos, todos eles com o mesmo perímetro, sugere-nos que o quadrado é o que tem a maior área.

A demonstração geométrica é muito simples e sugestiva:



Partindo de um quadrado, constrói-se um rectângulo, que tem uma dimensão um pouco maior e a outra, outro tanto menor do que o lado do quadrado.

A barra roxa é maior que a barra azul, logo a área do quadrado inicial é maior do que a do rectângulo.

II. Algebricamente

Se considerarmos um quadrado com 10 cm de lado e diminuirmos sucessivamente uma unidade a um dos lados acrescentando-a ao outro, obtemos áreas progressivamente menores:

$$\begin{array}{ll} 10 \times 10 = 100 & \\ 11 \times 9 = 99 & \dots\dots\dots (10 + 1) (10 - 1) = 99 \\ 12 \times 8 = 96 & \dots\dots\dots (10 + 2) (10 - 2) = 96 \\ 13 \times 7 = 91 & \dots\dots\dots (10 + 3) (10 - 3) = 91 \\ 14 \times 6 = 84 & \dots\dots\dots (10 + 4) (10 - 4) = 84 \\ 15 \times 5 = 75 & \dots\dots\dots (10 + 5) (10 - 5) = 75 \end{array}$$

Constata-se que " $10 + *$ " vezes " $10 - *$ " é menor que 10×10 e que, quanto maior for $*$, menor é o valor do produto.

O enunciado algébrico correspondente ao resultado estabelecido geometricamente por Euclides é, então, o seguinte:

Se $p + q$ for constante, então $p \times q$ é máximo quando $p = q$.

Todos os rectângulos acima considerados têm o mesmo perímetro (40 cm); o de maior área é precisamente o quadrado com 10 cm de lado.

III. Recorrendo à calculadora gráfica

Consideremos ainda a família dos rectângulos cujo comprimento e largura somam 20 unidades.

Se considerarmos que a largura vale x , então o comprimento é igual a $20 - x$.

Introduzindo na calculadora as funções

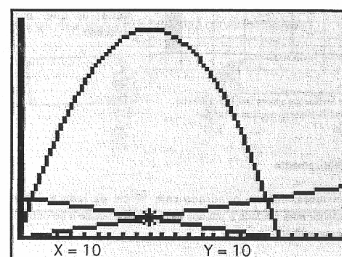
$$\begin{array}{l} y_1 = x \\ y_2 = 20 - x \\ y_3 = y_1 \times y_2 \end{array}$$

obtemos, depois de definir adequadamente o rectângulo de visualização os seguintes gráficos:

A linha curva – uma **parábola** – corresponde à representação gráfica da função definida por $y = x(20 - x)$ ou seja, a função que representa a área do rectângulo de largura x e comprimento $20 - x$.

A leitura das coordenadas do **vértice** da parábola – ponto correspondente ao valor máximo da função – conduz-nos a:

$$x = 10 \text{ e } y = 100 \text{ (este último é o valor da área máxima).}$$

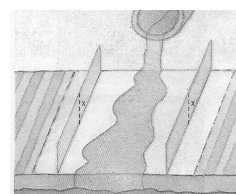


Verificámos que este problema apresenta uma resolução interessante uma vez que é feita de três formas diferentes: Geometricamente, algebricamente e utilizando a calculadora gráfica.

“(N10.3) Tem-se uma “folha” de metal com 50 cm de largura.

Pretende-se fazer uma peça para conduzir água de uma conduta de águas pluviais, como mostra a figura, dobrando de cada lado, na vertical, uma parte da folha com a mesma altura x .

Para que a quantidade de água transportada seja máxima, qual deve ser o valor de x ?



Para que a quantidade de água transportada seja máxima deve-se considerar máxima a secção feita por um plano perpendicular à base.

$$A = (50 - 2x) \cdot x$$

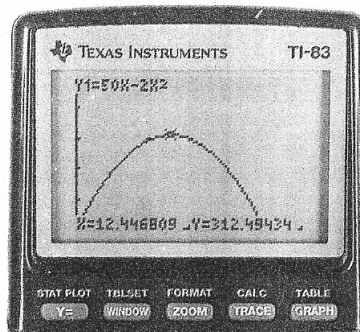
$$A = 50x - 2x^2$$

$$A = -2x^2 + 50x$$

$$A = -2 \left(x^2 + 25x + \frac{625}{4} \right) + \frac{625}{2}$$

$$A = -2 \left(x + \frac{25}{2} \right)^2 + \frac{625}{2}$$

O vértice da parábola é $\left(\frac{25}{2}, \frac{625}{2} \right)$.



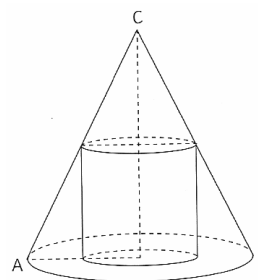
A área máxima consegue-se para $x = 12,5 \text{ cm}$ e é $312,5 \text{ cm}^2$.

Confirme-se os cálculos usando uma calculadora gráfica.

Na resolução deste problema a autora determina o vértice da parábola, concluindo, de imediato, que esse é o valor para o qual a área é máxima.

“(JAFB11.4) Num circo, uma lâmpada emite um cone de luz de altura 16m e raio da base 8m. Para um trabalho dos trapezistas, é preciso saber que espaço é utilizado dentro desse cone de luz. Chegou-se à conclusão que interessaria o espaço limitado pelo cilindro interior ao cone de volume máximo.

Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas.



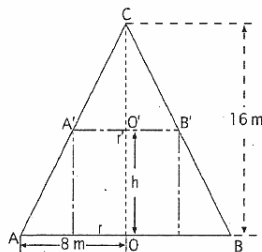
Conhecer a altura e o raio da base desse cilindro é essencial para o trabalho dos trapezistas.

Analisemos o que ficou registado da resolução do Tiago e da Rita.

R – Por onde começar?

T – Colocando os dados: 16 m de altura, 8 m de raio da base do cone e as incógnitas, h e r , na figura.

R – Observando a figura, parece que basta raciocinar num esboço dum corte plano, pois o que está em jogo são as alturas e os raios dos dois sólidos.

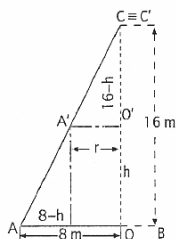


Esboçemos e usemos variáveis.

T – h, altura do cilindro, e r, raio da base do cilindro, estão relacionados com a altura do cone e o seu raio por meio de uma relação de semelhança entre o triângulo $A'O'C'$ e AOC , dado que são triângulos de lados respectivamente paralelos, isto é, de ângulos respectivamente iguais. Então:

$$\frac{r}{8} = \frac{16-h}{16}, \text{ donde podemos exprimir } r \text{ em função de } h \text{ (altura)}$$

$$r = \frac{8(16-h)}{16} = \frac{16-h}{2} \quad (1)$$



R – Mas há uma condição para o volume: é a de ele ser máximo.

O volume é a área da base (πr^2) vezes a altura (h), então $V = \pi \left(\frac{16-h}{2} \right)^2 \cdot h$
V é uma função de h

T – Para sabermos para que valor de h é máximo...

Vou já meter na calculadora $y_1 = \left(\frac{16-x}{2} \right)^2 \cdot x$ e depois pesquiso com o TRACE ou a TABLE.

R – Está bem, mas não pensas no rectângulo de visualização?

T – Vamos lá ver qual é o que convém.

O raio só pode variar de 0 a 8 m e h (altura) só pode variar de 0 a 16.

