ANA FILIPA LOURENÇO DIONÍSIO

A Matemática no primeiro livro do *Della Pittura*

Universidade de Coimbra
Departamento de Matemática
2003

Agradecimentos

À Doutora Helena Albuquerque pela sugestão do tema, pelo apoio, pela crítica e pelos conselhos dados sempre com o objectivo de melhorar.

Ao Doutor Vítor Murtinho por todos os esclarecimentos prestados neste domínio e por todas as obras emprestadas sem as quais não teria sido possível a redacção de algumas partes.

Aos meus queridos pais, à Silvia e ao Luís pelo apoio e incentivo manifestado, pela paciência que demonstraram ter comigo quando o trabalho corria menos bem, pela compreensão dos inúmeros momentos em que estive ausente, pela colaboração na leitura das várias versões e pelas sugestões realizadas.

Ao Doutor Carlos Sá pela simpatia em me facultar o seu estudo sobre História da Geometria Projectiva mesmo sem me conhecer pessoalmente.

Ao Pai do Céu a quem dou graças de todo o meu coração por ouvir pacientemente as minhas preces, proporcionando-me momentos de verdadeira inspiração divina.

À Bina, ao João e à *petite* Céline pela simpatia e disposição em encontrarem alguns preciosos livros para a composição desta dissertação.

Aos meus colegas, em especial à Ema e à Conceição, pela compreensão demonstrada durante este período de mestrado em que fui de alguma forma poupada em algum trabalho. Uma palavra amiga para a Nisa que convidando-me a apanhar um pouco de ar fresco, por vezes em alturas cruciais, permitiu desanuviar o espiríto e retomar o trabalho com uma melhor disposição.

À Clara Araújo por algumas traduções do francês.

À Carla Cordeiro pela ajuda na revisão final do texto.

E.... a todos os que permanecendo anónimos também muito contribuíram para que este sonho se realizasse.

Obrigada a todos pela vossa amizade!

«Sê todo em cada coisa.
Põe quanto és no mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda brilha, porque alta vive.»

Fernando Pessoa (Ricardo Reis)

Índice

Introdução

Segundo Jurgis Baltrusaitis, a perspectiva é «uma ciência que fixa as dimensões exactas das formas e a sua posição no espaço, sendo ao mesmo tempo uma arte da ilusão que as recria. A sua história não é só uma história do realismo artístico – é também a história de um sonho»[1].

E «o que é a vida? Uma ilusão, uma sombra, uma ficção. Pois toda a vida é sonho e os sonhos, sonhos são»[2]. Os sonhos são bússolas de vontade que, como dizia o poeta, nos *comandam a vida*, e foi de facto a colossal vontade de desvelar este sonho que nos comandou nos últimos dois anos. Oxalá as cartas seguidas nos tenham conduzido a bom porto e possamos partilhar com todos os que se interessam pela aplicação da matemática à arte, o nascimento de uma filha da Geometria – a Perspectiva. Para saciar a curiosidade, levantemos uma pequena ponta do longo manto que envolve calorosamente este rebento geométrico.

Tudo teve início nesse período da história conhecido como Idade Talássica. Nos primórdios desta idade do mar os intelectuais marcavam presença junto às margens do Nilo, Tigre e Eufrates. O primeiro destes rios atravessa um país de descendência faraónica, as suas águas banham papiros onde repousa o saber deixado pelos eruditos. No meio deles certamente jaz um texto que a história perdeu e que Proclo atribui ao primeiro verdadeiro matemático, Tales de Mileto. O seu prestígio deve-se essencialmente a uma encenação realizada com o intuito de calcular a altura do imponente túmulo faraónico, que hoje é cartão de visita da localidade de Gizé.

Por estes lados germinaram os primeiros elementos da geometria – «o ponto, cintilante como um diamante na intersecção dos raios de sol, a linha saída do próprio astro, o ângulo de sombra, a superfície, brilhante ou sombria, círculo, triângulo, quadrado...nascem ali como formas ideais na treva e na claridade, no meio das próprias coisas, no mundo tal como ele é, reais como raios de luz, franjas de sombra, e como as suas orlas comuns»[3]. Aproveitando tamanha dádiva, Tales cria uma cena teatral onde o Sol, a Pirâmide e a areia desértica são os protagonistas. O Sol de Rá encontra nos seus raios linhas contínuas, que ao intersectarem o monumento egípcio e um bastão de altura propícia, delimitam uma apurada definição de triângulos. As sombras projectadas podem mudar consoante a estrela divina esteja mais ou menos afastada do *gnómon*, mas a relação que entre elas existe permanece invariável permitindo descobrir o segredo do Faraó – a altura inacessível. Com esta encenação conhecemos «claramente do volume o que escrevem ou descrevem as sombras projectadas, as informações transportadas na areia por um raio de Sol depois de ser interceptado pelas arestas e pelo cume do prisma opaco. Que nome dar a esta geometria? Uma perspectiva, uma arquitectura, uma física, uma óptica?» [4]

A cena de Tales atravessa o Mediterrâneo. Platão contempla-a e com ela decora o fundo da sua caverna. Mais uma vez o volume escreve a sua sombra numa parede plana, explicando ao filósofo grego que um volume pode ser expresso pelas suas projecções exigindo apenas um ponto de vista e um desenho numa superfície plana. Mas esta encenação ou cenografia platónica encontra em Euclides de Alexandria um espectador atento, e como fruto de uma brilhante observação resulta uma fenomenal compilação de teoremas, *L'ottica*, justificando matematicamente os *enganos e desenganos* do olhar. Foi esta tentativa euclidiana de analisar geometricamente as ilusões originadas pela cenografia, que conduziu alguns dos seus tradutores a substituírem o título original desse tratado por *Perspectiva*.

Porém, a herança helénica revela-nos que também o astrónomo Claúdio Ptolomeu apresentou importantes contributos para este domínio. Por estranho que pareça, o principal deles encontra-se na sua *Geografia*, onde se menciona um método cartográfico que se assemelha a uma projecção estereográfica, servindo de inspiração para os artistas renascentistas representarem uma superfície tridimensional numa a duas dimensões. Contudo, Ptolomeu escreve também uma *Óptica* seguindo algumas ideias euclidianas, mas sendo pioneiro na abordagem da anatomia ocular, por considerar imprescindível para a interpretação do mecanismo da visão, a constituição do olho. A estas ideias ptolemaicas juntam-se os homens da medicina – dos quais se destaca Galeno que, por meio de dissecções do órgão da visão, concebe um modelo da sua constituição seguido séculos a fio.

Com o declínio da Academia de Alexandria e o *grito de guerra* lançado por Maomé, a armada árabe invade o mundo expandindo-se em várias direcções. O povo árabe apodera-se dos tesouros gregos e mostra a sua admiração, pois não só os elogia como prossegue os seus estudos. O contributo árabe para esta ciência deve-se fundamentalmente a Alhazen, explicando detalhadamente no seu *Kitab* o mecanismo da visão. O impacto alcançado por esta obra no Ocidente é de tal modo forte que ao fim de pouco tempo, já se encontrava no seio dos eruditos – eruditos estes que na sua maioria dedicavam a sua vida a Deus. Na verdade, «foi o saber apanágio da Igreja, a fonte essencial de toda a luz que alumiava a Europa naqueles tempos de belicosa actividade»[5]. Apesar de se supor, erradamente, que neste período se deu um entorpecimento intelectual, eclipsando-se assim totalmente a inteligência, foi durante este mesmo tempo que «reluziram com maior ou menor intensidade os lampejos do talento»[6], sendo estes «clarões percursores de uma nova alvorada intelectual»[7]. Das trevas da meia-idade romperam raios de luz iluminando os horizontes intelectuais, dos quais se destacam nomes como Robert Grosseteste, Alberto Magno, Roger Bacon, John Pecham e Vitélio. No que diz respeito à óptica, e embora seguissem profundamente o tratado de Alhazen, estes três últimos redigiram importantes textos.

«Enquanto a ciência dilata as fronteiras do visível, do observável, florescem igualmente as pesquisas que, explorando os limites do olho humano, tendem a dar às imagens fixas da pintura o movimento e a vida»[8]. É este dom ilusionista que, na alvorada do século XIV desabrocha das magníficas obras de um humilde pastor – Giotto di Bondone, que faz renascer uma arte adormecida há séculos. Encontrando na mãe natureza a sua musa inspiradora, Giotto procura exprimir as novas formas aí descobertas «de maneira a fazer crer que o que não é, pareça»[9]. Encantados com as obras do pastor, os pintores desta época tentam incutir este espírito ilusionista nos seus trabalhos, fazendo-o muitas vezes empiricamente.

Percorrendo, mais uma vez, «*a grande árvore da prédica religiosa*»[10], chegamos ao Renascimento onde a Igreja também será triunfante. Neste período da história inicia-se uma manifesta transição de espírito, procurando-se transpor as concepções criadas na época medieval.

Dando conta dos erros cometidos pelos pintores e tentando suscitar uma nova compreensão da identidade do artista, da definição de arte e do seu lugar na sociedade, surge em 1435 pelas mãos em concha de um sacerdote genovês, Leon Battista Alberti[11], um sermão artístico oferecido a todos os que pretendessem elevar o digno oficio de pintor. *Della Pittura* revolucionou o estilo artístico vigente há séculos, tornando Alberti um dos responsáveis pela mudança substancial que ocorreu na arte em Itália no século XV. O referido tratado albertiano mereceu duas versões, a primeira em latim – dedicada a Giovan Francesco, ilustríssimo príncipe de Mantua, e a segunda em italiano – homenageando o arquitecto Filippo Brunelleschi; porém não sabemos precisar quanto tempo decorreu entre as duas publicações. Os três livros que compõem a obra seguem o esquema clássico de um tratado isagógico – no primeiro dos livros mencionam-se os «elementos» (*rudimenta*), no segundo aborda-se a «arte» (*ars*) e no terceiro o «artista» (*artifex*) – como clarificam as palavras do autor dirigidas ao seu amigo Pippo:

«Verás três livros: o primeiro todo matemático, nascendo das raízes da natureza esta lendária e nobríssima arte. No segundo livro coloco na mão do artista a arte, distinguindo as suas partes e demonstrando tudo. No terceiro instruo o artista como pode e deve alcançar a perfeição na arte e no conhecimento de toda a pintura.» [12]

Infelizmente nestes dois anos de mestrado apenas nos foi possível analisar o primeiro destes três livros, no qual Alberti começa por socorrer-se desse clássico manual da geometria que são os *Elementos*, para dizer o que entende por ponto, linha, ângulo e outros termos geométricos mencionados por Euclides, mas de um modo acessível aos pintores. Após as definições, recupera o essencial da óptica da Antiguidade e da época medieval, também conhecida como *perspectiva naturalis*, para criar um método que constitui uma *perspectiva artificialis* – onde a sistematização matemática da teoria da visão aplicada ao problema da representação, proporciona a invenção da *construzione legittima* como um método exacto para corrigir as aproximações empíricas que os artistas realizavam.[13] Com o sacerdote genovês o plano de representação pictórico, a *veduta* como lhe chama, resulta de uma intersecção com a pirâmide visual, apresentando-se ao longo deste livro critérios estruturais que permitem construir essa janela, quaisquer que sejam os objectos a representar num espaço dado. O resultado no plano bidimensional é um espaço matematicamente ordenado, homogéneo, contínuo e isótropo.

Ao abrir a sua janela sobre o mundo este sacerdote de carácter enciclopédico, descobre a realidade, sendo ela própria a «geratriz mental que alimenta e de que se alimentam as novas maneiras de ver»[14]. Mas o real já lá estava, sempre esteve, «então o que mudou foi o olhar que o olha, que lê, que interpreta, que o anima e lhe dá vida»[15]. Merecendo os aplausos dos seus sucessores, este foi o espírito que Alberti incutiu no olho quatrocentista.

«A profissão artística consome lentamente a ciência perspéctica»[16], os contemporâneos do nosso autor começam a preocupar-se com o que vêem e como vêem. O primeiro a dedicar-se afincadamente a esta ciência e à sua interpretação geométrica foi Piero della Francesca, expondo na sua *Prospectiva Pingendi* a demonstração matemática da construção legítima. Abrindo o caminho para Dürer, Viator, Vingola e o seu divulgador Egnazio Danti, e encontrando em Guidobaldo del Monte o desenlace de um nó entre a arte e a ciência. Mas esta filha da geometria tanto apaixona artistas como matemáticos, seduzindo verdadeiramente Girard Desargues. Desta união nasce então a Geometria Projectiva, com o manifesto desagrado de René Descartes.

Notas

[1] Baltrusaitis, *Anamorphoses. Les Perspectives Dépravées-II*, Champ, Flammarion, 1996, p.13.

[2] Conhecida máxima de Calderón de la Barca.

[3] Serres, *As origens da Geometria*, Terramar, 1997, p. 213.

[4] *Ibidem*, p. 178.

[5] Coelho, *A Ciência na Idade Média e as Enciclopédias desse tempo*, Colecção Filosofia & Ensaios, Guimarães Editores, Lisboa, 1988, p. 17.

[6] *Ibidem*, p. 57.

[7] *Ibidem*.

[8] Costa e Brusatin, *Visão*, Criatividade-Visão, Enciclopédia Einaudi, volume 25, tradução de Maria Bragança, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1992, p. 259.

[9] Flocon, Albert e Taton, René, *La perspective*, Presses Universitaires de France, Paris, 1963, p.33.

[10] Costa e Brusatin. *Op. cit*., p. 245.

[11] Nasceu no ano 1404 em Génova, filho ilegítimo de uma nobre família florentina exilada desde 1387 por questões políticas e económicas. O seu pai, Lorenzo di Benedetto Alberti, era banqueiro e comerciante, em relação à sua mãe apenas sabemos que se chamava Bianca Fieschi tendo falecido dois anos após o nascimento de Leon. Em 1415 Leon parte para Pádua, ingressando na escola de Gasparino Barzizza. Dedica-se às línguas clássicas estudando grego, latim e os autores clássicos como: Cícero, Quintiliano, Platão e Terêncio, seguindo os habituais conhecimentos dos *studia humanitatis.* Mas também adquire uma sólida base cientifica em geometria, astronomia e música, obtendo pleno aproveitamento em todas elas. É aqui em Pádua, em 1417, que conhece Nicolás de Cusa, com quem manterá uma longa amizade. Terminadas as lições na escola de Barzizza, Leon ingressa na Universidade de Bolonha, por volta de 1419 ou 1420, iniciando os seus estudos em Direito Canónico e Direito Civil. Em 1421 morre o seu pai em Pádua, deixando-o desolado. O que o conduz a uma verdadeira crise nervosa e económica, uma vez que os seus parentes apropriam-se da sua parte da herança e eliminam a sua participação nos negócios da família. Este período constituiu o pior momento da sua vida, sendo obrigado a interromper os seus estudos. O qual é ultrapassado graças à música e aos jogos matemáticos. Quatro anos mais tarde consegue licenciar-se nos dois direitos que estudou e nesse mesmo ano é ordenado sacerdote. Para além do *Della Pittura* ainda redigiu outros tratados que envolvem conhecimentos matemáticos: *Elementa picturae* (1436), *Ludi rerum mathematicarum* (1448-1449), *De lunularum quadratura* (1450) e *Historia numeri et linearum* (1452) que hoje encontra-se perdido. Morreu em Roma no ano 1472.