Então, para o eixo das abcissas, temos que ver pelo menos o domínio, que é $]0, 16[$ (vê como pode variar a altura).

R – E, para o eixo das ordenadas, o mínimo volume que nos interessa é zero, e o máximo é, quando muito, o volume do cone, que toma o valor de um terço da área da base vezes a altura.

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 64 \times 16 \approx 1072$$

... um bom rectângulo de visualização pode ser $[-1, 20] \times [-1, 1000]$

T – Já meti a função $y_1 = \pi \left(\frac{16-x}{2} \right)^2 \cdot x$

Também já teclei GRAPH e depois TRACE

Para h, ou seja $x = 5,32$, vem V, isto é $y_1 = 476,5$

Com um ZOOM IN obtenho $h \approx 5,42$ e $V \approx 475,2$

Com dois ZOOM IN obtenho $h \approx 5,32$ e $V \approx 476,54$

Com três ZOOM IN obtenho $h \approx 5,33$ e $V \approx 476,59$

A altura é de 533 cm, a menos de 1 cm, e o volume é 476,6, a menos de uma décima de m^3 .

R – Mas acho que podemos experimentar o processo analítico.
Eu acho que se quero alguma coisa com variação, como o máximo de uma função, penso na derivada. A derivada não é quem “traduz” a variação duma função?

T – Espera, tens razão, e se quero o máximo, quero um extremo, e se há derivada aí, ela é zero!

R – Há derivada porque a função é polinomial!

T – É?

R – Olha, desenvolvendo o quadrado de

$$y = \pi \left(\frac{(16-x)^2}{2} \right) \cdot x \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} (256 - 32x + x^2) x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} (256x - 32x^2 + x^3)$$

Vês? É uma função de 3.º grau e, queres ver?...

T – Agora também já vejo: $V = 256 \frac{\pi}{4} h - 32 \frac{\pi}{4} h^2 + \frac{\pi}{4} h^3$

E então a derivada é

$$V' = \frac{\pi}{4} (256 - 64h + 3h^2)$$

E agora, igualando a zero e resolvendo

$$h = \frac{64 \pm \sqrt{4096 - 4 \times 3 \times 256}}{6}, \text{ obtemos } h = \frac{16}{3} \vee h = 16.$$

R – Mas obtivemos dois valores!

T – Pois, mas temos que ver o domínio!

R – Tens razão, 16 não pertence ao domínio, pois um cilindro com essa altura no interior do cone de 16 m de altura *não teria raio*, isto é, não existe! $\frac{16}{3}$ é o valor exacto e a aproximação às décimas é 5,3 m, obtido pela calculadora.

T – Voltemos a ler, para saber o que fazer.

R – Acho que só falta responder ao problema, não é?

T – Falta calcular o raio da base.

Calculando r em (1) vem:

$$r = \frac{16 - \frac{16}{3}}{2} = \frac{16}{3} \approx 5,3$$

T e R – E agora a resposta: *O espaço que interessa ao trapezista é o interior dum cilindro cuja altura é 5,3 m e a base tem de raio 5,3 m.*

Arranje um parceiro, relembre as sugestões dadas sobre a resolução de problemas e discuta com ele o texto proposto pelo Tiago e pela Rita.

Esta é, sem dúvida, uma resolução interessante, uma vez que as autoras apresentam a forma de resolução do problema feita por dois alunos, explicando cada passo, detalhadamente. Essa resolução é feita de duas formas: primeiro recorrendo à calculadora gráfica e depois calculando os zeros da derivada.

“ **(N12.7)** Um depósito de água aberto tem a forma de um prisma rectangular com duas faces laterais quadradas. A área total do depósito (Sem tampa) é de 54 m².

Seja x a altura do tanque:

c. Mostre que o volume, V m³, do tanque é dado por:

$$V = 18x - \frac{2}{3}x^3$$

d. Determine s de modo a que o volume seja máximo.

$$A_t = 3xy + 2x^2$$

$$54 = 3xy + 2x^2 \Leftrightarrow y = \frac{54 - 2x^2}{3x}$$

$$V = x^2 y$$

$$V = x^2 \left(\frac{54 - 2x^2}{3x} \right); \quad V = 18x - \frac{2}{3} x^3$$

O volume é dado, em m^3 , por:

$$V = 18x - \frac{2}{3} x^3$$

$$V(x) = 18x - \frac{2}{3} x^3; \quad V'(x) = 18 - 2x^2$$

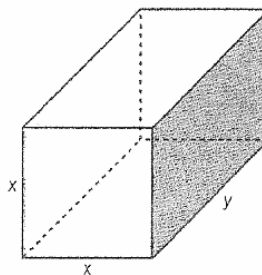
$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 18 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3.$$

A solução $x = -3$ não serve o problema.

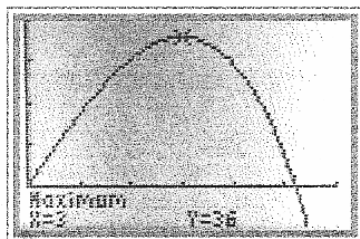
$$\text{Considere-se: } x = 3; \quad V''(x) = -4x$$

$$V''(3) = -4 \times 3 < 0$$

O volume é máximo quando $x = 3$ m.



Confirme-se com a calculadora gráfica:



Nesta resolução a autora calcula os zeros da derivada e o sinal destes na segunda derivada.

Observámos então que em três das resoluções se detecta a preocupação por parte dos autores, de fazer a confirmação dos resultados obtidos, através da calculadora gráfica.

Por fim, quanto ao valor pedido, verificamos que este ocorre, na maioria das vezes, de forma explícita (oitenta e um problemas), surgindo de forma implícita em trinta e cinco. Nos problemas do 10º ano apenas em três o valor pedido aparece de forma implícita.

Assim sendo, fica este período caracterizado por problemas enunciados sob a forma de exercício. Há essencialmente problemas geométricos, em contexto real de medida, pretendendo-se otimizar, em grande parte dos casos, uma área. Existe um decréscimo de problemas com figuras com dados. O enunciado é simples, na maioria

dos problemas e com a função auxiliar a surgir implicitamente. Quanto às noções utilizadas, verificamos que as mais aplicadas são o teorema de Pitágoras, a noção de distância e a fórmula do perímetro. Grande parte dos problemas já tinha surgido em manuais anteriores e a função polinomial é a mais utilizada.

Em relação ao esquema de cálculo dos extremos, tal como no período anterior, na maioria dos casos, são calculados os zeros da derivada e é feito o estudo do sinal, através do quadro de monotonia. No entanto, um grande número de resoluções apresenta o gráfico obtido através da calculadora gráfica.

Os dados obtidos na análise dos problemas de optimização deste período estão sintetizados na tabela a seguir.

3.5.2. A REFORMA DE SANTOS SILVA (2001)

A. Análise do programa oficial

Em 22 de Fevereiro de 2001, sendo a pasta da educação ocupada por Augusto Ernesto Santos Silva, é homologado o novo programa para a disciplina de Matemática. A realização destes novos programas foi coordenada pelo Professor Doutor Jaime Carvalho e Silva, professor do Departamento de Matemática, da Universidade de Coimbra.

A disciplina fica, com esta reforma, dividida em três disciplinas: Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS). A primeira faz parte do currículo dos Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas; a segunda para os Cursos Tecnológicos²¹ e para o Curso De Artes e a terceira para Curso Geral de Ciências Sociais e Humanas Curso Tecnológico de Ordenamento do Território.

A aplicação destes novos programas iniciou-se no ano lectivo de 2003/2004 para a Matemática A, no 10º ano, com uma carga horária semanal de 3 aulas de 90 minutos, e no ano lectivo seguinte para a Matemática B e para a MACS.