[12] Alberti, *Della Pittura, Dedication of the Italian text to Filippo Brunelleschi*. Versão de Cecil Grayson, Penguin Classics, 1991, p. 35.

[13] Devemos referir que o texto original de Alberti é contínuo, não apresentando qualquer tipo de figuras ou divisão em capítulos. Assim, para que se tornasse mais acessível a sua interpretação, dada a difícil linguagem utilizada pelo autor, dividimos este primeiro livro em duas partes: na primeira mencionam-se as definições de termos geométricos e a interpretação do mecanismo da visão, na segunda aplicam-se os conceitos referidos anteriormente à construção legítima. Para o estudo então realizado, consultámos três versões deste tratado. A primeira data de 1784 e é redigida por Don Diego Antonio Rejon de Silva, *Caballero Maestrante de la Real de Granada y académico de honor de la Real Academia de San Fernando*, cujo exemplar se encontra na Biblioteca Nacional de Lisboa com a cota BN. BA.131V. A segunda foi publicada em 1991 por Cecil Grayson, um prestigiado historiador, onde se apoiaram as versões seguintes como a terceira que adquirimos, editada em 1999 por Rocío De La Villa. Como Cecil Grayson é um especialista neste domínio tendo também traduzido outras obras de Alberti, as citações que fazemos do *Della Pittura* foram retiradas da sua versão.

[14] Marques de Almeida, *Estudos de História da Matemática*, Inquérito Universidade, 1997, p.14.

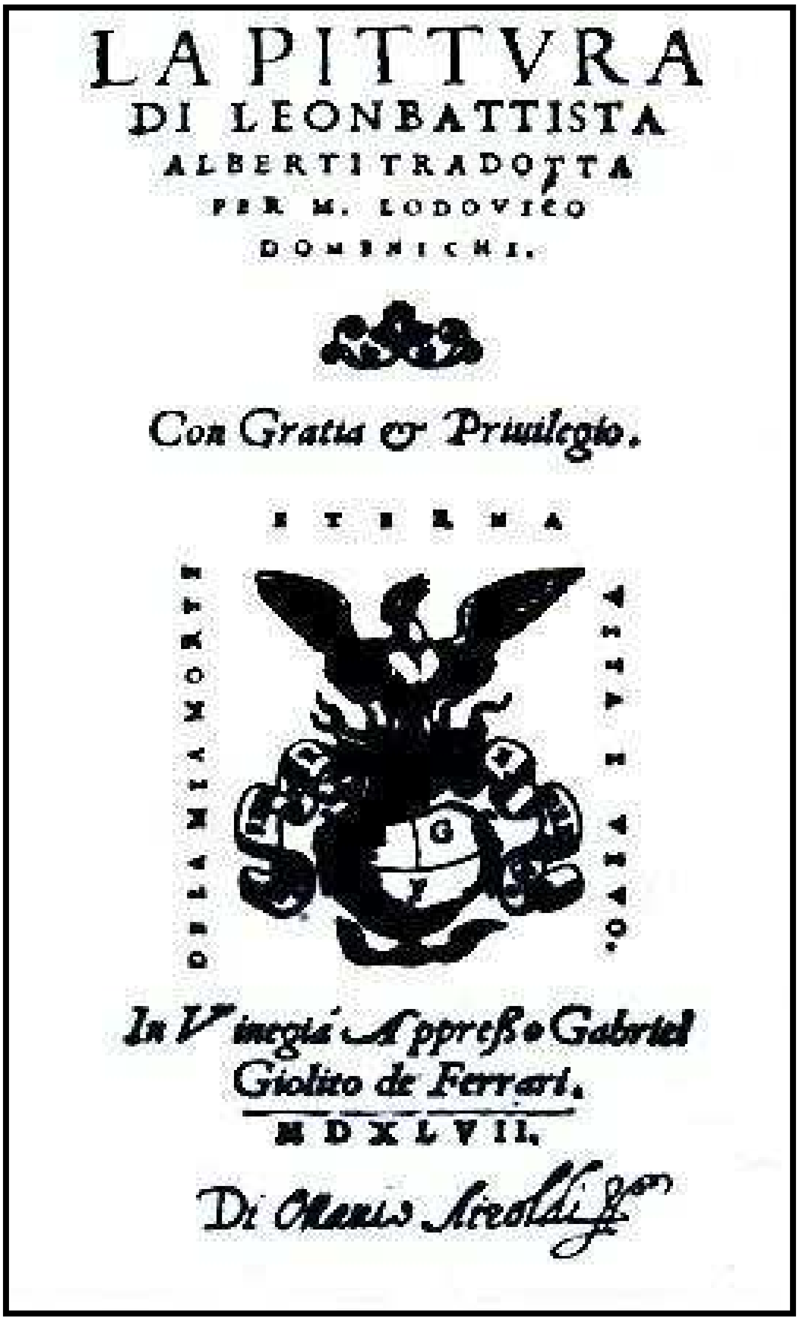
[15] *Ibidem*, p. 15.

[16] Brusatin, *Desenho/projecto*, Criatividade-Visão, Enciclopédia Einaudi, volume 25, tradução de Maria Bragança, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1992, p. 317.

«Onde poderia situar-se Alberti?
Em que grupo de homens cultos se poderia colocar?
Creio que entre os científicos da natureza. Certamente nasceu para descobrir os segredos da natureza. Que ramos das matemáticas não conhecia?
Era geómetra, aritmético, astrónomo, músico e mais admirável na perspectiva que nenhum outro em muitos séculos.»

Cristoforo Landino, *Disputationes Camaldulenses*[1]

A Matemática no primeiro livro do *Della Pittura*


LA PITTVRA
DI LEONBATTISTA
ALBERTI TRADOTTA
PER M. LODOVICO
DOMENICHI.

Con Gratia & Priuilegio.

DE LA MIA MORTE ETERNA VITA I VIVO.

In Vinegia Appresso Gabriel
Giolito de Ferrari.
MDXLVII.

LIBRO
Uno

Parte I

1. Definição de ponto, linha e superfície

O ponto é definido como sendo *um sinal que não se pode dividir em partes*. A palavra *sinal* é aqui utilizada para se referir a algo que esteja numa superfície que seja visível ao olho. Quanto à linha, esta é obtida a partir de uma sequência de pontos colocados uns a seguir aos outros; também esta se trata de um *sinal* cujo comprimento pode ser dividido, o que já não acontece com a sua largura por ser extremamente fina. Assim, entendemos que uma linha tem comprimento mas não largura.

Alberti prossegue classificando então as linhas em rectas ou curvas. Enquanto a recta é *estendida* directamente de um ponto a outro, a curva resulta da união de dois pontos por meio de um arco. Unindo muitas linhas obtemos uma superfície a qual é considerada pelo sacerdote, como o término de um corpo que apresenta comprimento e largura, mas não profundidade.

2. *Qualidades* de uma superfície

Qualidades que podem alterar a superfície

Numa superfície podemos distinguir duas *qualidades*, de tal forma que se as alterarmos modificamos o todo. A primeira qualidade é a *area*, étimo de origem latina, a qual traduz o contorno que poderá ser determinado com apenas uma *linha circular*, definida como aquela *que abraça e contém em si todo o espaço do círculo*; ou com várias – uma recta e uma linha curva ou muitas rectas e muitas curvas. O círculo é uma superfície circundada por uma linha formando uma coroa.

Introduzido este conceito, Alberti aproveita para explicar o que são o centro e o diâmetro de um círculo. Refere-se ao centro como sendo um ponto situado no *meio* da superfície, de tal modo que todos os raios que em linha recta se dirigem deste ponto à coroa, são iguais entre si. A recta que passa pelo centro, dividindo a coroa em duas partes iguais, é identificada como sendo o diâmetro – no entanto, *recta cêntrica* será a designação adoptada ao longo da obra.

A alteração da direcção das linhas que formam o contorno de uma superfície conduz à transformação da figura inicial. As linhas podem ser alongadas ou encurtadas e assim obtemos uma nova figura – consequentemente, esta alteração afecta de igual modo os ângulos. É a partir desta ideia que surge este conceito:

Ângulo é a extremidade de uma superfície originada por duas linhas que se cortam.

Podemos classificá-lo em três tipos: recto, agudo e obtuso. O ângulo recto é definido como sendo um dos quatro ângulos formados pela intersecção de duas linhas rectas, de tal modo que cada ângulo seja igual a cada um dos outros três.

O ângulo agudo é menor do que um ângulo recto – *está menos aberto*; pela mesma ordem de ideias, o ângulo obtuso é então *mais aberto* do que um ângulo recto.

A segunda *qualidade*, refere o autor, *é como uma pele estendida sobre a cara da superfície*. Podemos classificá-la em plana, esférica ou côncava.

Uma superfície é dita plana quando ao colocarmos sobre ela uma régua, esta tocará igualmente todas as suas partes sem necessitar de ser deformada. A fim de tornar este conceito mais claro, Alberti estabelece a comparação entre uma superfície plana e a imagem que temos da superfície de água tranquila.

A superfície esférica *imita* o contorno de uma esfera, e a esta definição, o autor acrescenta ser *um corpo redondo que pode dar voltas por qualquer lado e no seu centro há um ponto do qual distam igualmente todas as partes da esfera*.

A superfície côncava é aquela que interiormente é como o revés da esfera – recorrendo mais uma vez a situações reais, a superfície côncava é comparada com a superfície de um ovo visto por dentro. Finalmente, uma superfície ainda pode ser composta, caso tenha uma parte plana e uma outra côncava ou esférica – como exemplo, refere a superfície de uma cana e a superfície exterior de uma coluna.

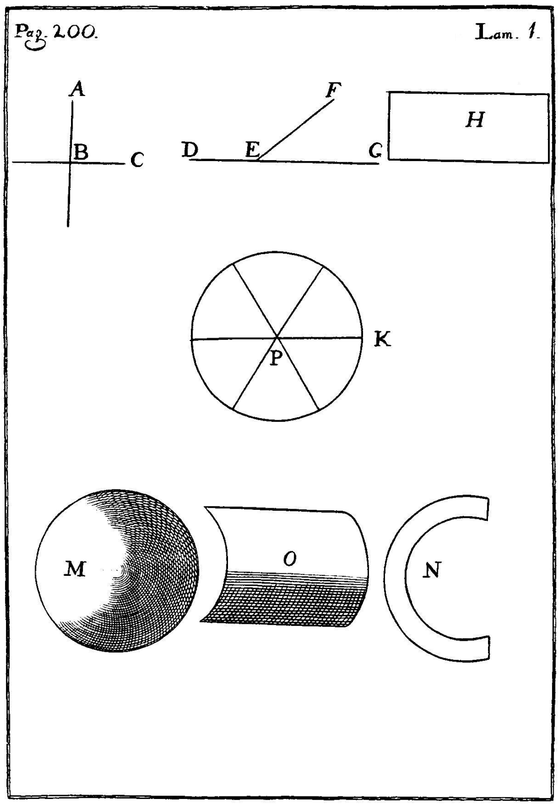


Figura 1. $A\hat{B}C$ ângulo recto. $D\hat{E}F$ ângulo obtuso. $F\hat{E}G$ ângulo agudo. H superfície plana, M esférica, N côncava, O composta. K recta cêntrica, P centro do círculo.

Qualidades que não alteram a superfície

Alberti considera ainda outras duas *qualidades* que não alteram a superfície, embora os efeitos visuais possam iludir o observador nesse sentido. Tratam-se da luz e do sítio onde se encontra o objecto. Alterando qualquer uma destas *qualidades* a superfície mantém-se, mas parecer-nos-á diferente.

O sítio

É importante ter em conta o sítio onde se encontra o objecto, pois temos de considerar o modo como se alteram as características da sua superfície quando o deslocamos de um lugar para outro. Tudo isto se deve à *força e virtude* dos olhos. É forçoso que os contornos se representem à vista maiores ou menores, ou de todo diferentes do que antes eram: isto deve-se não só à mudança de sítio como também à tonalidade da sua cor, podendo até por vezes ficar-se com a sensação de que a cor aumentou ou diminuiu.

Alberti defende a ideia de alguns filósofos[2] de que as superfícies devem ser examinadas por meio de raios visuais. O problema que se colocava então consistia na forma como se percepcionavam os objectos através desses raios.

Os eruditos da antiga Grécia propuseram algumas teorias ópticas, onde se confunde a luz com o fenómeno da visão – segundo os pitagóricos, a visão é causada pela projecção de imagens lançadas do objecto até ao olho; por outro lado, Euclides na sua *L´ottica*, perfila a ideia de Platão de que o olho emana a luz que permite ver o objecto. Em contraste com estas teorias, Aristóteles defende que o meio (por exemplo, o ar ou a água) entre o objecto e o olho desempenha um papel fundamental, segundo o qual viaja em linha recta uma *actividade* no meio ambiente entre o objecto e o olho. O próprio autor acrescenta:

Entre os antigos disputou-se muito se os raios visuais partiam do olho ou da superfície observada, mas esta contenda, como não é necessária para nós, a omitiremos.

Alberti considera que existem três espécies de raios visuais: extrínsecos, intrínsecos e cêntrico.[3] Uns visam somente o contorno da superfície compreendendo a sua *qualidade*, e como apenas incidem nas partes extremas da superfície designam-se *raios extrínsecos*, embora estes também assimilem a *quantidade*, isto é, o espaço existente entre pontos distintos no contorno da superfície em que existem tantas *quantidades* quantos os pontos que estiverem separados nesse contorno e opostos entre si. Ou seja, para Alberti uma *quantidade* representa uma secção de um objecto observado, daí referir que o olho percepciona as *quantidades* com os raios extrínsecos como se fossem um compasso. As palavras seguintes esclarecem-nos:

Nós com o auxílio da nossa vista conhecemos a longitude, mediante a altura ou a sua profundidade; a altura mediante os lados, a grossura mediante a parte que cerca e enfim todas as outras dimensões sejam as que forem compreendêmo-las com estes raios extrínsecos.

Os raios que recebem as cores e as luzes de uma superfície são designados *raios intrínsecos*. Para o autor, comportam-se como um camaleão:

Segundo dizem, quando está cheio de medo toma a cor do que lhe cerca para que não o apanhem.

Como estes raios absorvem a luz e a cor da superfície, qualquer secção obtida na pirâmide visual apresenta essas mesmas luzes e cores. É importante salientar que à medida que a distância do objecto aumenta, a acção destes raios diminui. Nicole Oresme, falecido em 1382, na sua obra *De visione stellarum* considerava que a densidade do ar e a distância eram responsáveis pela debilidade da luz e das cores. Tendo conhecimento deste facto, Alberti afirma que quanto maior for a distância mais *confusa* parecerá a superfície.

Pela mesma razão que o nosso autor adopta a denominação de recta cêntrica anteriormente mencionada, o raio visual que este considera ser o mais activo e eficaz de todos é o raio cêntrico [4] – raio que ao incidir numa superfície forma ângulos iguais com todos os lados. Se a distância e a posição deste raio forem modificadas a superfície parecerá alterada, portanto será necessário conciliar a posição respectiva das linhas e dos ângulos.

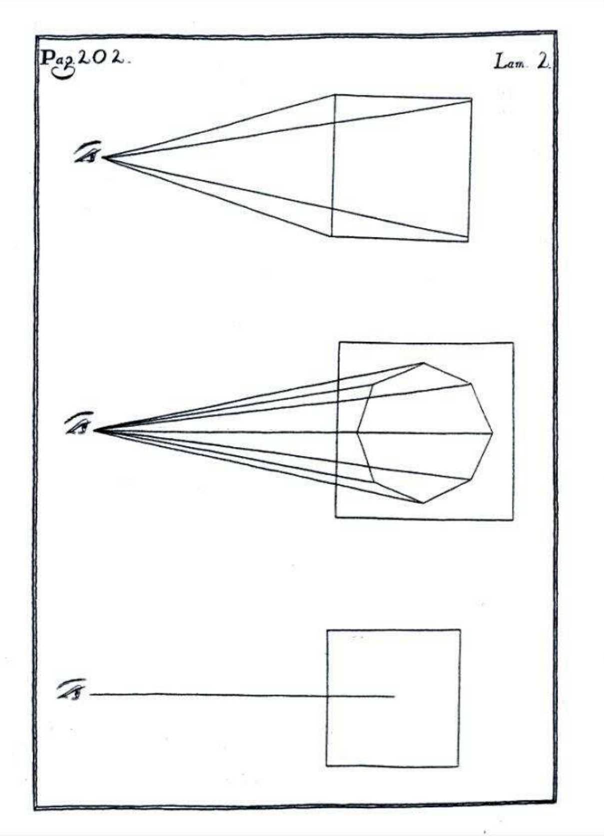


Figura 2. Em cima, raios extrínsecos. No meio, raios intrínsecos. Em baixo, raio cêntrico.

Assim, Alberti defende que a visão tem a configuração de um triângulo, cuja base é a *quantidade* observada e os lados, os raios que partem dos pontos extremos dessa *quantidade* para o olho. Como este triângulo é fundamental para a percepção, é designado por *triângulo visual*.

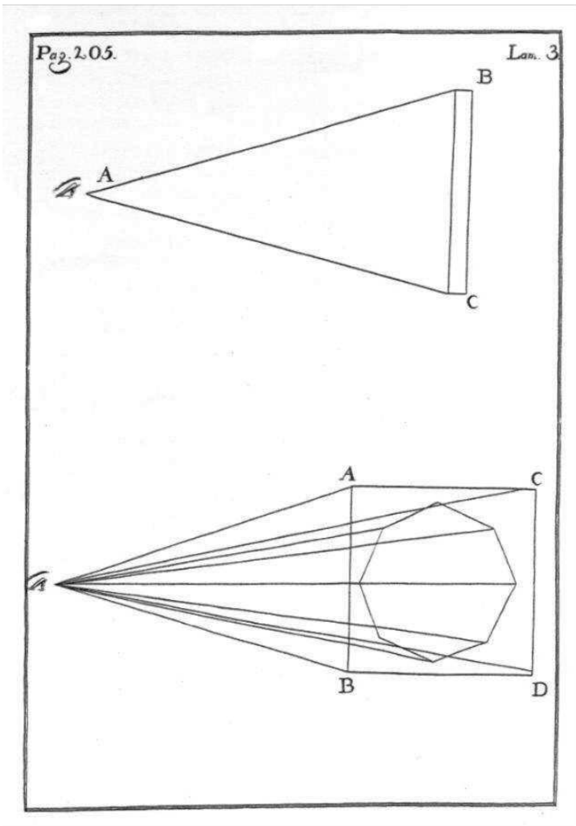


Figura 3. ABC triângulo visual.

Tendo em conta o referido triângulo, o sacerdote genovês refere que o ângulo de visão corresponde ao principal ângulo deste triângulo, no caso da figura anterior será representado por $B\hat{A}C$, o qual merece a seguinte regra:

Quanto mais agudo for este ângulo, menor parecerá a quantidade que se vê.

Facilmente percebemos a noção que Alberti pretende transmitir. Ao afastarmo-nos de um objecto, este parecer-nos-á cada vez mais pequeno até existir uma distância a partir da qual o deixamos de ver completamente. No entanto, muitas vezes sucede que quanto mais próximo estivermos de uma superfície menor esta parece, e quanto mais a afastarmos maiores parecerão as suas dimensões – é o caso das superfícies esféricas.

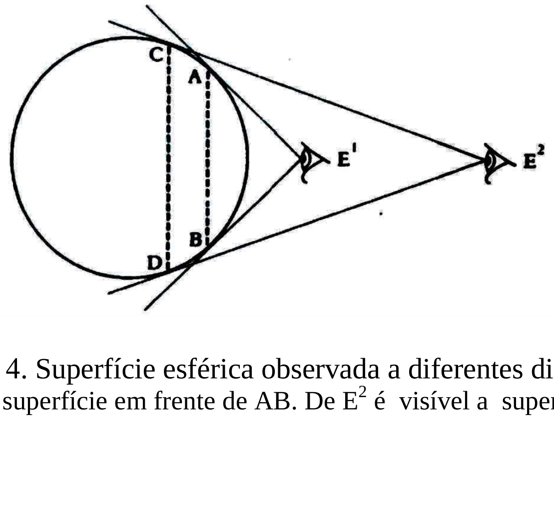


Figura 4. Superfície esférica observada a diferentes distâncias.
A partir de E^1 é visível a superfície em frente de AB. De E^2 é visível a superfície em frente de CD.

As *quantidades* parecem maiores ou menores de acordo com a distância que as separa do observador. Assim, os raios intrínsecos por vezes transformam-se em extrínsecos e vice-versa. Quando os raios intrínsecos se convertem em extrínsecos, a *quantidade* observada parecerá menor. Ao contrário, quando os extrínsecos se transformam em intrínsecos corrigem o contorno e quanto maior for a distância deste maior parecerá a *quantidade*. Assim Alberti enuncia outra regra:

Quanto mais raios abraçamos com a vista maior devemos pensar que seja a quantidade, e se abraçarmos poucos, menor é a quantidade.

Esta é a razão pela qual o autor defende que a visão ocorre através de uma espécie de pirâmide formada pelos raios referidos. A base da pirâmide é a superfície observada, as arestas são os raios visuais extrínsecos e o vértice confunde-se com o olho do observador, ponto de intersecção dos vários triângulos.

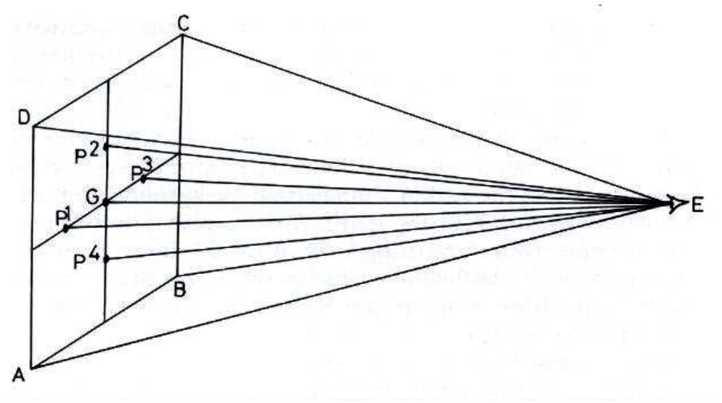


Figura 5. Pirâmide visual.

E- olho
EA, EB, EC, ED- raios extrínsecos
EG- raio cêntrico
EP1,EP2,EP3,EP4- raios intrínsecos

O caso das superfícies que se nos assemelham diferentes ou deformadas é uma outra condição que devemos acrescentar, pois a sua percepção depende da recepção da luz influenciando o que observamos. Assim, uma superfície esférica e côncava que esteja iluminada apenas numa das suas partes, será mais clara na zona iluminada e mais escura na outra. Se trocarmos a posição inicial da luz que incidia sobre a mesma superfície, a parte que antes estava mais clara passará agora a ficar mais escura e a que estava mais escura parecerá agora mais clara. Todavia, isto só acontece se mantivermos a distância e a posição do raio cêntrico.

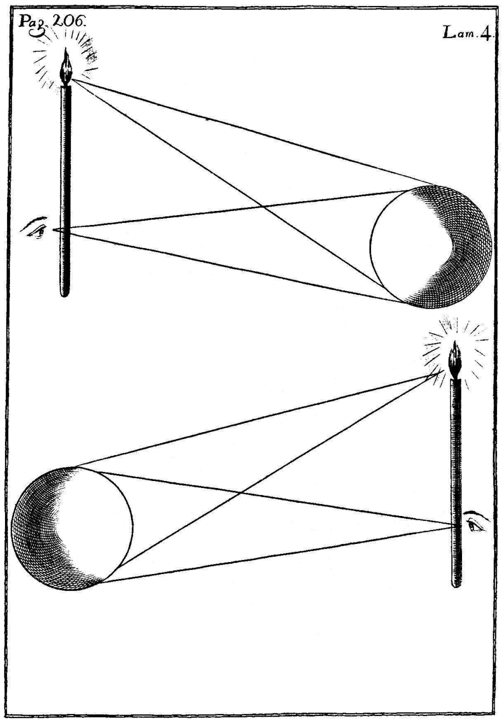


Figura 6.

No caso de existirem várias luzes em redor da superfície, as diversas manchas de claridade e de obscuridade alternam dependendo do número e da intensidade das luzes. Assim, torna-se evidente que a posição e a distância do raio cêntrico contribuem para aumentar a nitidez da nossa visão.

A luz

Embora possa variar, a luz é outra *qualidade* que não altera a superfície. Nada se pode ver se não estiver iluminado – faltando a luz, as cores dos objectos vão escurecendo pouco a pouco até se ocultarem completamente, mas voltando a claridade as cores regressam novamente à nossa vista. Assim, e dado as cores alterarem conforme a luz, Alberti estuda-as em primeiro lugar a fim de posteriormente verificar o modo como esta as altera.

Tal como existem quatro elementos na natureza [5], o autor considera que existem quatro géneros de cores: a cor do fogo é o vermelho, a do ar o azul, a da água o verde e a da terra o amarelo. Todas as outras cores resultam da mistura destas com o branco e o preto.

As cores estão extremamente ligadas à natureza, toda a cor se altera com a sombra e se torna diferente do que era. Aumentando-se a obscuridade diminui-se a claridade e a brancura, por outro lado se aumentarmos a claridade *acrescentamos o seu esplendor*.

Alberti atribui assim força à luz, considerando que esta provém do sol ou da lua, das lanternas ou do fogo. Porém, existe uma grande diferença entre estes dois géneros de luz – enquanto que a luz do céu origina sombras quase iguais ao corpo, o fogo origina sombras maiores que o próprio corpo. [6]

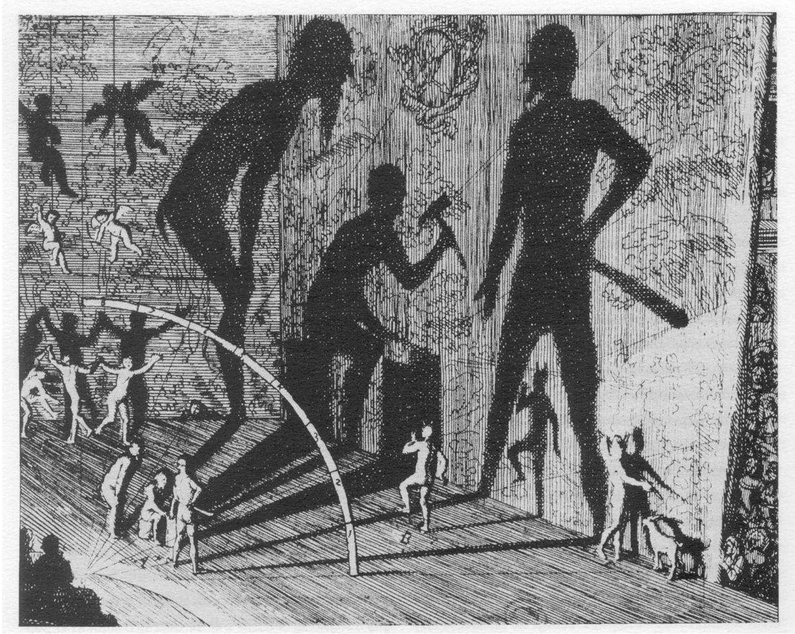


Figura 7. Sombras de figuras produzidas pela luz de uma vela (raios de luz convergentes).[7]

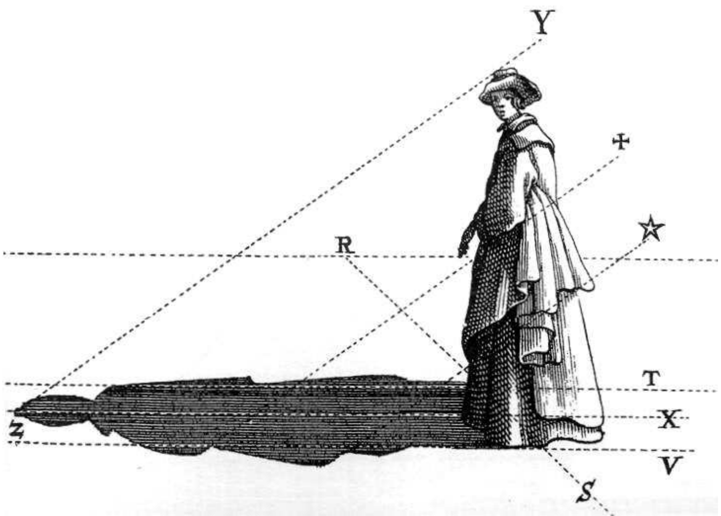


Figura 8. Sombras de figuras produzidas pela luz do sol (raios de luz paralelos).

As sombras são produzidas quando os raios luminosos são intersectados conduzindo-os à reflexão, o que, segundo os matemáticos, Alberti diz fazer-se com ângulos iguais entre si. Deste modo, quando os raios luminosos incidem numa superfície assumem a cor que nela predomina, o nosso autor exemplifica referindo o rosto esverdeado de uma pessoa quando está num prado.