Iremos apenas analisar o programa da Matemática A, uma vez que é o que "substitui" a matemática leccionada até então.

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

10º Ano

II – Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.

- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos. Tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:
 - Funções quadráticas;
 - Função módulo;

²¹ Construção Civil, Electrotecnia/Electrónica, Informática, Mecânica, Química e Controlo Ambiental, Ambiente e Conservação da Natureza, Desporto, Administração, Técnicas Comerciais e Serviços Jurídicos.

E recorrendo a:

- a. Análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);
- b. Transformações simples de funções: dada a função, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x) + a$, $y = f(x + a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = |f(x)|$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

(*) Referência breve à parábola, a algumas das suas principais propriedades e à sua importância histórica.

- Resolução de problemas envolvendo funções polinomiais (com particular incidência nos graus 2, 3 e 4).
- Possibilidade de decomposição de um polinómio em factores (informação).

Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.

(*) Estudo elementar de polinómios interpoladores.

Na parte dedicada às indicações metodológicas encontramos a informação seguinte:

"Na resolução de problemas deve ser dada ênfase especial à Modelação Matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados). Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações. A resolução numérica ou gráfica deve ser sempre confrontada com conhecimentos teóricos. Deve ser usada a resolução analítica sempre que a natureza do problema o aconselhar, por exemplo quando for conveniente decompor o polinómio em factores. O estudo analítico dos polinómios deve ser suscitado pela resolução de problemas e aí integrado. A resolução analítica de problemas deve ser sempre acompanhada da verificação numérica ou gráfica."

Tal como no programa anterior, relativo ao 10º ano, também neste programa os problemas de otimização não surgem explicitamente, mas sim implicitamente no estudo das funções.

Quanto à Matemática A, o programa de 11º ano contemplava o estudo de três temas: Geometria no Plano e no Espaço, Funções Racionais, Taxa de Variação e Sucessões reais.

É de referir que o tema Geometria no Plano e no Espaço inclui, agora, na parte final, um novo ponto dedicado à programação linear. O programa anterior já fazia referência ao tema, mas só nesta reforma os conteúdos a abordar ficam bem definidos.

Examinemos como ficou estruturado o novo programa de Matemática A, em relação ao tema Cálculo Diferencial:

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

11º Ano

Tema II – Introdução ao Cálculo Diferencial I. Funções racionais e com radicais. Taxa de Variação e Derivada

- Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação
- Estudo intuitivo das propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando a calculadora gráfica, para a seguinte classe de funções:

$$f(x) = a + \frac{b}{cx + d}$$

Neste estudo enfatiza-se a análise dos efeitos das mudanças dos parâmetros nos gráficos das funções de uma mesma classe.

- Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e $-\infty$
- Noção de **taxa média de variação**; cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.
- Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).
- Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.
- Constatação, por argumentos geométricos, de que:
 - i. Se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;
 - ii. Se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.

(*) Referência à hipérbole; informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.

- Funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
 - Soma, diferença, produto, quociente e composição de funções no contexto do estudo de funções racionais, envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.
 - Inversa de uma função. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.
- Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização).

O ponto que refere a determinação da derivada em casos simples refere as seguintes indicações metodológicas:

Podem ser postos alguns problemas simples que envolvam derivadas no contexto de aplicações.

Verificamos então que, apesar de o programa não referir o estudo dos problemas de otimização, refere que se ponham problemas de aplicação das derivadas.

A respeito da Matemática A, o programa de 12º ano contemplava o estudo de três temas: Probabilidades e Combinatória, Introdução ao Cálculo Diferencial II e por fim Trigonometria e Números Complexos.

Vejamos como ficou estruturado o novo programa de Matemática A, no tema Cálculo Diferencial II:

MATEMÁTICA A

Cursos Gerais de Ciências Naturais, de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socio-económicas

12º Ano

- Funções exponenciais e logarítmicas
- Teoria de limites
- Cálculo Diferencial
- Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição de número e. Teorema da derivada da função composta (informação).
- Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica)
- Estudo de funções em casos simples.
- Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.
- **Problemas de otimização**

- Funções seno co-seno e tangente
 - Estudo intuitivo com base no círculo trigonométrico, tanto a partir de um gráfico particular, como usando a calculadora gráfica ou computador.
 - Estudo intuitivo de
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x}$$
 - Derivadas do seno, co-seno e tangente
 - Utilização de funções trigonométricas na modelação de situações reais.

Em relação ao ponto que refere os problemas de optimização surgem as seguintes indicações metodológicas:

Os **problemas de optimização** devem ser escolhidos de modo que o estudante trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os estudantes o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.

Assim, o programa de Matemática A para o 12º ano, contempla, tal como na reforma anterior, o estudo dos problemas de optimização no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial, pretendendo-se deste modo que o aluno fique com a noção da aplicabilidade do conceito de derivada no mundo actual.

Apurámos, então, que este programa, em relação às funções e ao cálculo diferencial, não sofreu alterações. O objectivo desta reforma era essencialmente o de criar a Matemática B e a Matemática Aplicada às Ciências Sociais, sendo que a Matemática A corresponde, essencialmente, à Matemática da reforma anterior.

Este programa não faz nenhuma referência a manuais para o ensino.

Foi esta a última reforma legislada até ao momento em que terminou esta parte da nossa investigação.

B. Análise dos Manuais Escolares

Desta forma, também os manuais escolares relativos à Matemática A (até agora Matemática) não sofreram alterações e nem os manuais da autoria de Maria Neves, da Porto Editora, nem os de Ana Jorge e outras, da Areal Editores, apresentam estrutura e conteúdos idênticos aos analisados, anteriormente, dos mesmos autores.

Por sua vez o manual de Yolanda Lima, Francelino Gomes e Cristina Viegas sofreu algumas alterações. A primeira a referir é relativamente aos autores do manual, pois a autora Yolanda Lima apenas faz parte do manual do 10º e a autora Cristina Viegas apenas do manual a partir desta reforma, sendo co-autora dos manuais para os três anos lectivos. Quanto à estrutura, verificamos que o manual passou a estar dividido em três volumes, sendo cada um destes, dedicado a cada um dos três temas.

A alteração mais relevante, relativamente à estrutura, prende-se com o facto de o manual apresentar agora um conjunto de testes ao longo dos capítulos. Cada um dos testes está dividido em duas partes, uma parte com cinco questões de escolha múltipla e outra parte com cinco questões de resposta aberta. As questões não são só do tema que se está a abordar, mas inclui também questões de temas anteriores.

Deste modo, o manual deixa de ter um papel apenas de material de apoio para o aluno na aula, mas tem também como objectivo fazer uma preparação do aluno, ao longo do ano, para o exame nacional que se realiza no final do 12º ano.

Uma vez que os problemas de optimização, que os manuais escolares contêm, não sofreram alteração em relação aos problemas encontrados nos mesmos manuais, no período anterior, julgámos que não se justifica apresentar de novo os problemas, bem como a sua análise.

CONCLUSÃO

A. Análise do programa oficial

Após a análise das reformas curriculares sofridas pela disciplina de Matemática ao longo do século XX e XXI, verificámos que estas foram sofrendo grandes alterações. Estas foram consequência da situação política do país e também das correntes pedagógicas vividas a nível Internacional.

Assim, através da análise realizada a cada uma das reformas curriculares, podemos atestar que as aplicações da derivada não foram abordadas em todas as reformas curriculares e não pertenciam sempre ao mesmo ano lectivo. A primeira referência encontrada à abordagem da derivada foi na reforma de 1905, onde esta era estudada na 7ª classe (actual 11º ano), no capítulo da Álgebra, mas esta reforma não contempla o estudo das aplicações da derivada.

A primeira referência nos programas oficiais, ao estudo de aplicações da derivada, deu-se na reforma de 1918. Nesta foi criado um capítulo consagrado ao Cálculo Infinitesimal, na 6ª classe (Actual 10º ano), onde se abordava não só o estudo da derivada, mas também as aplicações desta. A reforma seguinte, de 1919, era muito semelhante à anterior, mas a classe em que se fazia o estudo da derivada e suas aplicações passa da 6ª classe para a 7ª classe.

A partir da reforma seguinte, de 1926, as aplicações da derivada foram suprimidas do programa, voltando apenas a fazer parte deste, a partir da reforma de 1947. Nesta, a derivada era abordada na 7ª classe (actual 11º ano). Estava inserida no capítulo dedicado à Álgebra e fazia referência ao estudo de aplicações da derivada à Física. Na reforma posterior, de 1954, a derivada passa para o ano lectivo anterior, ou seja para a 6ª classe (Actual 10º ano), continua a estar inserida no capítulo dedicado à Álgebra e pretende-se apenas que se abordem aplicações desta, não se especifica o tipo de aplicações.

A reforma de 1963, marca a introdução das Matemáticas Modernas em Portugal. A partir desta a derivada deixa de pertencer ao capítulo dedicado à Álgebra, passando a fazer parte do capítulo da Análise ou do Cálculo Diferencial. Assim, esta reforma

aborda a derivada no 7º ano (actual 11º ano), no capítulo respeitante ao Cálculo Diferencial. Este programa refere, pela primeira vez, o estudo dos máximos e mínimos.

A esta seguiu-se a reforma de 1973. Nesta, a derivada continua a fazer parte do 5º ano (correspondente ao 7º na reforma anterior), incluída no capítulo dedicado à Análise Infinitesimal. Também esta refere o estudo das aplicações das derivadas, mas agora, pela primeira vez, a problemas concretos. Esta reforma marca o fim do período ditatorial em Portugal, que se deu a 25 de Abril de 1974.

A primeira alteração nos programas, efectuada após o fim do regime Ditatorial, foi feita ainda no mesmo ano, mas apenas o programa da Matemática Clássica sofreu alterações, sendo semelhante ao anterior, embora menos extenso. Este programa era seguido por algumas turmas onde ainda não se leccionavam as matemáticas modernas. Nele a derivada estava presente no 1º ano do Curso Complementar (equivalente ao 11º ano actual). Pertencia ao capítulo do Cálculo e este mencionava que se estudassem aplicações da derivada a problemas de máximos e mínimos.

Em 1979 e em 1980 são publicados novos programas para o 11º e 12º ano, respectivamente. Nestes, a derivada é estudada no 11º e no 12º ano. No 11º ano está enquadrada no capítulo dedicado às derivadas, sendo o último ponto deste capítulo dedicado às aplicações das derivadas. No 12º ano esta está na parte dedicada à Análise, no capítulo dedicado à derivada. Este apenas pretende introduzir mais regras do cálculo diferencial, não referindo o estudo de aplicações.

Uma vez que este programa era muito extenso, foi publicado, em 1983, um novo programa, menos extenso, para a disciplina de Matemática do 12º ano. O tema em estudo não sofreu nenhuma alteração em relação ao anterior.

Também em 1988 o programa veio a sofrer mais um encurtamento. Sendo suprimido o seguinte ponto: *A noção de diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica; regra de diferenciação* onde se referia a resolução de questões aplicando o conceito de derivada.

Como consequência da Lei de Bases do Sistema Educativo, publicada em 1986, os programas sofreram uma nova alteração. Em 1991 foram publicados os novos programas para aplicação em regime de experiência pedagógica. Nestes novos programas a derivada continua a ser abordada no 11º ano, no sub – capítulo dedicado às derivadas. Este refere a aplicação da derivada ao estudo de máximos e mínimos, mencionando como um dos objectivos a resolução de problemas de máximos e mínimos e apresentando nas indicações metodológicas o estudo, pela primeira vez, de problemas de optimização. Também o programa do 12º ano contempla o estudo da derivada e

refere nas indicações metodológicas o estudo de funções irracionais ligadas a problemas de optimização.

Em 1997 fez-se um ajustamento a este programa, introduzindo-se então o uso obrigatório das calculadoras gráficas no Ensino Secundário. Neste programa a derivada continua a ser introduzida no 11º ano, no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial. Expõe nos seus conteúdos o estudo de aplicações da derivada e aponta no desenvolvimento dos temas a resolução de problemas de aplicação, envolvendo derivadas. O programa do 12º ano também aborda a derivada no capítulo dedicado ao Cálculo Diferencial, fazendo menção, explicitamente, nos conteúdos programáticos, o estudo de problemas de optimização.

Por fim, em 2001 foi homologado o novo programa para a Matemática A. Este programa também contempla, no 11º ano, no sub – capítulo da derivada o estudo de problemas de aplicação simples que envolvam derivada. No 12º ano o programa faz também referência, no final do estudo do Cálculo Diferencial, o estudo dos problemas de optimização.

As principais características de cada uma das reformas curriculares, em relação aos problemas de optimização, foram catalogadas na tabela que apresentamos na página seguinte.

Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no Ensino Secundário português nos séculos XX e XXI

Reforma		1905	1917	1918	1919	1926	1927	1929	1930	1931	1934	1936	1947	1954	1963	1973	1974	1979	1983	1991	1997	2001
Características	Não aborda											X										
	4º					X	X															
	4º/6º/10º			X				X	X	X	X			X			X					
	5º/7º/11º	X	X		X								X		X	X		X		X	X	X
	12º																	X		X	X	X
Capítulo em que se insere a derivada	Álgebra	X	X			X	X	X	X	X	X		X	X								
	Cálculo Infinitesimal			X	X											X	X					
	Cálculo Diferencial														X						X	X
	Derivada																X	X	X	X		
Forma de abordar os P. O.	Não Aborda	X	X			X	X	X	X	X	X											
	Aplicação da derivada			X	X									X		X	X	X			X	X
	Problema de max. e mín.														X		X			X		
	Problema de optimização																		X	X	X	X
	Aplicação à Física												X								X	X
Máquina de calcular utilizada	Não utiliza	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X					
	Calculadora Simples																					
	Calculadora Científica																X	X	X	X		
	Calculadora Gráfica																				X	X
Manuais Escolares	Faz sugestão	X	X			X	X				X											
	Não faz sugestão			X	X														X	X	X	X
	Manual único												X									

B. Análise dos manuais

À medida que os programas oficiais foram sofrendo alterações, em relação ao estudo dos problemas de optimização, também os manuais escolares foram sendo reajustados, relativamente aos problemas de optimização. Fazemos agora a análise às alterações sofridas pelos manuais quanto às características dos problemas de optimização. Os dados apresentados nas tabelas a seguir estão sob a forma de percentagem. Apenas indicámos os dados a partir do período 3.2 uma vez que no período 3.1 não encontramos problemas de optimização nos manuais.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo Problema (T)	TEP		11	37	21	22	20
	TER		6	30	16	0	2
	TEX		78	33	61	76	74
	TDM		6	0	2	0	2
	TR		0	0	0	2	3