3. Superfícies equidistantes e colineares

Também nesta obra são abordadas as definições de *superfícies equidistantes* e *colineares*. As superfícies equidistantes são aquelas cuja distância entre si é a mesma em qualquer ponto.[8] O autor clarifica este conceito referindo-se aos pavimentos e aos espaços entre os edifícios. As superfícies colineares são aquelas que estão colocadas numa linha recta contínua [9] – Alberti utiliza como exemplo as superfícies das colunas que se colocam em sucessão numa arcada.

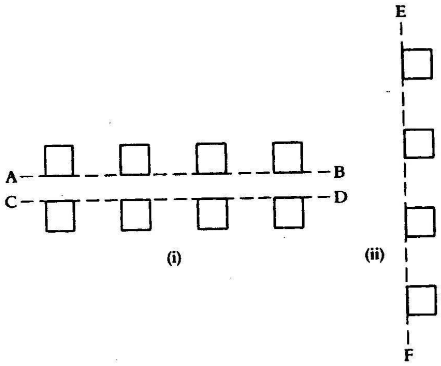


Figura 9. Objectos colineares e dispostos a igual distância entre si.

4. Triângulos semelhantes

Um outro conceito que o autor considera importante é o de *triângulos semelhantes*, enunciando a seguinte proposição matemática:

Se uma recta corta um triângulo, de modo a formar um outro menor e esta é paralela à base do primeiro, os lados do triângulo menor são proporcionais aos do maior.

Seguindo este raciocínio, Alberti define triângulos semelhantes como aqueles cujos ângulos são iguais e cujos lados têm alguma relação entre si. Se o comprimento de um lado, por exemplo, for o dobro do da base, todos os outros triângulos quer sejam maiores ou menores terão de ter esta mesma relação entre o comprimento desse lado e a base.

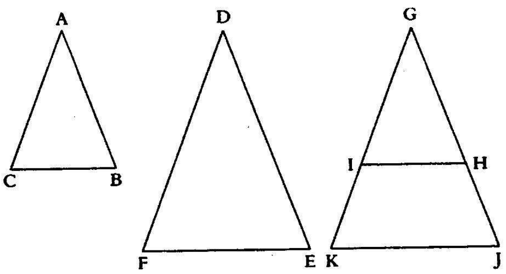


Figura 10. Triângulos semelhantes.

$$\overline{AB} \ ou \ \overline{AC} : \overline{BC} = \overline{DE} \ ou \ \overline{DF} : \overline{EF}$$

$$\overline{GH} \ ou \ \overline{GI} : \overline{HI} = \overline{GJ} \ ou \ \overline{GK} : \overline{JK}$$

O autor exemplifica enunciando algumas das célebres personagens da *Eneida* de Virgílio:

Um homem de estatura pequena será proporcional a outro muito alto pela medida do cotovelo; de tal forma que se empregue a mesma proporção de palmo e pé para medir todas as partes do corpo em Evandro que em Hércules, do qual disse Gelio que era de estatura magnata, uma vez que sobressaía entre todos. Não havia diferente proporção entre os membros de Hércules e entre os do gigante Anteo; e assim como em cada um destes correspondia a mão ao cotovelo, e o cotovelo à cabeça e aos outros membros com igual medida entre eles; o mesmo sucederá nos nossos triângulos, entre os quais haverá um certo género de medida, pela qual os pequenos correspondem aos grandes em tudo menos no tamanho.

Tendo em conta esta noção, Alberti refere que em relação à pirâmide visual, caso esta incida sobre superfícies proporcionais, a percepção será realizada através do mesmo número de raios, o que não sucede às que são díspares. Acrescenta ainda que as superfícies proporcionais à secção apresentam igual distância entre si, denominando-as assim por equidistantes.

Toda a secção da pirâmide visual, paralela à superfície que se observa, é igualmente proporcional à dita superfície.

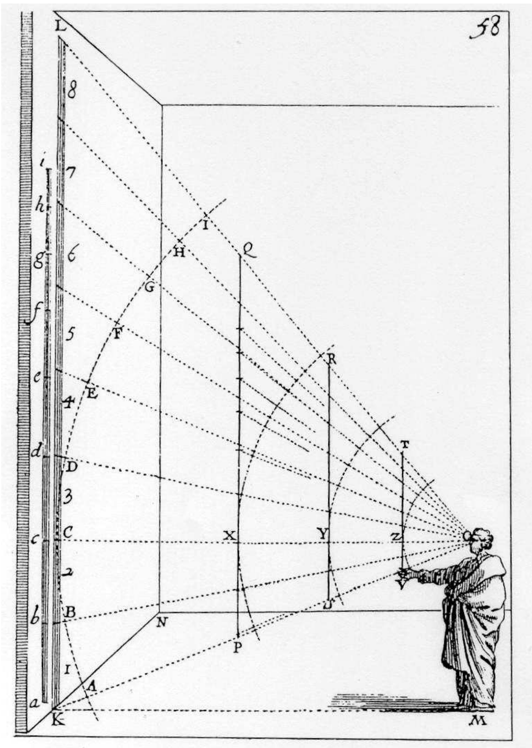


Figura 11. Intervalos proporcionais originados por intersecções paralelas na pirâmide visual.

5. Superfícies não equidistantes

Por vezes é necessário pintar superfícies que não são equidistantes; entre estas, existem algumas superfícies cujas linhas são colineares aos raios visuais e outras estão a igual distância destes.

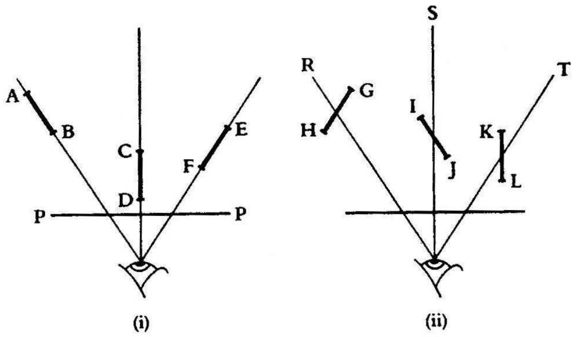


Figura 12. *Quantidades* colineares e equidistantes aos raios visuais.
i) AB, CD, EF são colineares a cada um dos respectivos raios onde se encontram.
ii) G e H, I e J, K e L, são equidistantes aos respectivos raios visuais R, S e T. GH é paralelo ao raio T, IJ é paralelo a R e KL é paralelo a S.

As *quantidades* colineares aos raios visuais como não formam nenhum triângulo, não são perceptíveis por todos os raios, assim não surgem na secção. No entanto, para as *quantidades* que estão a igual distância dos raios visuais, quanto mais obtuso for o maior ângulo da base do triângulo, menor será o número de raios que as atingem e, consequentemente, menos espaço terá a secção.

Alberti enriquece todo o raciocínio exposto com a opinião dos filósofos:

Se o céu, as estrelas, os mares e os montes, os animais e ultimamente todos os corpos se reduziram a metade do que são, não pareceriam que tivessem diminuído coisa alguma do tamanho que agora têm, porque a magnitude, pequenez, longitude, altura, profundidade, latitude, obscuridade, claridade e as outras coisas que se podem encontrar ou não em tudo, os filósofos chamam-lhes acidentes, que só os podemos conhecer exactamente por comparação.

Mais uma vez tal é exemplificado abordando as personagens criadas por Virgílio, segundo o qual Eneas teria os ombros mais altos que todos os homens, mas comparado com Polifemo parecer-se-ia com um pigmeu. Também são referidos alguns aspectos reais como, entre outros, a comparação entre o marfim e a prata que são de cor branca mas ao lado dos cisnes e das telas de linho já não parecem ser.

Neste livro reside a força da comparação, e somos alertados pela forma como a devemos fazer, utilizando sempre medidas conhecidas. Como disse Protágoras[10], o homem é *o modelo e a medida de todas as coisas*, portanto podemos conhecer os *acidentes* de todas as coisas comparando-as com os do homem.

Parte II

Alberti recupera o essencial da óptica medieval, ou seja, a conhecida *perspectiva naturalis,* para que a sua *perspectiva artificialis* se torne compreensível, como ele próprio esclarece:

Até aqui explicámos tudo o que diz respeito à força da visão e ao conhecimento da intersecção. Mas como é pertinente saber não só o que é a intersecção e em que consiste, mas também como se constrói, agora há que falar de como se representa esta intersecção ao pintar.

O estudo e a aplicação da teoria da visão ao problema da representação, proporcionou a criação da *construzione legittima* como um método fiável para conseguir o que, anteriormente, os artistas estavam a tentar realizar por meio de aproximações empíricas.

Nesta época predominavam os estudos de proporções e, consequentemente, era atribuído ao número um papel fundamental, fazendo com que os artistas recorressem a progressões numéricas conhecidas. Assim, muitos pintores utilizaram uma regra empírica baseada na redução automática de cada faixa do chão através de uma razão constante de dois terços. Segundo Panofsky, este método que reinava no *Trecento* era denominado por *pavimento*, o qual pode ser vislumbrado na *Anunciação* de Ambrogio Lorenzetti [11].

Figura 13. *A Anunciação* de Ambrogio Lorenzetti, Siena, 1344.

A importância deste quadro reside, essencialmente, no facto de pela primeira vez se encontrarem todas as ortogonais ao plano do quadro dirigidas para um ponto. A descoberta do ponto de fuga, enquanto *imagem dos pontos infinitamente distantes de todas as ortogonais,* constitui um caminho através do qual poderiam alcançar o infinito.

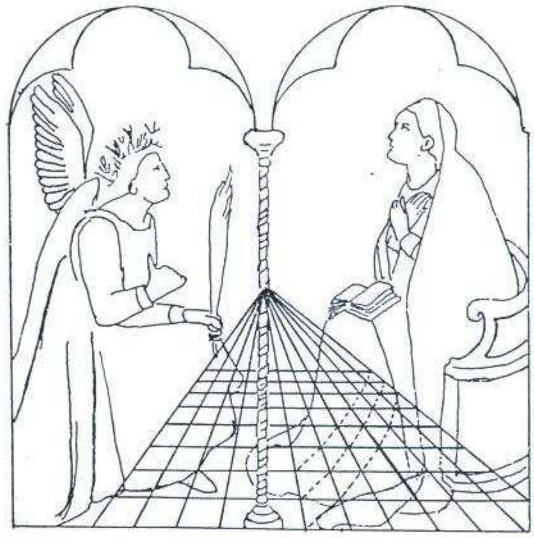


Figura 14. Esquema perspectivo da *Anunciação.*

Porém, este método é ainda arbitrário e inexacto – as transversais desenham-se empiricamente, a largura entre estas linhas é sempre igual a dois terços da largura da faixa imediatamente anterior. O pavimento obtido parece bastante convincente, mas se traçarmos as diagonais que atravessam os vários mosaicos, supostamente quadrados, fica-se com a impressão que estas convergem para o ponto central que deu origem às ortogonais. Colocando um plano vertical sobre cada uma dessas diagonais obtemos uma curva parabólica.

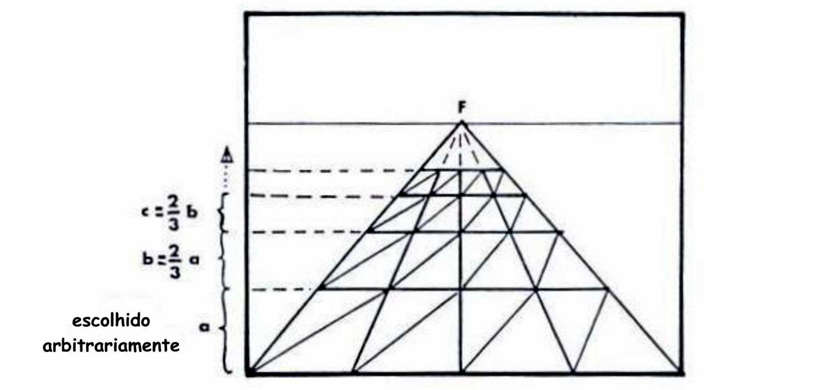


Figura 15. *A regra dos dois terços*.

Embora se tivessem tomado como ponto de partida os métodos do *Trecento* italiano, foi através desta via empírica que se chegou à correcta. As pinturas dos Lorenzetti tornaram-se progressivamente mais artificiais até surgir, por volta de 1435, a *construzione legittima*.

Os Lorenzetti tinham na sua época preservado o rigor da convergência matemática das ortogonais. Porém, não existia ainda um método suficientemente fiável de medição de distâncias em profundidade das chamadas linhas transversais, sobretudo das posições transversais contidas num *quadrado de fundo*, que começa no limite frontal do quadro.

Condenando absolutamente o processo em vigor, Alberti apresenta um método baseado na representação da pirâmide visual num alçado lateral. Considera o quadro uma janela – a *veduta* aberta sobre o mundo, onde o observador é activo na descoberta de informações que para lá da compreensão do real, nos permitem aceder ao conhecimento. Descreve então uma versão resumida da construção dita legítima, isto é, do traçado de mosaicos quadrados no chão, dispostos por detrás da abertura simulada pela moldura do quadro paralela à linha de terra.

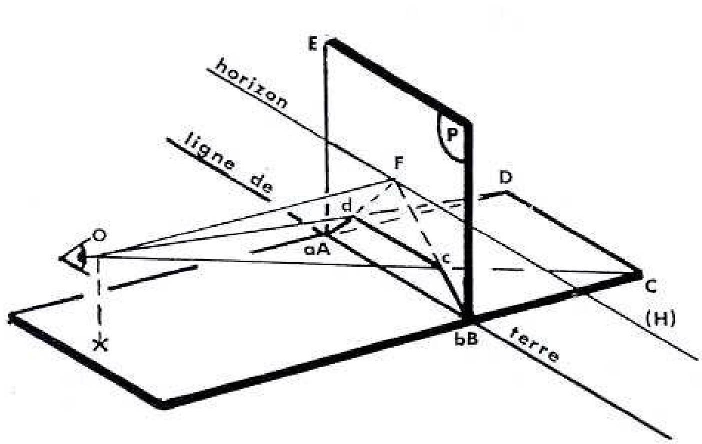


Figura 16. *O olho do pintor frente à janela aberta sobre o mundo.*

A figura anterior mostra-nos como se efectua a redução de um mosaico no chão. O ponto *O* representa o olho em frente ao quadro *P*. O método de Alberti consiste nas seguintes operações:

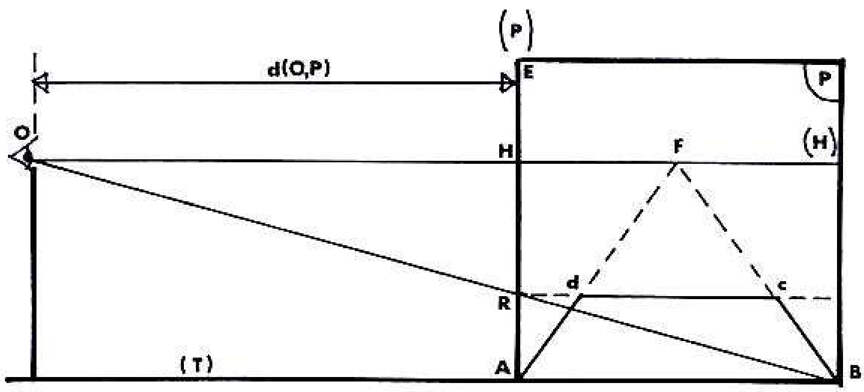


Figura 17. Desenho em perspectiva de um quadrado no chão, segundo o princípio de Alberti.