Deste modo, e em relação ao tipo de problema, no período 3.2 a maioria surgiu sob a forma de exercício e não encontramos problemas em que se pretendesse fazer um relatório. No período 3.3.2 observámos que os exemplos, exercícios resolvidos e exercícios surgem de uma forma muito equilibrada mas, em contrapartida, não encontramos nenhum problema sob a forma de demonstração ou relatório. No período seguinte, período 3.3.3 verificamos que a distribuição já não é tão equilibrada, sendo o número de problemas sob a forma de exercício, maior do que os restantes e também este não tem exercícios sob a forma de relatório. No período 3.4, a percentagem de problemas sob a forma de exemplo e sob a forma de exercício é muito equilibrada. Figuram pela primeira vez exercícios em que se pretende que os alunos elaborem um relatório e não encontramos exercícios resolvidos ou demonstrações. Por fim, no período 3.5, a distribuição é idêntica à do período anterior, com a excepção de terem surgido novamente exercícios resolvidos e demonstrações.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Contexto do Problema (C)	CGM		56	58	43	35	29
	CGA		0	2	9	7	13
	CAR		22	12	7	7	3
	CRM		22	21	30	42	47
	CRF		0	5	7	5	6
	CRE		0	2	4	4	2

Quanto ao contexto dos problemas, no período 3.2., a maioria dos problemas são de Geometria Métrica e os restantes distribuem-se de forma igual entre Aritméticos e de contexto real de medida e não há problemas de Geometria Analítica, Física ou Economia. No período 3.3.2, a percentagem de problemas de Geometria Métrica e de contexto real de medida é muito semelhante à anterior. No entanto, diminuem os problemas Aritméticos e surgem, em número reduzido, problemas de Geometria Analítica, Física e Economia. No período 3.3.3 o número de problemas de Geometria Métrica começa a diminuir, aumentando o número de problemas de contexto real de medida e de Geometria Analítica. Os problemas de Física ou Economia sofrem um ligeiro aumento e os Aritméticos diminuem. O período 3.4 é muito semelhante ao anterior, com excepção dos problemas de Geometria Métrica que continuam a diminuir e os de contexto real de medida que continuam a aumentar. Por fim, no período 3.5, vemos, que tal como nos três períodos anteriores, os problemas de Geometria Métrica continuam a diminuir e que os de Contexto Real de Medida continuam a aumentar. Também os problemas de Geometria Analítica sofrem um aumento, os de Física sofrem um ligeiro aumento e os de Aritmética e Economia diminuem.

Período		3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Variáveis	OD	0	9	11	5	8
	OA	61	40	45	56	59
	OPE	6	7	9	5	4
	OV	11	28	23	20	19
	OPR	11	9	2	5	3
	OS	11	5	5	2	1
	OT	0	0	2	4	4
	OC	0	2	4	2	2
	Função a otimizar (O)					

Analisemos agora as funções a otimizar que surgiram ao longo dos períodos. Verificamos que em todos os períodos a função que mais se otimiza é a área e a seguir o volume. Todas as outras surgem em número reduzido. Apurámos ainda que no período 3.2 não existem problemas em que se pretende otimizar uma distância, tempo ou custo e no período 3.3.2 ainda não encontramos problemas em que se pretenda otimizar um custo. O período mais equilibrado é o 3.2 em que a percentagem de problemas em que se pretende otimizar um volume, produto ou soma é a mesma. Nos outros períodos aumentou a percentagem de problemas em que se otimiza um volume, mas os outros diminuem.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Esq./ Fig. auxiliares (F)	FSE		100	79	68	27	19
	FFS		0	5	5	16	21
	FFD		0	16	27	56	60

Relativamente aos esquemas ou figuras auxiliares que encontramos no enunciado dos problemas confirmamos que no período 3.2. nenhum dos enunciados vem acompanhado de qualquer tipo de esquema ou figura auxiliar. O número de problemas sem qualquer tipo de esquema ou figura auxiliar foi diminuindo, em cada um dos períodos seguintes e a partir do período 3.4 o número de problemas, que possuíam figuras com dados, passa a ser superior ao número de problemas sem auxiliares. Também o número de problemas com figuras simples foi aumentando.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo de dados (D)	DN		61	49	86	98	96
	DG		39	51	14	2	4

Em relação ao tipo de dados, com excepção do período 3.3.2, em todos os restantes, o número de problemas com dados numéricos era superior ao número de problemas com dados genéricos. É ainda de referir que a percentagem de problemas com dados numéricos é significativamente superior à percentagem de problemas com dados genéricos nos três últimos períodos.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Tipo de en. (EN)	ENS		78	91	82	78	67
	ENE		22	9	18	22	33

No que diz respeito ao enunciado, em todas as reformas surgem mais problemas com enunciado simples do que com resolução encaminhada. No entanto, a partir da reforma 3.3.2, o número de problemas com enunciado encaminhado foi aumentando enquanto que o número de problemas com enunciado simples foi diminuindo.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Func./ Eq. auxiliar (A)	AE		67	37	43	31	29
	AI		33	63	57	69	71

Passando agora para a função/equação auxiliar, apenas no primeiro período existem mais problemas em que a função auxiliar aparece de forma explícita do que de forma implícita. Nos restantes períodos existem mais problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita do que de forma Explícita. No entanto, com excepção do

período 3.3.2, o número de problemas em que a função auxiliar surge de forma explícita vai diminuindo e o número de problemas em que a função auxiliar surge de forma implícita vai aumentando.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Noções aplicadas (N)	NTP		22	28	21	20	17
	ND		6	2	16	11	17
	NSF		0	5	9	9	9
	NPE		22	14	18	24	24
	NAR		6	28	18	7	7
	NVO		22	5	9	7	8
	NSO		17	12	5	11	6
	NPR		6	7	4	0	0
	NF		0	0	2	4	3
	NFT		0	0	0	9	14
	NMF		0	2	7	5	6

Quanto às noções aplicadas na resolução dos problemas, verificamos que o período que apresenta menor número de noções aplicadas é o período 3.2, uma vez que não existem problemas em que se utilize a semelhança de figuras, a noção de função ou função trigonométrica nem as magnitudes físicas. A semelhança de figuras e as magnitudes físicas surgem a partir do período 3.3.2, a noção de função a partir do período 3.3.3 e as funções trigonométricas a partir do período 3.4. A partir do período 3.4 deixam de existir problemas em que se utilize a noção de produto. Em todos os períodos as noções mais utilizadas são o Teorema de Pitágoras e a fórmula do perímetro. Uma vez que a maioria dos problemas de cada um dos períodos são problemas relacionados com geometria, em todos os períodos surgem mais problemas em que se aplicam as noções geométricas.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Estratégia (E)	EH		22	12	5	0	1
	EE		17	9	11	9	5
	EM		0	28	43	55	66
	EN		61	51	41	36	28

Sobre a estratégia aplicada na resolução dos problemas, no primeiro período, uma vez que não existiam manuais anteriores com problemas de optimização, a maioria dos problemas surgiam pela primeira vez, dos restantes, alguns tinham sido já identificados nos livros históricos analisados e outros faziam parte dos enunciados dos exames. Nos

períodos seguintes, a percentagem de problemas novos foi diminuindo e a percentagem de problemas que apareceram em manuais anteriores foi aumentando. Também a percentagem de problemas que tinham presentes nos livros históricos e que tinham saído em exame, foi diminuindo. A partir do período 3.3.3 vê-se que a percentagem de problemas que já tinha figurado nos manuais anteriores ultrapassa a percentagem dos problemas que aparecem pela primeira vez.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Funções Utilizadas (f)	fp		56	56	45	60	61
	fr		28	19	32	18	13
	fir		17	26	23	13	11
	ft		0	0	0	9	14

As funções utilizadas, para cálculo dos extremos, são, em todos os períodos, na maioria dos problemas funções polinomiais, surgindo as funções racionais e as funções irracionais em percentagem mais reduzida. Com excepção do período 3.3.2, todos os outros possuem uma percentagem ligeiramente superior de funções racionais do que de funções irracionais. Só a partir do período 3.4 se identificam problemas em que se obtém uma função trigonométrica e o período 3.5 possui uma percentagem superior à do período anterior. O período em que as percentagens são mais equilibradas é o período 3.3.3 mas, de qualquer forma, há mais funções polinomiais.

Variáveis		Período	3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Esquema de cálculo (e)	ez		0	30	9	0	10
	ezs		100	67	68	100	50
	ezss		0	4	23	0	10
	ev		0	0	0	0	13
	ecg		0	0	0	0	17
	eo		0	0	0	0	3

Acerca do esquema utilizado para calcular os zeros observamos que nos quatro primeiros períodos o processo de resolução é muito semelhante, uma vez que em todos eles se utilizam os zeros da derivada: No período 3.2 e no período 3.4 em todos os problemas se determinam os zeros da derivada e se faz, de seguida, o estudo do sinal da função derivada. No período 3.3.2 na maioria dos problemas calculam-se os zeros da derivada e faz-se, de seguida, o estudo do sinal da função derivada, noutros problemas apenas se calculam os zeros da derivada e num número reduzido de problemas calcula-

se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada. No período 3.3.3, na maioria dos problemas calculam-se os zeros da derivada e faz-se, de seguida, o estudo do sinal da função derivada, noutros problemas determina-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada e, num número reduzido de problemas, apenas se calculam os zeros da derivada.

O período que tem uma maior diversidade de formas de resolução é o último período, marcado pela utilização da calculadora gráfica pelos alunos. Existem neste período alguns problemas que apresentam mais do que uma resolução. Deste modo, neste período, metade dos problemas mostram o cálculo dos zeros da derivada e o estudo do sinal da função derivada; noutros calcula-se os zeros da derivada e faz-se o teste do sinal da segunda derivada ou apenas se calculam os zeros da derivada. Relativamente aos problemas resolvidos sem recorrer à derivada, a forma de resolução que identificámos mais vezes é através da calculadora gráfica, outros problemas calculam o extremo através do vértice da parábola e apenas um problema apresenta a resolução, para além de gráfica, também geométrica e algébrica.

É ainda de referir que, apesar de no período 3.4 surgirem problemas de optimização no 10º ano, para resolver através do vértice da parábola, nenhum desses problemas vem acompanhado da resolução.

Período		3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Variáveis Graf./fig./ esq. Aux. (g)	Gn	100	48	9	0	0
	Gf	0	41	50	0	3
	Gqm	0	11	50	100	50
	Gg	0	0	5	25	47

Acerca dos gráficos, figuras ou esquemas auxiliares presentes nas resoluções dos problemas, no período 3.2 as resoluções não têm qualquer tipo de gráfico, figura ou esquema auxiliar. No período seguinte o número de problemas sem qualquer tipo de auxiliar diminui e existem já muitos problemas acompanhados de figura. Alguns ainda apresentam o quadro de monotonia. No período 3.3.3 o número de problemas, sem qualquer tipo de auxiliar, é muito reduzido, mostrando um grande número de problemas figura ou quadro de monotonia, surgem neste período, pela primeira vez, alguns problemas com o gráfico da função a otimizar.

Nos dois últimos períodos todos os problemas apresentam algum tipo de auxiliar: no período 3.4 todas as resoluções apresentam quadro de monotonia e alguns problemas apresentam o gráfico da função e no período 3.5, metade dos problemas apresentam

quadro de monotonia e bastantes problemas apresentam gráfico da função. Encontramos ainda neste período um número reduzido de resoluções com figura.

Período		3.2	3.3.2	3.3.3	3.4	3.5
Variáveis						
Valor pedido (v)	ve	61	42	61	67	71
	vi	39	58	39	33	29

Por fim, em relação ao valor pedido, em todos os períodos, com excepção do período 3.3.2, a percentagem de problemas em que o valor pedido surge explicitamente é superior à percentagem de problemas em que aparece implicitamente. Verificamos ainda que, com excepção do período 3.3.2, a percentagem de problemas em que o valor pedido surge explicitamente, vai aumentando, enquanto que a percentagem de problemas em que o valor pedido surge implicitamente vai diminuindo.

4. CONCLUSÕES FINAIS

Esta investigação teve como ponto de partida levar a cabo um estudo acerca dos problemas de optimização. Inicialmente o objectivo era a elaboração de um estudo histórico acerca da evolução do seu tratamento no Ensino Secundário em Portugal. Após algumas pesquisas foi verificado que havia uma diferença no estudo dos problemas de optimização antes e depois de se começar a utilizar a calculadora gráfica na sala de aula. Por esta razão levanta-se uma outra questão bastante pertinente: Como se terá dado a evolução do estudo dos problemas de optimização a nível histórico?

Ora, como não existia nenhum estudo rigoroso nesta área, com a excepção da investigação elaborada por Astudillo (2002), que fez uma investigação histórica acerca dos pontos críticos, sem elaborar propriamente uma análise específica aos enunciados e resoluções dos problemas de optimização, iniciamos esta investigação identificando e analisando os livros históricos de Matemática e os manuais escolares espanhóis com o objectivo de verificar, essencialmente, as diferenças entre a resolução dos problemas de optimização, antes e depois de surgir o conceito de derivada.

Assim, depois duma análise efectuada a seis livros históricos (dois antes de surgir o conceito de derivada e quatro depois de surgir o conceito de derivada), verificámos que, apesar de encontrarmos algumas semelhanças nos enunciados, ou seja, no problema de optimização, a forma de resolução foi sendo muito simplificada ao longo dos tempos. Deixámos de ter demonstrações extremamente construtivas como descobrimos na obra de Euclides e de Pappus e passámos para resoluções mais simples e directas depois de surgir o conceito de derivada e deste ser aplicado ao cálculo de máximos e mínimos de uma função.

Posteriormente dirigimos a nossa atenção para a análise dos programas oficiais com o objectivo de identificar aqueles que referem a abordagem dos problemas de optimização. Concluimos então, que apesar de se referirem às aplicações das derivadas nos programas oficiais a partir de 1954, só depois da Lei de Bases do Sistema Educativo se propõe explicitamente, que se faça o estudo dos problemas de optimização. Notamos ainda que, ao longo do século, a importância dada às aplicações dos conceitos leccionados, principalmente ao conceito de derivada, foi aumentando, sendo cada vez mais específica em cada reforma.

Foi sobretudo, com a Lei de Bases do Sistema Educativo que os problemas de optimização deixaram de fazer parte apenas de um ano lectivo. E uma vez que o conceito de derivada passou a ser abordado no 11º e no 12º ano, também os problemas de optimização fizeram parte desses dois anos. Mais ainda, tendo em conta que no 10º ano se fez o estudo de funções, como é o caso da função quadrática, também neste ano se abordaram problemas de optimização. Assim, os problemas de optimização deixaram de estar limitados apenas a um ano lectivo e apenas como aplicação da derivada, passaram a estar incluídos em todos os anos do Ensino Secundário, antes e depois de se abordar a derivada.