No plano do quadro, *F* é o ponto central (ponto de fuga principal). Um dos lados da moldura do quadro, *AE*, constitui uma vista de perfil do quadro. *O* é o ponto do olho nesta vista de perfil. O segmento *AE* faz a ligação e a articulação entre o plano do quadro e o ponto do olho. *AB* é o lado avançado do quadrado *ABCD*, lado que se confunde com a linha da terra (T). (*H*) indica o nível da linha do horizonte que passa pelo ponto *F* e *H* pertence a *AE*. A altura do olho é dada por $\overline{AH}$ e $\overline{OH}$ é a distância do olho ao quadro, dada por Alberti para colocar o ponto *O*. OB é um raio visual visto de perfil que une os pontos *O* e *C* ou quaisquer outros pontos de *CD*, lado traseiro do quadrado, visto $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. A intersecção deste raio visual com o plano *AE* (quadro), é o ponto R que indica o nível onde temos de colocar a imagem *cd* de *CD*. Uma simples linha a tracejado, paralela a *AB* e passando por *R*, intersectará os pontos *d* e *c*, as linhas de fuga *FA* e *FB* representam as ortogonais ao quadro. Sendo *FA* perpendicular a *AD* e *FB* perpendicular a *BC*.

A construção de uma pavimentação segundo o método de Alberti, faz-se utilizando os mesmos princípios após se ter dividido o segmento *AB* em partes iguais. Os raios provenientes de *O*, e vistos de perfil, determinam os níveis sucessivos de colocação das marcas por onde passam as linhas paralelas a *AB*. Mas vejamos concretamente os principais passos que este mestre executa – em primeiro lugar, o pintor cobre a maior parte do quadro com um rectângulo, a *veduta*. Decide qual o tamanho da figura humana que pretende pintar e, a partir da sua altura, obtém uma unidade de medida baseada no *braccio (*aproximadamente 58 cm*)*, uma vez que três *braccios* (3 × 58 =174 cm) equivale à altura de um homem.

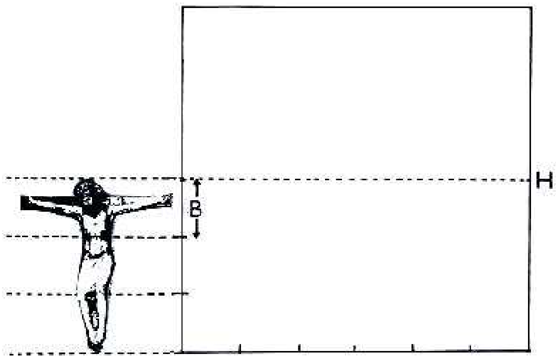


Figura 18.

Utilizando esta medida, divide a base do rectângulo em tantas partes quantas for possível. Seguidamente determina o ponto central ao nível do olho, que se encontra três módulos acima da base e une-o a cada uma das divisões efectuadas.

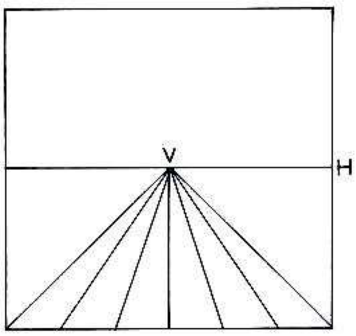


Figura 19.

Estas linhas convergentes são perpendiculares ao plano do quadro. V é o ponto de fuga que parece confundir-se com o ponto de vista, uma vez que estão sobrepostos num esquema visto de frente e ambos colocados na linha do horizonte H. O passo seguinte consiste em determinar de que modo se devem traçar as linhas transversais que serão paralelas ao plano pictórico. Numa folha à parte, desenha a mesma situação mas vista de perfil.

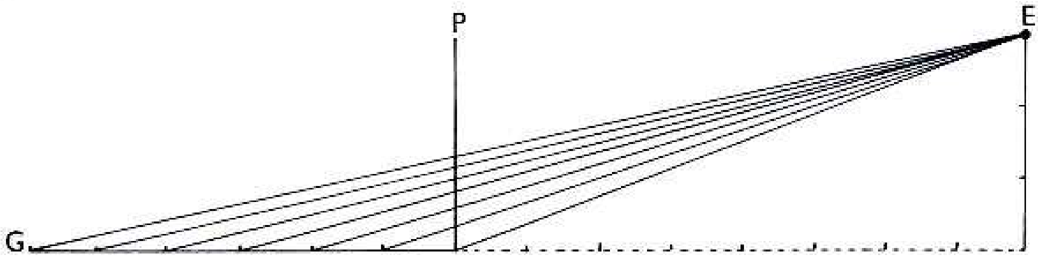


Figura 20. Desenho auxiliar (alçado da pirâmide visual fornecendo as distâncias transversais).

O ponto de vista E dista oito unidades do plano do quadro (segmento de recta P) e está colocado a uma altura de três *braccios* (a igual altura de V). De seguida, une o ponto E com cada uma das divisões efectuadas na figura 20. As intersecções com o plano do quadro definem as distâncias das linhas transversais que são transportadas para a figura inicial, permitindo traçar os segmentos transversais nas posições correctas.

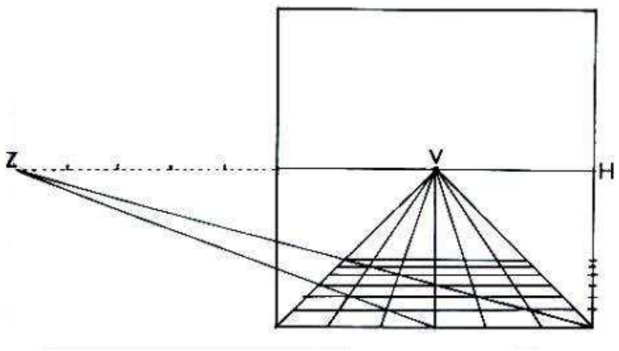


Figura 21.

Observando a figura, são visíveis as marcações à direita que permitiram desenhar as transversais. Finalmente, traça-se a diagonal para verificar a exactidão da representação.

Alberti finaliza o discurso que envolve esta construção dizendo:

Assim, os homens pintados na paralela seguinte serão menores que os que estão nas anteriores, o que a natureza demonstra manifestamente. Pois vemos que as cabeças dos homens que passeiam pelas igrejas igualam-se mais ou menos a uma mesma altura, enquanto que os pés de quem está mais distante parecem corresponder aos joelhos dos que estão mais à frente.

Não deveremos hesitar em atribuir ao nosso autor o mérito de ter conseguido conciliar um método abstracto e lógico com a utilização tradicional, facilitando assim a sua aplicação prática. O Renascimento conseguiu deste modo, racionalizar matematicamente uma imagem do espaço previamente unificado sob o ponto de vista estético. Os pintores dispunham agora de uma regra válida. Não tardaram a utilizá-la, como é o caso do fresco *A Natividade*, de Paolo Uccello [12] .

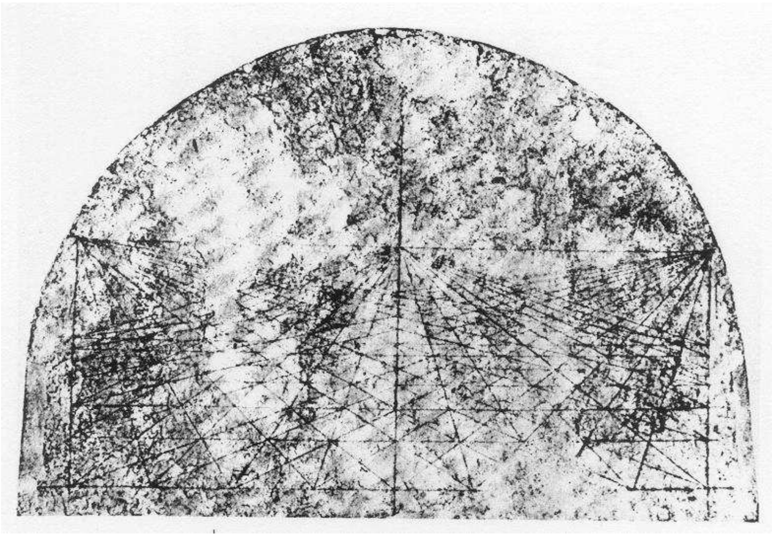


Figura 22. *A Natividade*, de Paolo Uccello , Florença, 1450.

Dado este fresco se encontrar bastante danificado, vejamos um esboço do desenho que é invisível no original.

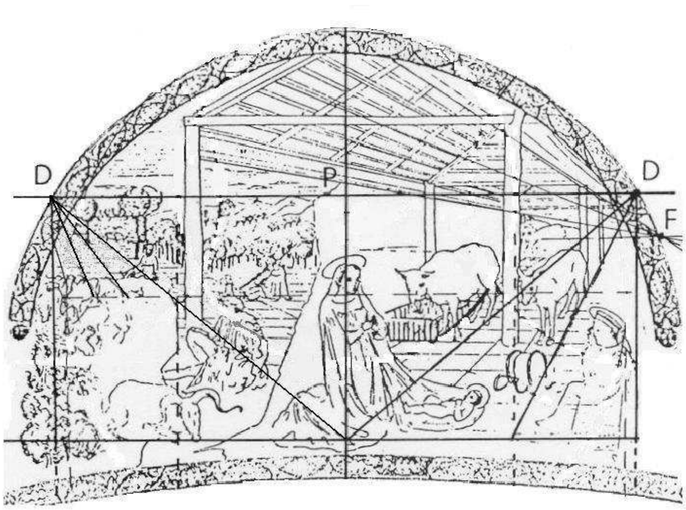


Figura 23. Desenho e esquema perspectivo da *Natividade* de Uccello.

Verifiquemos na figura da página seguinte, as etapas de construção do pavimento da *Natividade* – uma das várias obras de Uccello onde foram aplicadas as regras da perspectiva transmitidas por Alberti. A obsessão de Uccello por este método albertiano de representação foi tal, que chegou a ser motivo de gracejo junto dos seus amigos. Vasari nas suas *Vites*, conta-nos que Donatello tinha por hábito dizer-lhe: *«Eh, Paolo, esquece a tua perspectiva e troca o certo pelo incerto»*[13].

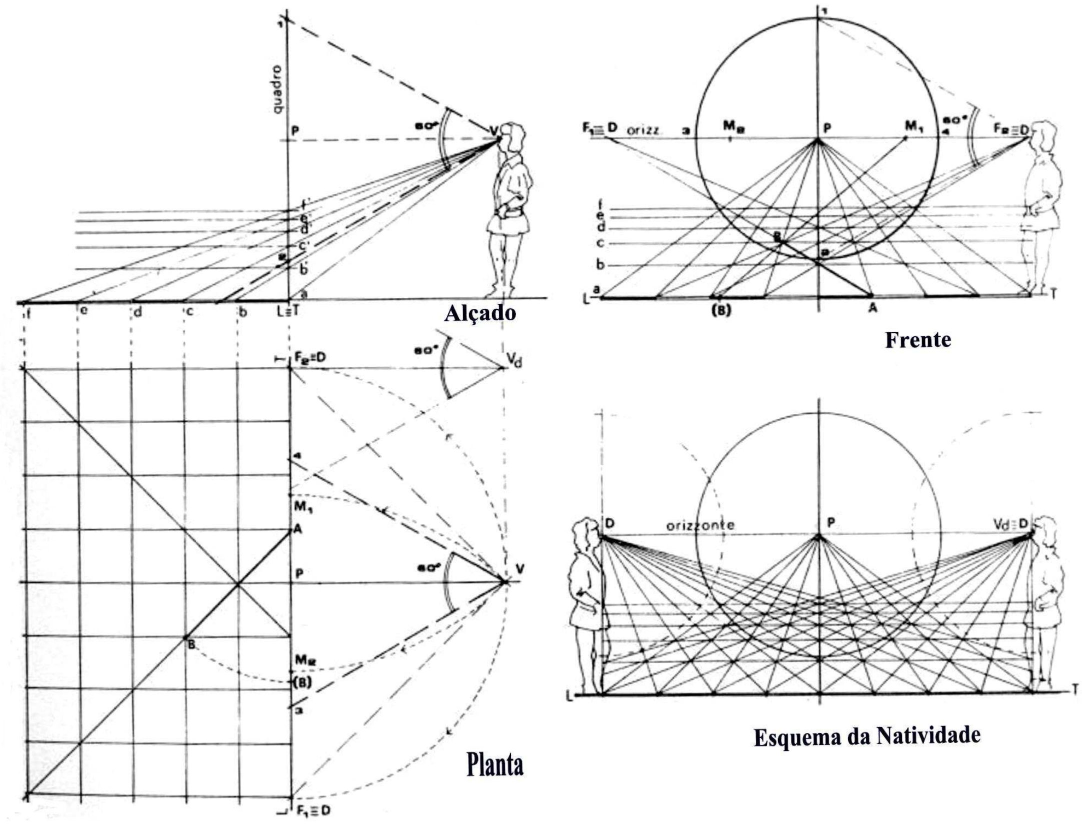


Figura 24. Etapas de construção do pavimento na *Natividade* de Uccello.

Assim, talvez nos deixe de causar surpresa a resposta de Paolo Uccello, a um pedido da sua esposa para que fosse finalmente deitar-se: *«Oh, che dolce cosa è questa prospettiva!»*[14]. Nada mais poderemos fazer senão tentar imaginar o que terá significado esta invenção na época.

Notas

[1] Citado por Wright, *Tratado de Perspectiva*, versão castelhana de Francisco Martin, Editorial Stylos, 1985, p. 78.

[2] Refere-se talvez a pensadores como Alhazen, que no seu *De aspectibus* defende a percepção do olho como a captação angular das imagens através da *pirâmide visual*, cujo vértice situava--se na pupila. Esta era a ideia fundamental da teoria da visão medieval.

[3] Alguns autores atribuem esta divisão de raios visuais a Galeno, uma vez que consta da sua obra *De usu partium*, X, 12.

[4] Na obra referida, Alhazen atribui muita importância ao raio cêntrico, também este fundamental para a concepção albertiana, uma vez que da intersecção deste raio com a pirâmide visual resulta um ponto que permite determinar a altura do horizonte e do ângulo, a partir do qual a pintura é vista e representada.