Por fim, fomos analisar um conjunto de manuais escolares para cada uma das distintas reformas. Também nestes registámos evolução dos problemas de optimização, quer em relação ao tipo de problemas abordado, quer em relação à forma como estes são resolvidos. Uma das questões que consideramos mais interessantes é o facto de o primeiro problema de optimização, que encontramos resolvido nos manuais escolares, sem que se use o conceito de derivada (JAFB10.1 (1997)) fosse, precisamente, um problema presente na obra de Euclides, a primeira obra histórica onde identificámos os problemas de optimização, sem recorrer ao cálculo da derivada. Identificámos nos manuais escolares alguns dos problemas de optimização que tínhamos analisado nos livros históricos.

Apurámos ainda que, apesar de a Lei de Bases do Sistema Educativo ser a que traz mais alterações, relativamente aos problemas de optimização, tais alterações não são significativas nos manuais escolares analisados. Apesar de existirem já problemas de optimização nos manuais escolares do 10º ano, estes não apresentam qualquer tipo de resolução. Em contrapartida, o reajustamento de 1997 marca a diferença no tratamento dos problemas de optimização. Tanto a quantidade como a diversidade de problemas e resoluções é notória nos manuais desta última reforma analisada.

Pudemos então verificar que a introdução do uso da calculadora gráfica na sala de aula foi um ponto importante para a evolução no estudo e na abordagem feita aos problemas de optimização abordados no Ensino Secundário em Portugal.

4.1. REALIZAÇÃO DOS OBJECTIVOS DA INVESTIGAÇÃO

Relativamente aos objectivos a que se propôs esta investigação podemos considerar o seguinte:

1º Objectivo: Fazer uma análise histórica dos problemas de optimização: Ver como e quando surgiram na História da Matemática. Ver também quais os matemáticos que os abordaram;

O primeiro problema de optimização que registámos foi no séc. IV A.C, na obra *Elementos*, de Euclides. Nesta obra identificámos apenas problemas de Geometria Plana. A seguinte obra em que identificámos problemas de optimização foi no séc. IV D.C., na obra *La collection Mathematique*, de Pappus. Nesta encontrámos problemas de Geometria Plana e de Geometria Espacial.

2º Objectivo: Verificar quando e de que forma foram introduzidos nos programas oficiais portugueses os problemas de optimização;

Os problemas de optimização foram inseridos nos programas oficiais com a reforma de 1954, como uma aplicação da derivada; posteriormente, como problemas de máximos e mínimos e nas últimas reformas como problemas de optimização. Em todas as reformas estes surgiam depois da derivada, como uma aplicação em casos concretos. A partir da Lei de Bases do Sistema Educativo encontrámos problemas de optimização não como uma aplicação da derivada, mas sim como uma aplicação ao cálculo de máximos e mínimos de uma função, no 10º ano.

3º Objectivo: Analisar, em cada plano de estudos, a importância dada à disciplina de Matemática e, dentro desta, a importância dada ao estudo da Análise, mais especificamente ao estudo dos Problemas de Optimização.

Ao longo dos anos a disciplina de Matemática sofreu várias alterações, especialmente no número de horas semanais atribuídas à mesma disciplina. Em relação ao estudo da Análise Infinitesimal averiguámos que lhe foi dada uma crescente importância sendo considerada a partir de 1918 uma área autónoma. Também as aplicações da matemática, em particular os problemas de optimização, foram conquistando em cada reforma um peso e um maior destaque.

4º Objectivo: Analisar como foram abordados: os tipos de problemas propostos pelo Ministério e os tipos de problemas abordados pelos manuais escolares;

Foi possível identificar algumas indicações nos programas oficiais relativas aos problemas de optimização no sentido de orientar, quer os professores, quer os autores dos manuais escolares no que se pretendia que fosse abordado.

5º Objectivo: Verificar se os manuais, acerca dos problemas de optimização, vão de encontro às propostas do Ministério;

Verificámos que nos primeiros programas oficiais analisados, apesar de se fazer referência às aplicações da derivada, apenas, posteriormente, surgiram os problemas de optimização como aplicação da derivada. Nos programas posteriores verificámos que, cada manual, de forma distinta, abordava os problemas de optimização.

6º Objectivo: Observar qual a alteração sofrida pelos programas, em relação aos problemas de optimização, após a introdução das calculadoras gráficas no Ensino Secundário;

É visível que, apesar dos problemas de optimização tomarem um papel mais importante a partir da Lei de Bases do Sistema Educativo, essa importância só foi notória nos manuais escolares depois de ser introduzida a calculadora gráfica nos programas oficiais.

7º Objectivo: Contribuir para um melhor conhecimento da História da Análise Matemática em Portugal;

Esta tese de doutoramento, uma vez que julgamos pioneira na análise histórica dos problemas de optimização, trouxe novas informações ao conhecimento da História da Matemática e da História da Didáctica da Matemática em Portugal. Até agora não conhecemos nenhuma investigação acerca dos problemas de optimização nos manuais escolares portugueses e dada a crescente importância referente às questões ligadas às aplicações dos conceitos matemáticos, penso que esta tese de doutoramento poderá ter um papel importante.

4.2. HIPÓTESES DE INVESTIGAÇÃO. RESULTADOS

As hipóteses desta investigação eram:

4. Será que os problemas de optimização surgiram antes de surgir o conceito de derivada?

Relativamente a esta hipótese observamos que sim. De facto, os problemas de optimização surgiram muito antes de surgir o conceito de derivada. Os primeiros problemas de optimização foram identificados na obra *Elementos*, de Euclides, datada do séc. IV a.C.

5. Será que as várias fases por que passou o conceito de derivada influenciaram a forma de resolução dos problemas de optimização?

Também verificámos que à medida que os tempos foram passando, a forma de resolução dos problemas de optimização se tornou mais simples. Antes de se utilizarem as derivadas para determinar a solução óptima, a resolução dos problemas era muito extensa e complexa, e depois de se começar a aplicar as derivadas, essa resolução foi-se tornando cada vez mais simples.

6. Será que em alturas distintas eram abordados distintos tipos de problemas de optimização?

Apurámos, de facto que em cada época, os problemas que surgiam eram distintos. Inicialmente os problemas abordados eram mais abstractos, mas com o passar dos tempos foram aumentando os problemas aplicados à vida real, à Física ou à Economia.

4.3. LIMITAÇÕES DO TRABALHO

Como em grande parte dos trabalhos científicos, também nesta dissertação não conseguimos abarcar tudo o que inicialmente tínhamos ambicionado.

Tendo em conta a grande quantidade de livros históricos que abordam os problemas de optimização, não foi possível fazer a análise de todos. Fizemos então uma selecção e apenas analisámos os que nos pareceram mais representativos da época em que se enquadravam.

Também em relação aos manuais escolares sentimos essa dificuldade. Apesar das primeiras reformas terem um número reduzido de manuais escolares, dado que vigorava o regime do Livro Único, quando terminou este regime o número de manuais escolares publicados, para cada uma das reformas, foi aumentando significativamente. Assim, para os últimos períodos, sentimos necessidade de fazer uma selecção de manuais para analisar em cada um dos períodos. Essa escolha foi feita tendo em conta os manuais mais utilizados ou os que apresentavam problemas, do nosso ponto de vista, mais interessantes para serem analisados.