[5] Estes quatro géneros de cores constituem as quatro cores básicas, o que está de acordo com a prática existente na Antiguidade. Segundo Plínio, e também segundo os antagonistas de Aristóteles – Platão, Demócrito e Empédocles, estas quatro cores correspondem aos quatro elementos da natureza. Alguns autores consideram que neste domínio Alberti terá sido influenciado pelo comentário de Galeno sobre *De humoribus* de Hipócrates, o qual lhe terá sido dado a conhecer pelo seu amigo Paolo del Pozzo Toscanelli. Paolo nasceu em Florença no ano 1397 embora tenha estudado na Universidade de Pádua, foi astrónomo, matemático, médico e geógrafo. Morreu em 1482.

[6] As sombras têm sido motivo de estudo da Geometria Projectiva. Esta geometria considera que as sombras são produzidas por um único foco de luz, um ponto geométrico, que pode estar pouco afastado, como o caso de uma vela, ou a grande distância, como o caso do sol. Este ponto pode ser próprio ou impróprio consoante a distância a que se encontra, assim a luz de uma vela é um ponto próprio e a do sol impróprio. Por isso, a teoria das sombras de foco próprio confunde-se com a da perspectiva: ambas são projecções centrais. Obviamente que Alberti não conhecia esta geometria, uma vez que só foi criada por Desargues no século XVII, no entanto é bastante correcta a noção que tem desta teoria.

[7] O autor desta gravura é o holandês Samuel van Hoogstraeten e consta da sua obra *Inleyding tot de hooge schoole (...)*, publicada em 1678. Trata-se de um teatro de sombras, no qual se veêm a fonte de luz, os actores e suas sombras projectadas na tela do cenário. Apenas por curiosidade, devemos acrescentar a análise feita por Javier Navarro de Zuvillaga, que consta das *Imágenes de la Perspectiva*, p. 456: «*Se observarmos atentamente a gravura, verificamos que a caverna representada é a de Hefesto na ilha de Lemnos, na qual o deus do fogo trabalha na sua bigorna e é flanqueado talvez por Heracles e Sileno, que parecem ter acudido Dionísio, que baila entre as pernas de Heracles. Encontramos ainda dois sátiros, dois cúpidos suspensos no ar e junto à tela, Ares com uma cabra. O mais interessante é que Hefesto é o deus da luz e do fogo e neste desenho a luz do fogo arrasta sobre a tela as sombra de deuses e de heróis que aparecem nas tragédias gregas. Assim a caverna destes deuses assemelha-se ao mito platónico, este desenho poderia ter sido realizado para ilustrar o "mito da caverna" de Platão.*» Sendo a formação de Alberti clássica, e referindo constantemente ao longo deste tratado os antigos filósofos, pareceu--nos adequada esta figura para ilustrar as sombras produzidas pela luz artificial.

[8] Alberti utiliza posteriormente, a designação *equidistante* para se referir a objectos ou superfícies que estão num plano perpendicular aos raios visuais e paralelos à superfície pintada.

[9] Posteriormente refere-se aos objectos ou superfícies colineares como sendo aqueles que estão em linha com os raios visíveis.

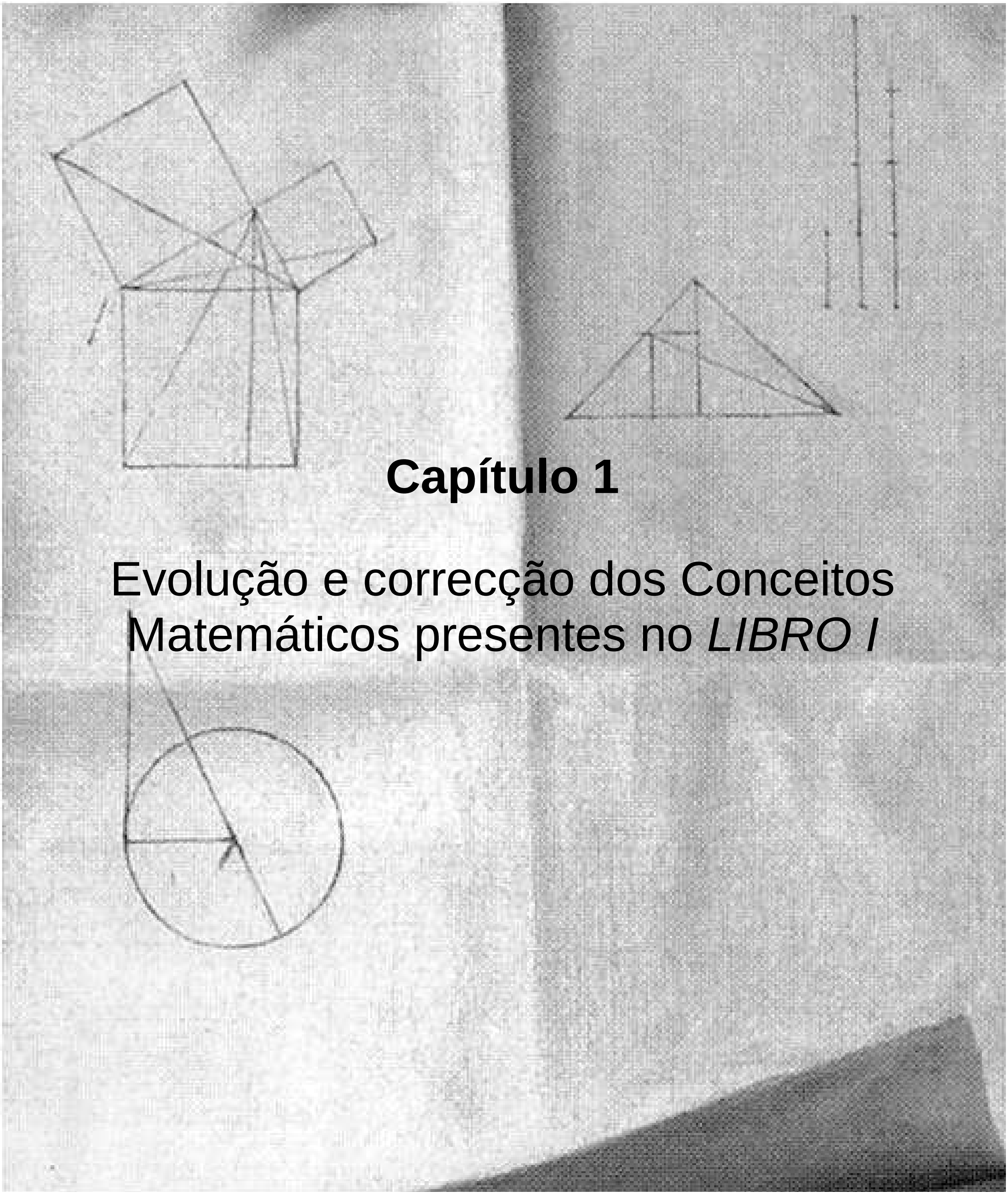
[10] É considerado o primeiro e o principal representante da sofística grega do século V a.C.. Os seus dados biográficos são escassos, no entanto sabemos que nasceu em Abdera pouco depois de 490 a.C.. O pensamento de Protágoras é de difícil reconstrução, os textos directos e fidedignos são escassos e desligados do contexto em que se encontram, mesmo a célebre teoria do *homo-mensura*, conhecida pelo fragmento: *o homem é a medida de todas as coisas*. Esta citação é muito utilizada por Alberti que, segundo Rocio de la Villa, a conheceu através de Diógenes Laércio na sua *Colecção de vidas e opiniões de filósofos*. Diógenes foi um historiador e folósofo ateniense que viveu durante o século III d.C.. A referida obra é das mais importantes que chegou aos nosso dias sobre a história da filosofia grega.

[11] (1290-1348)

[12] (1397-1475)

[13] Vasari, *Les vies des meilleurs peintres, sculpteurs et architectes,* vol. 3, edition commentée sous la direction d’André Chastel, Arts: Berger-Levrault, 1983, p. 106.

[14] *Ibidem*, p. 117.



Capítulo 1

Evolução e correcção dos Conceitos Matemáticos presentes no *LIBRO I*

Primeiro o ponto, depois a linha, a seguir a superfície... Eis uma sequência sobejamente familiar. Não há dúvida que os parágrafos que encetam este livro de pintura recordam aquela obra que imortalizou um conhecido geómetra de Alexandria. Os *Elementos* traduzem «para latim e para algumas outras línguas, o título utilizado por Euclides e, sem dúvida antes dele, por Hipócrates de Quio [1], tem origem nas letras l, m, n, tal como o alfabeto recita ou soletra as primeiras letras gregas: alfa, beta, ou como o solfejo canta as notas: sol, fá; isto porque o título autêntico *Stoicheia* significa de facto as letras, precisamente entendidas como elementos da sílaba ou da palavra» [2]. Foi nesta gramática da geometria que Leon Battista Alberti, recolheu o precioso néctar para a composição do primeiro livro deste tratado.[3] Mas a índole didáctica que o nosso autor incutiu a esta obra afastou-o dos enunciados euclidianos, abdicando assim de uma linguagem rigorosa e de conhecimentos matemáticos profundos, para que tudo se tornasse acessível aos pintores renascentistas:

«(...) Em primeiro lugar, para que o nosso discurso seja mais claro, tomaremos dos matemáticos o que nos pareça mais pertinente. Uma vez entendido, passaremos a explicar a pintura até onde nos permita o talento, partindo dos mesmos princípios da natureza. Mas, em todo o nosso discurso, quero que se advirta que falo destas coisas não como matemático, mas sim como pintor. Os matemáticos medem as figuras e as formas das coisas só com engenho, separadas de toda a matéria. Mas, como queremos tratar do aspecto das coisas, para pintá-las, escreveremos, como se se dissesse, com a evidência de Minerva. E nos parecerá ter conseguido o nosso propósito se os nossos leitores compreenderem este difícil tema (...). Assim pois, rogo que o nosso escrito seja interpretado não como um trabalho de um matemático puro, mas sim como de um pintor.» [4]

De facto, Alberti retirou o essencial de uma obra que reúne o conhecimento matemático adquirido até ao reinado de Ptolomeu I – o mais hábil de todos os generais de Alexandre, o Grande – substituindo-o após a sua morte. Nesse ano, em 323 a.C., «o império dividia-se entre os seus diádocos [5]. As cortes dos novos reinos, em que se encontram e fundem a civilização grega e as do Oriente, oferecem um novo ambiente propício ao florescimento das artes e ciências. Surgem centros notáveis de cultura em Alexandria, Pérgamo, Rodes; enquanto a cultura siciliana esplende ainda em Siracusa. Todavia Alexandria é, para essas cidades, o farol da ciência, onde os estudiosos procuravam a orientação dos mestres célebres e as obras são recolhidas na Grande Biblioteca; aos doutos alexandrinos os cientistas estrangeiros comunicavam as suas descobertas importantes e viam neles, por assim dizer, os depositários da tradição científica. O fruto do movimento crítico do IV século foi recolhido por Euclides que, em Alexandria, pelo ano 300 a.C., escreveu os seus famosos *Elementos*: livro clássico, que oferece uma ordem de exposição quase perfeita e revela belezas e finuras maravilhosas, tido como modelo de tratado geométrico ao longo dos séculos até aos nossos dias.» [6] Por volta deste ano, a Universidade de Alexandria abriu então as suas portas – nela germinaram as ciências matemáticas e dela brotaram verdadeiros génios imortalizados pelo contributo doado a esta ciência. «Naquele tempo, o mundo tal como se apresenta, enche-se de conhecimento, da mesma maneira que se diz que os céus cantam a glória de Deus.» [7]

O papel desempenhado pela matemática nesta época foi preponderante, aqueles que pretendiam ser cultos estudavam um conjunto de quatro disciplinas: aritmética (ou números em repouso), geometria (ou grandezas em repouso), música (ou números em movimento) e astronomia (ou grandezas em movimento). Este leque de disciplinas formava o *quadrivium*, o qual é atribuído por alguns autores, a Arquitas [8] pela considerável atenção que dedicou à matemática junto do aprendizado. Esta formação expandiu-se ao longo do tempo. Alberti mesmo sendo humanista e tendo-se debruçado sobre as obras dos autores clássicos, apresenta no seu *curriculum* de *studia humanitatis*, as sete artes liberais da cultura medieval. Para além da lógica, gramática e poesia, que formavam o chamado *trivium*, atribuído por Aristóteles [9] a Zeno [10], as próprias escolas consideravam imprescindível as disciplinas que constituíam o *quadrivium*. Estas quatro artes matemáticas serviram de inspiração a alguns artistas. O detalhe do *Triunfo de S. Tomás de Aquino*, datado de 1365, presente na Igreja de Santa Maria Novella em Florença, da autoria de Andrea di Bounaiuto é um exímio exemplar dessa inspiração – curiosamente esta igreja foi reconstruída por Alberti entre 1448 e 1470.

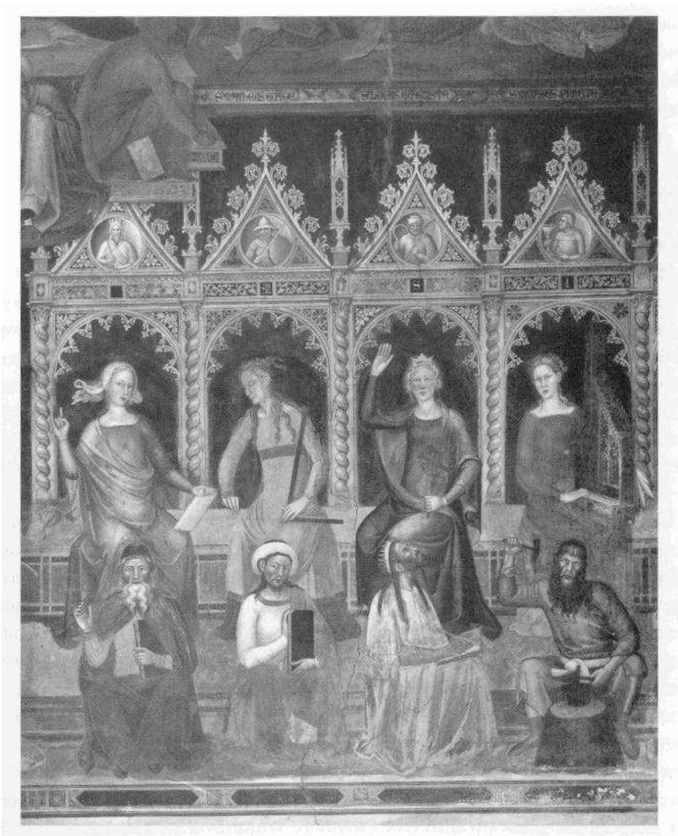


Figura 1.1. Detalhe do *Triunfo de S. Tomás de Aquino* de Andrea di Buonaiuto, 1365.

Neste fresco, as quatro figuras femininas simbolizam as quatro artes matemáticas, tendo aos seus pés os responsáveis que as tornaram célebres. À esquerda temos a Aritmética com Pitágoras, a seguir a Geometria com Euclides depois a Astronomia com Ptolomeu e finalmente a Música com Tubal Cain.

O estilo didáctico que Alberti adopta, procurando tornar acessíveis as noções que pretende transmitir, conduzem-no a algumas incorrecções matemáticas devido à linguagem utilizada. Ao longo deste capítulo iremos corrigir matematicamente todos esses aspectos e vendo resumidamente as definições que assumiram ao longo da história.

1. Ponto, recta e plano

Remontemos aos pitagóricos. Muitos são os séculos que nos separam destes pioneiros da aritmética, em que o número assumia uma predilecção. A paixão desenvolvida em torno deste objecto dilecto gerou o lema desta escola: *tudo é número*. Daí as frequentes associações numéricas a tudo o que os rodeava, desde os movimentos nos céus até ao valor dos seus escravos. Os idosos pitagóricos consideravam que a estrutura da realidade espacial era um reflexo da natureza discreta da série dos números. A mónade, correspondia à nossa actual unidade, no entanto se fosse transferida para o espaço identificava-se com um ponto. Do mesmo modo, a linha era análoga à diade, a superfície à triade e o sólido à tetrade. Defendiam ainda que o ponto gerava as dimensões: dois pontos determinam uma recta de dimensão um; três pontos não colineares definem um triângulo com área de dimensão dois, e quatro pontos não complanares determinam um tetraedro com volume de dimensão três – tal como Aristóteles refere, o sólido fica completo com o número três.

Um dos que muito contribuiu para esta discussão foi Platão[11], que apesar de ser considerado por alguns como um pensador profundo, para outros representava o *flautista de Hamerlin* da matemática, dada a sedução que este exercia sobre os homens para que abandonassem os problemas do trabalho a fim de se dedicarem a especulações tidas então como inúteis. Porém, devemos salientar que a Academia Platónica se tornou o centro matemático do mundo e nessa escola se formaram os principais mestres do século IV a.C.. As suas obras constituem um contributo fundamental para a evolução dos conceitos matemáticos, «se analisarmos detalhadamente a parte essencial da obra matemática de Platão, reconhecemos, que de facto deu um forte impulso à ciência, não só recomendando incessantemente a cultura das ciências exactas, mas tratando, nos seus escritos filosóficos, de múltiplos exemplos de questões matemáticas, e sugerindo aos geómetras a conveniência de fundamentarem as demonstrações com a exposição de uma série de definições, postulados e axiomas cuidadosamente coordenados»[12].

Nos diálogos de *Parménides*, Platão menciona que um ponto não tem partes, referindo-se ao Uno como isento de partes, dada a sua carência de princípio, meio e fim[13]. Esta ideia deriva da concepção atomista da matéria – para os Gregos os átomos eram considerados como partículas indivisíveis. Porém, o que hoje designamos por átomo não é indivisível, pois conhecemos os seus componentes clássicos: protões, neutrões e electrões, e sem eles não existiria a energia atómica. Assim sendo, não é correcto fundamentarmos a nossa concepção matemática de ponto em partículas materiais; porém a definição platónica, que viria a permanecer durante séculos, não é esclarecedora quanto à sua natureza.

«O céu nocturno ostenta, como se verifica, um conjunto de pontos; átomos, elementos pontuais das coisas, apresentam-se com frequência como letras ou algarismos, inanalisáveis e para combinar.»[14] É desta combinação de pontos que nasce a linha, essa estrutura unidimensional que, segundo Platão, encontra na recta a sua principal espécie. Considerada como o símbolo do inflexível, invariável, incorruptível e contínuo, este filósofo grego define a recta como sendo «*aquela cujo meio barra o caminho de ambas as extremidades*»[15], exemplificando-a através do eclipse do sol: à medida que este decorre, a lua desloca-se até ficar entre o observador e o sol, de tal modo que o observador deixa de o ver por este ficar totalmente coberto pela lua; assim, o observador, a lua e o sol encontram-se em linha recta.

Em a *República*, talvez a sua obra mais conhecida, Platão aborda e apresenta as superfícies como elemento de estudo da geometria, enquanto que na estereometria, dado esta se ocupar da terceira dimensão, e consequentemente do estudo dos sólidos, os termos superfície e plano são apresentados como sinónimos [16]. Porém, o termo grego *`επια΄νεια* utilizado por este filósofo para se referir a superfície é traduzido como *aparecimento súbito à luz*, relembrando o significado do vocábulo pitagórico criado para este efeito – cor.

Alguns pensadores da época defendiam que um plano era uma superfície *esticada* na sua totalidade, embora outros o considerassem como a menor de todas as superfícies com as mesmas extremidades.

Por seu lado, Aristóteles, exímio pensador, não podia ficar indiferente a esta questão. Contestando a definição platónica de *ponto*, pelo seu carácter pouco científico, considera a mónade pitagórica como uma *ficção geométrica*. Já a linha é definida como sendo uma magnitude divisível apenas de um único modo, acrescentando em *De anima* que a *«linha é produzida pelo deslocamento de um ponto»*[17]. Proclo[18], conhecido pelos seus comentários, considera que esta definição mostra a essência da linha, comparando-a com o *fluxo de um ponto*, ou seja, a linha seria uma espécie de *caminho* gerado pelo deslocamento de um ponto. Esta concepção aristotélica, defendendo a geração de linhas a partir do movimento, também se adapta às superfícies, as quais, segundo o estagirita, podem nascer do deslocamento de uma linha, sendo ainda consideradas como o limite de um corpo.

Seguindo os passos dos filósofos, desabrocha a já mencionada Bíblia da geometria compilada por Euclides de Alexandria. O primeiro livro dos *Elementos* inicia-se com vinte e três definições, onde consta esta conhecida sequência, antecedendo os célebres axiomas e postulados – «como se se tratasse de uma gramática vulgar: primeiro a morfologia, depois a sintaxe. Retenhamos sobretudo a sintaxe e aqui temos um sistema cujo rigor e pureza formal provocaram a admiração dos seus sacerdotes durante quase dois milénios. Por isso, leram e releram Euclides sem hesitações e com toda a razão»[19].

A *morfologia* desta obra pode ser construída imaginariamente através da união de várias bolas fechadas, em que marcamos um ponto no seu interior e desenhamos tantas linhas quantas forem possíveis entre esses pontos, obtendo assim uma rede conexa. Deste modo, «as Definições de Euclides formam uma rede bem unida, que pode ser construída e desenhada. Observemos, finalmente, que, para a construir, apenas tivemos necessidade de três palavras presentes no próprio texto: *ορος* ou *περας*, o limite (plano), *σημειον*, o ponto, e *γραμμη*, a linha»[20].

Comecemos pela *bola* que define ponto; à semelhança de Platão, o enunciado euclidiano menciona que *não tem partes ou não tem grandeza alguma*. Já para a linha segue Aristóteles, referindo num sentido abrangente que se trata de *um comprimento sem largura*, e num sentido mais específico define linha recta como *aquela que está posta igualmente entre as suas extremidades*, as quais, como não podia deixar de ser, são pontos. No entanto, é notório que este conceito é entendido no sentido de segmento de recta, uma vez que uma linha recta não tem extremidades. Para a superfície, o geómetra alexandrino afirma directamente: *é o que tem comprimento e largura*, sendo plana quando sobre ela *assenta toda a linha recta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície*. Esta parece ser uma definição original, pois não encontrámos nos seus antepassados nenhuma que pudesse servir de raiz.

Não há dúvida que os enunciados albertianos se aproximam consideravelmente das definições mencionadas por Euclides. Em relação ao ponto, a principal diferença reside no facto de ser considerado como um *sinal*, algo visível pelo olho. É impressionante o papel atribuído pelo nosso autor ao órgão da visão ao longo de todo o livro.

Para além do ponto, a linha também é referida como um *sinal*, originada pela união de pontos; Alberti aperfeiçoa esta elucidação, acrescentando que apenas o comprimento pode ser dividido, visto a largura ser demasiado *ténue*.

Detectamos a primeira diferença significativa na sequência de definições dadas pelo nosso autor em relação a Euclides, quando classifica a linha em recta como sendo *estendida* directamente de um ponto a outro; ou em curva, quando resulta da união de dois pontos por meio de um arco. Por outro lado, se as linhas são geradas pela combinação de pontos, as superfícies resultam de uma combinação de linhas, o conceito é aprimorado quando recorre ao mestre Euclides, referindo que *uma superfície tem comprimento, largura mas não profundidade*. Alberti, dando uso aos seus instrumentos artísticos, avalia uma superfície plana colocando sobre ela uma régua – se esta tocar todas as suas partes de igual modo a superfície será obviamente plana, caso contrário seria necessário deformar a régua. Devemos realçar a nossa discordância em considerar as palavras proferidas pelo sacerdote genovês como definições, na verdade constituem meras explicações procurando elucidar de um modo simples conceitos matemáticos que se adivinham complexos, para o público a quem se destina esta obra.

Mas esta concepção albertiana, defensora da origem de superfícies a partir da união de linhas, também foi motivo de interesse por parte de August Leopold Crelle [21], um engenheiro alemão que depois de se doutorar em Heidelberga, trabalhou no Ministério da Educação do seu país como especialista das Matemáticas e sobretudo, no seu ensino. Nas discussões intelectuais que decorreram no século XIX, Crelle partilha com Joseph Fourier [22] a sua definição de plano – considerando-o assim como sendo formado por uma adjunção de linhas rectas que passam por um ponto de uma recta do espaço, de tal modo que todas as rectas agregadas são perpendiculares àquela recta. Esta definição apresentada por Crelle consiste numa adaptação da quinta proposição do Livro XI dos *Elementos*: *se uma linha recta for perpendicular a outras três no ponto em que estas se cortam reciprocamente, estas três rectas existirão no mesmo plano*. No entanto, acabou por confessar a sua incapacidade em deduzir as propriedades necessárias para a demonstração, substituindo aquela definição pela seguinte: «*um plano é uma superfície contendo completamente o comprimento de todas as linhas rectas que passam por um ponto fixo e intersectam uma linha recta do espaço*» [23].

No desfecho do século XIX a geometria nascida «do cânone da régua ou do compasso»[24], foi reconstruída por David Hilbert [25] que «por intermédio de objectos ideais propunha, por troça, chamar indiferentemente mesa, copo ou garrafa, estando, na realidade a criticar aquilo que, em Euclides, tem um sentido ou sentidos. E, eliminando-o, chegava à Geometria, àquela que consideramos a partir de então como tal.» [26] Estas ideias irónicas, mas inovadoras germinadas à ombreira do século vinte, preenchem as páginas de um singelo volume publicado em 1899, *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria). As palavras que o encetam, citadas da obra do seu compatriota Immanuel Kant, espelham as intenções que o autor manifesta no seu desenrolar:

«Todo o conhecimento humano começa com intuições, passa a conceitos e termina com ideias.» [27]

Este texto de Hilbert preenche algumas lacunas detectadas pela análise crítica dos *Elementos*, contribuindo para o progresso da geometria. O esforço realizado nesta área da matemática permitiu-lhe adquirir um carácter puramente formal, à semelhança do já alcançado pela Álgebra e Análise. Este matemático da era moderna, percebeu que nem todos os termos matemáticos podiam ser definidos, reconheceu a necessidade de considerarmos alguns deles, no caso ponto, recta e plano, como primitivos, aceitando-os sem definição. Não nos interessa a natureza desses objectos, mas sim como eles se relacionam entre si.

«Hilbert marca o fim de uma história do sentido, escrito por Euclides em determinado momento do seu discurso. Podemos, assim, assumir o direito de analisar o sentido dos termos euclidianos, pondo de lado deduções, sistema e sintaxe como fizeram os geómetras e filósofos gregos.» [28] Mas atendendo ao singular contributo que são os *Elementos*, perpetuemo-los à semelhança de Proclo, recuperando assim justamente «um fio esquecido da história, abandonado pela Geometria pura e abstracta nos caixotes do lixo para onde Hilbert atirou copos e garrafas»[29].

2. O círculo

Desde a remota Antiguidade que o círculo, à semelhança da esfera, simboliza a totalidade, a perfeição e a plenitude. Os babilónios utilizavam-no para medir o tempo, dividiram-no em 360º, decomposto em seis segmentos de 60º; o seu nome *shar*, designava o Universo, o Cosmos. Defendiam o céu como uma abóbada sólida e a superfície terrestre, flutuando no Oceano, era concebida como plana e circular, localizando-se no seu centro os continentes. A especulação religiosa babilónia daí extraiu mais tarde, a noção de tempo infinito, cíclico e universal, que foi transmitida da Antiguidade à época grega, por exemplo, através da imagem da serpente mordendo a própria cauda. No entanto, não é apenas o círculo que apresenta um simbolismo, também o centro e a sua fronteira, a circunferência, estão associados a certas representações.

Kentrôn, o centro do círculo, simboliza todo o princípio, o real absoluto – Deus. É nele que se condensam e coexistem as forças opostas, é o lugar onde há a maior concentração de energia. Isso não significa que o centro seja estático, ao contrário, deve ser considerado como o foco de onde parte o movimento da unidade para a multiplicidade, do interior para o exterior, do eterno para o temporal. Simboliza a perfeição, a homogeneidade, a ausência de distinção ou de divisão. Já a circunferência está associada à sucessão evolutiva e ao movimento, por isso, o movimento circular é considerado perfeito, imutável, sem começo ou final.

Recordemos os assuntos debatidos na ágora pública, os quais «emanam duma assembleia circular, aquele que declama coloca-se no centro, sobre a circunferência, eis os receptores em posição de igualdade. No fim do seu discurso, o orador do centro desloca-se para o bordo, e quem quer falar passa do bordo para o centro: liberdade de movimento e de expressão, diz-se.» [30]

Por outro lado, os modelos hierárquicos que imperaram séculos a fio, exibindo o rei no vértice, dominando os que o rodeiam e esmagando o povo submisso, também disfarçam esta representação:

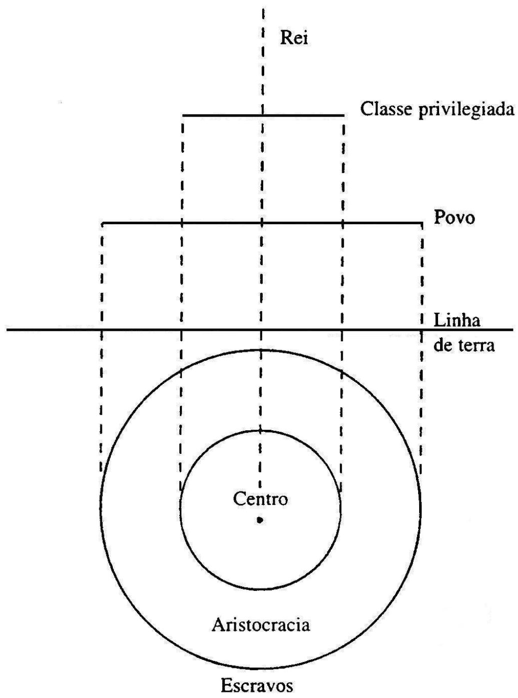


Figura 1.2.