4.4. IMPLICAÇÕES PARA FUTURAS INVESTIGAÇÕES

A realização deste trabalho de investigação acerca da evolução histórica dos problemas de optimização e do seu tratamento no Ensino Secundário português, nos séculos XX e XXI, deixa em aberto algumas questões importantes para realização de novas investigações. Apesar de terminarmos a investigação, e sem menosprezar o muito

que foi feito, e que demos muito de nós ao longo destes anos, concluímos que muito mais poderia ser feito. Por isso, não queremos terminar sem referir algumas questões que consideramos da maior importância e que bem mereciam um condigno tratamento:

- Utilizar o modelo construído, quer para analisar os problemas de optimização nos manuais escolares, quer para analisar outro tipo de problemas;
- Desenvolver investigações semelhantes à nossa própria investigação para outro tipo de questões Matemáticas;
- Elaborar um estudo histórico acerca da forma como os professores, nas distintas reformas, faziam o estudo dos problemas de optimização;
- Analisar a última reforma do sistema educativo para a Matemática A, Matemática B e Matemática Aplicada às Ciências Sociais, relativamente ao facto de abordarem ou não os problemas de optimização e, no caso de serem abordados, identificar o tipo de problemas que são abordados para cada uma das disciplinas;
- Comparar os resultados obtidos nesta investigação para os problemas de optimização dos manuais escolares portugueses com os problemas de optimização dos manuais escolares de outros países.

BIBLIOGRAFIA

- AIRES, A. P. (2006) *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: Uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares*. Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca).
- BERNARDES, A. e outros (1994) Reflexão sobre a aplicação dos Novos Programas do. 10º Ano. Em *Encontro de professores Profmat*.
- BEZOUT, Etienne (1764) *Cours de mathématique*. Avignon: Imp. H. Offray.
- BISQUERA, R. (1989) *Métodos de investigación educativa*. Madrid: CEAC.
- BOYER, C. B. (1959) *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover Publications, inc.
- BOYER, C. B. (1993) *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.
- CAMACHO MACHIN, M e GONZÁLEZ MARTIN, A. S. (1998) Una aproximación a los Problemas de Optimización en libros de bachillerato y su resolución con la TI-92. *Revista de Enseñanza e Investigación Educativa AULA*, Vol. 10, p. 137-152.
- CARVALHO, R. (2001) *História do Ensino em Portugal*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- CASTAÑEDA ALONSO, A. (2002) Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. Em *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Março. México.
- CASTAÑEDA ALONSO, A. (2006) Formación de un discurso escolar: El caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y María G. Agnesi. Em *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Julho. México.

- CASTRO, R. V. (Coord) (1993) *Conteúdos e contextos da Reforma Curricular no 11º ano de escolaridade -concepções e práticas de professores experimentadores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- CASTRO, R. V. (coord) (1999) *Manuais Escolares: Estatuto, Funções e História*. Braga: Centro de Estudos em Educação e Psicologia do Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.
- DES (1997) *Matemática – Programas 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Ministério da Educação.
- DGBES (1991) *Programas de Matemática e Métodos Quantitativos. Organização Curricular e Programas. Ensino Secundário*. Lisboa: DGEBS, Ministério da Educação.
- EDWARDS, C. H. Jr. (1979) *The Historical Development of Calculus*. New York: Springer-Verlag.
- EECKE, Paul Ver (Trad) (1933) *La collection mathématique / Pappus d'Alexandrie*. Paris: Desclée de Brouwer.
- FERNANDEZ, C. S. e CASTRO, C. V. (2004) *De los Bernoulli a los Bourbaki: una historia del arte y la ciencia del cálculo*. Tres Cantos: NIVOLA libros y ediciones, S. L.
- GONÇALVES, V. (1992) Graves problemas na “experiência” dos novos programas de Matemática para o Ensino Secundário. Em *Boletim da SPM*, nº 24.
- GONÇALVES, V. (1993) A experimentação dos novos programas de Matemática: reflexões e algumas propostas concretas. Em *Boletim da SPM*, nº 25.
- GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. T. (2002) *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- GRAÇA, M. M. e MÁXIMO, M. O. (1991) Novos programas, que generalização para 92/93. Em *Educação e Matemática*, nº 19/20.
- HEATH, Thomas L. (Trad) (1956) *The thirteen books of Euclid's Elements*. New York: Dover.

- KAPUT, J. (1992) Technology and Mathematics Education. Em Grows, Douglas A. (Ed) *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, p. 515-555. New York: MacMillan.
- KINDT, M. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. Em *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, nº4, p. 41 – 52.
- L'HÔPITAL, G. F. A. (1988) *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: ACL – editions.
- LITHNER, J. (2004) Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. Em *Journal of Mathematical Behavior* nº 23.
- LOBATO, G. (1991) Novos Programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário. Em *Educação e Matemática*.
- LUNDGREN, U. P. (Coord) (1981) *Relatório final do Projecto de Avaliação do Ensino Secundário Unificado*. Lisboa: Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e das Universidades.
- MALAASPINA, U. (2007) Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. Em *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Novembro. México.
- MESA, V (2004) Characterizing practices associated with functions in Middle School textbooks: An empirical approach. Em *Educational Studies in Mathematics*, nº56. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (1986) *Lei de Bases do Sistema Educativo*, DR45/86, de 14 de Outubro. Lisboa: Assembleia da República.
- POLYA, G. (1975) *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.
- PONTE, J. P. (1987) A Matemática não é só cálculo e mal vão as reformas curriculares que a vêem como simples disciplina de serviço. Em *Educação e Matemática* nº4.

- PONTE, J. P. (1992) Os programas de Matemática no Ensino Secundário. Em *Encontro de Professores Profmat*.
- PROENÇA, M. C. (1998) *O Sistema de Ensino em Portugal (Séculos XIX-XX)*. Lisboa: Edições Colibri.
- RICO, L. e SIERRA, M. (1994) Educación matemática en la España del siglo XX. Em J. Kilpatrick, L. Rico e M. Sierra, *Educación matemática e investigación*. Síntesis: Madrid, p. 99-202.
- RUIZ BERRIO, J. (1997) El método histórico en la investigación histórico-educativa. Em N. De Gabriel e A. Viñao (eds) *La investigación histórico-educativa*. Barcelona: Ronsel.
- RUTHVEN, K. (1996) Calculators in the Mathematics Curriculum: the Scope of Personal Computation Technology. Em BISHOP, A. J. e outros, *International Handbook of Mathematics Education*, p. 435-468. Alemanha: Kluwer Academic Publishers.
- SCHUBRING, G. (1987) On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Autor. *For the learning of mathematics* 7, 3 p. 41-51.
- SCHUBRING, G. (1989) *Categorías para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos*. Traduzido por A. Orellana e L. Rico
- SERRET, J. A. (1879) *Cours de Calcul Différentiel et Intégral*. Paris : Gauthier Villars.
- SIERRA, M (Coord.) (1997) *Los conceptos de límite y continuidad en educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos*. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).
- SIERRA, M (Coord.) (2003) *Evolución de la enseñanza del Análisis Matemático y del Álgebra: de los libros de texto a las nuevas tecnologías*. Salamanca: Dpto Didáctica da Matemática y CE (Memoria Inédita).
- SILVA, J. C. (1991) Sobre a Proposta de Novas Programas de Matemática para o. Ensino Secundário. Em *Revista Educação e Matemática*, nº 19/20.

- SILVA, J. C. (1992) Reforma Educativa: cresce a insatisfação dos professores. Em *Boletim da SPM*, nº 22.
- STRIJK, D. (1989) *História concisa das Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.
- STURM, J. C. F. (1884) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier Villars.
- TIKHOMIROV, V. M. (1986) *Stories About Maxima and Minima*. Rhode Island: American Mathematical Society.
- TRULLS, O. S. (Coord) (1991) *A Experimentação dos Novos Programas para o 10º Ano de Escolaridade*. Braga: Centro de Estudos Educacionais e Desenvolvimento Comunitário do Instituto de Educação da Universidade do Minho.
- VALENTE, M. O. (Coord) (1989) *Manuais Escolares: Análise de Situação*. Lisboa: GEP e o Dpto de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.