«Colocai-vos em círculo para melhor admirar o seu centro, virais exactamente as costas àqueles que, excluídos, ficam no exterior. A representação reduzida mostra o ponto central como intersecção sobre o plano da segunda projecção, do eixo vertical ao longo do qual o poder se qualifica, na primeira. Viver no centro ou acima, ser excluído no exterior ou estar a baixo, eis uma e a mesma coisa. (…) De pé e observando, de frente, estes objectos de pé, ninguém vê o mundo nem a sociedade como os veria sobrevoando do alto.» [31] Porém, e *crendo na democracia*, esses privilegiados que envolvem calorosamente o rei são descobertos graças à lei da transformação projectiva.

Retomemos outras discussões, desta vez as da célebre Academia helénica, onde os homens dedicados ao pensamento também apresentaram o seu contributo para a definição desta figura repleta de plenitude.

De acordo com Platão, o círculo *«é uma figura cujas extremidades estão todas a igual distância do centro»* [32]. Por seu lado, Aristóteles em *De Caelo*, refere-se apenas a uma figura circular plana limitada por uma linha, não lhe atribuindo qualquer designação. Claramente influenciado pelas concepções filosóficas, Euclides considera que um círculo *é uma figura plana contida por uma linha tal que todos os segmentos com extremidades nessa linha e num ponto contido na figura são iguais. Este ponto chama-se centro do círculo.*

Não há dúvidas que Platão, Aristóteles e Euclides definem circunferência e não círculo, uma vez que círculo é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância ao centro é inferior ou igual ao comprimento do seu raio. Quando esta distância for igual ao raio então o conjunto de pontos que obtemos não definem um círculo, mas sim uma circunferência.

No *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos* redigido por Proclo, é sublinhado que a homogeneidade do círculo juntamente com a sua identidade própria, superam todas as outras figuras planas, à semelhança do que acontecia na Antiguidade. Para este comentador existem pontos fundamentais num círculo: os pólos e o centro. Os primeiros acham-se fora da figura enquanto que o centro se situa no seu interior, de modo que se imaginarmos os ponteiros de um relógio colocados no centro de um círculo e as suas extremidades num pólo, todas as linhas desenhadas a partir desse ponto, que se encontram na circunferência, são iguais entre si. Defende ainda, e contradizendo a definição euclidiana, que a circunferência não faz parte do círculo.

Para o mecanicista Herão de Alexandria [33], o círculo é uma figura gerada por uma linha recta que se desloca em torno de um dos seus extremos, permanecendo o outro fixo.

Já em pleno Renascimento, Leon Battista Alberti refere no seu livrinho de pintura que uma linha circular é *aquela que abraça e contém em si todo o espaço do círculo*, sendo este uma superfície circundada por uma linha formando uma coroa. A crítica que fazemos a esta definição segue as anteriores, pois estas palavras oferecem uma definição aos pintores, mas não aos matemáticos. Do raciocínio apresentado, concluímos que para Alberti uma linha circular é o mesmo que uma coroa, ambas se referem à circunferência. Podemos até aceitar *linha circular*, porém *coroa* não nos parece minimamente adequado a julgar pelo que hoje designamos por coroa – *uma figura formada por dois círculos concêntricos*.

O símbolo da estabilidade também marca presença no *livro todo matemático* de Alberti, mencionando o diâmetro de um círculo como uma recta que passa pelo centro dividindo a coroa em duas partes iguais.

A origem do termo *diâmetro* deriva da união de dois vocábulos gregos, *diá*, que significa "através de" ou "de um lado ao outro" e *métron*, "medida". Unindo-as resulta, *diámetros*, a medida entre "lados opostos", sendo mais correcto dizer neste caso, medida entre pontos opostos.

Aristóteles refere numa das suas obras que as coisas diametralmente situadas no espaço estão à máxima distância. Por seu lado, Euclides define diâmetro do círculo como sendo *uma linha recta que passa pelo centro do círculo terminando na sua circunferência, bissectando-o*. É curioso que nesta definição, o geómetra alexandrino faça referência à circunferência sem previamente a definir, contudo tratar-se-ia de um conceito que lhe seria familiar.

Segundo Proclo, foi Tales [34] o primeiro a demonstrar que um círculo é bissectado pelo diâmetro. Esta bissecção deve-se ao *movimento firme* de uma recta que se desloca a partir de um ponto da circunferência, passando pelo centro e atingindo outro ponto da mesma, oposto ao primeiro (pólos). Para o demonstrarmos matematicamente, Proclo diz que apenas teremos de desenhar um diâmetro, unindo dois pontos opostos da circunferência, e se não obtivermos dois semicírculos iguais então traçamos outro diâmetro, procedendo sempre deste modo até encontrarmos um em que tal se verifique. Acrescenta ainda, que podemos desenhar infinitos diâmetros que passam pelo centro. A referida origem deste vocábulo, juntamente com a demonstração sugerida por Proclo, mostra-nos que este conceito é equivalente ao que hoje conhecemos por corda. Uma corda *é um segmento de recta que une dois pontos quaisquer da circunferência* e o que hoje designamos por diâmetro é também uma corda, embora intersecte o centro.

Alguns séculos após a passagem de Cristo pela Terra, surge pela mão de um comentador das obras aristotélicas uma concepção que se aproxima da versão actual. Simplício [35], observa que o diâmetro é assim designado visto *passar pelo meio* da superfície do círculo, dividindo-o em duas partes iguais. Porém, durante um longo período este vocábulo também foi utilizado para se referir à diagonal de um polígono, o que nos é testemunhado por Herão de Alexandria, referindo-se ao diâmetro como uma linha recta desenhada de ângulo para ângulo.

Apesar da actual versão dos *Elementos* referir *diâmetro* exclusivamente quando se aborda o círculo, segundo Proclo a definição de Herão era uma prática corrente já no tempo anterior a Euclides. No entanto, tal continuou a acontecer, uma vez que na versão de Campano, *diâmetro* é igualmente usado para referir a diagonal de um quadrilátero, o que nos leva a pensar se na versão original Euclides falaria em diagonal ou em diâmetro de um quadrilátero. As obras de Platão podem esclarecer-nos se se atender à influência exercida por estas junto do geómetra alexandrino, sobretudo nos diálogos de *Ménon* celebrados entre Sócrates e o servo de Menón:

«Sócrates: Ora, o que é quatro em relação a dois?
Servo: É o dobro.
Sócrates: Então, quantos pés tem este espaço?
Servo: Tem oito pés?
Sócrates: E constrói-se a partir de que linha?
Servo: Partindo desta.
Sócrates: Não é a partir desta que vai de um canto ao outro do quadrado?
Servo: Sim.
Sócrates: A esta linha, os sábios chamam diâmetro, nesse caso servo de Ménon, seria a partir do diâmetro que se constrói o espaço duplo.
Servo: Ah, sim! Exactamente, Sócrates!» [36]

O termo *diagonal* surgiu apenas mais tarde, a sua origem deriva também de dois termos gregos, *diá* e *gonía*, significando esta última "ângulo". A sua unificação faz com que traduzamos como "através do ângulo", embora alguns autores acrescentem "riscando através do ângulo". Este princípio foi seguido ao longo dos anos, e de facto hoje definimos diagonal como sendo *o segmento de recta que une dois vértices não consecutivos de um polígono*.

Na investigação realizada, notámos a predominância de definições de diâmetro em relação a raio. De facto, em Portugal somente no século XVIII é que este vocábulo se vulgarizou – encontramo-lo no *Tratado Completo da Navegaçam* de Francisco Xavier do Rego datado de 1764, no qual o círculo é definido como «*uma figura plana terminada pelo contorno inteiro de uma linha curva, chamada circunferência do círculo, dentro do qual há um ponto, que se chama centro, do qual todas as linhas lançadas à circunferência são iguais entre si, e se chamam radios ou semi-diâmetros do círculo*»[37]. Trata-se de uma adaptação da definição de Euclides, em que o autor introduz um novo termo, embora hesite na sua designação: *radio, semi-diâmetro* e segundo Luís de Albuquerque, também *rayo*.

Referimos anteriormente que o diâmetro é uma corda que difere das restantes por intersectar o centro, mas também o raio pode ser considerado como uma corda. De acordo com alguns autores terá sido este factor que esteve na base da sua origem, visto Euclides definir corda como uma *linha dentro do círculo*, e num fragmento dos *Elementos* de uma versão portuguesa do século XVI escrita por Domingos Peres [38], a expressão *linha do centro à circunferência* substituí a palavra *raio*. Tratam-se portanto, dos primeiros vestígios desta definição.

3. Outros tipos de superfícies

Comecemos pela superfície esférica, essa morada de residência divina.[39]

Na tradição grega o estudo da esfera e das suas propriedades esteve intimamente ligado à astronomia. A Pitágoras e à sua escola devemos o conceito de que, sendo a esfera a forma mais perfeita, essa seria também a forma do mundo, o que é confirmado por volta de 450 a.C. por Parménides, a quem se atribui a descoberta da esfericidade da Terra.

De acordo com Platão e na metade do século IV a.C. supunha-se, como já referimos, que a astronomia era o ramo da matemática onde se estudavam *os sólidos em movimento*. As hipóteses da esfericidade do Universo facilitavam o tratamento geométrico dos assuntos astronómicos, uma vez que definiam pontos, linhas e movimentos da esfera. Esta era considerada como a mais perfeita das formas e dos movimentos, sendo também a mais uniforme de todas as figuras sólidas e a única cuja rotação em torno de um eixo permite que se mova nos seus próprios limites sem alterar a sua posição. O eixo de rotação simboliza o movimento da razão e é superior a todos os movimentos rectilíneos.

A própria cosmogonia exposta por Platão no *Timeu* apresenta o universo sob a forma de esfera:

«Quanto à forma, Ele (o Criador) deu-lhe (ao Universo) a mais conveniente e natural. Ora, a forma mais conveniente ao animal que deveria conter em si mesmo todos os seres vivos, só poderia ser a que abrangesse todas as formas existentes. Por isso, Ele torneou o mundo em forma de esfera , por estarem todas as suas extremidades a igual distância do centro, a mais perfeita das formas e mais semelhante a si mesmo, por acreditar que o semelhante é mil vezes mais belo do que o não semelhante.» [40]

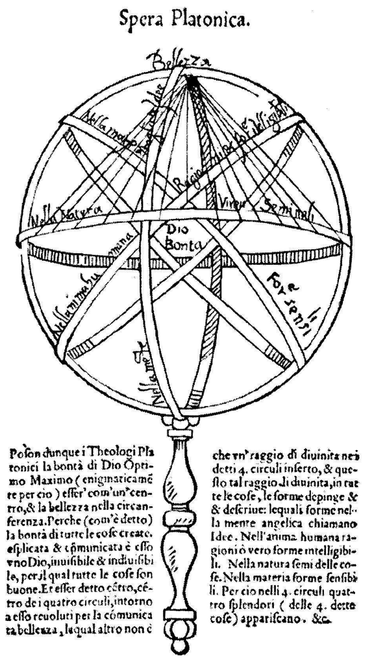


Figura 1.3. A Esfera Platónica.[41]

Apesar de Platão conhecer o mecanismo de geração da esfera, define-a como um sólido *«cuja distância do centro às suas extremidades é igual em qualquer direcção»*[42]. Num comentário realizado por Proclo encontramos duas justificações para esta definição – se por um lado a esfera apresenta um volume superior ao de qualquer sólido com faces planas, por outro ela é o único sólido em que todos os poliedros regulares podem ser inscritos.

Por sua vez Aristóteles, revelando claramente o seu horror pelo infinito, imaginava o universo finito, único e eterno de forma esférica e com movimento circular, o oposto ao movimento natural e rectilíneo, característico dos quatro elementos terrestres. O movimento circular correspondia exclusivamente ao quinto elemento – o éter. Em *De Caelo* o estagirita apresenta uma característica da esfera, afirmando que as suas extremidades estão a igual distância do centro [43].

Autólico de Pitane [44], contemporâneo de Aristóteles, é o autor do mais antigo tratado matemático grego que chegou aos nossos dias. Esta obra é constituída por dois livros: *Sobre a esfera em movimento* e *Sobre os ortos e os ocasos*, editados em 1885 por Hultsch. Inicialmente pensava-se que se tratavam de duas obras independentes, porém comprovou-se recentemente tratarem-se na realidade, de duas redacções distintas de um único tratado. Este abarca investigações sobre a geometria da esfera aplicada à astronomia e apresenta uma estrutura semelhante à das obras de Euclides, o que levou autores como Tannery, Heiberg e Heath, a suporem que nessa época existiria uma espécie de *manual*, no qual se recolhiam os tradicionais conhecimentos. Assim, as importantes coincidências apresentadas nas obras de Autólico e de Euclides seriam o resultado de uma tradição preliminar conhecida por ambos. Os referidos autores consideravam ainda que esse *manual* constituiria a base da *Esférica* de Teodósio [45], que seria uma versão ampliada e reordenada do mesmo.

Não conhecemos qual a definição de esfera atribuída por Autólico, no entanto supomos que estará relacionada com a sua geração, visto no seu tratado expor as propriedades da esfera animada de um movimento de rotação uniforme. Coincidência ou não, esta é também a ideia que nos transmite Euclides no Livro XI dos *Elementos*: *a esfera é uma figura sólida descrita pela revolução inteira de um semicírculo em torno do seu diâmetro, que se considera imóvel.* É curioso que Euclides não defina a esfera do mesmo modo que Platão, mas sim pela sua geração. Claramente influenciado por este enunciado, surge a versão imperfeita de Alberti: *a esfera é um corpo redondo que pode dar voltas por qualquer lado e no seu centro há um ponto do qual distam igualmente todas as suas partes*, referindo-se à superfície esférica como aquela que *imita* o contorno da esfera. É evidente que também Alberti pretende transmitir a ideia de como a esfera é gerada, mostrando que se trata de um sólido de revolução – mas de facto existem nessas palavras um certo abuso de linguagem.

Esta máxima euclidiana mereceu a contestação dos escolásticos, que alegavam não se tratar de uma definição, mas de uma descrição sobre a sua geração. Consideravam como correcta a definição que consta da *Esférica* de Teodósio, a qual menciona a propriedade da equidistância dos pontos da superfície esférica ao centro.

Segundo Luciano Pereira da Silva, nos tratados de astronomia era usual aludir-se às duas definições, a de Euclides e a de Teodósio – o que de facto encontramos, nomeadamente nas obras de Pedro Nunes [46] e de Sacrobosco [47]. Leia-se a definição de esfera dada pelo matemático português que inicia o primeiro capítulo do *Tratado da Esfera*:

«Esfera segundo Euclides, é um corpo que se causa pelo movimento da circunferência do meio círculo levado em redor até tornar ao seu lugar, estando o diâmetro fixo. Segundo Teodósio, esfera é um corpo maciço recolhido debaixo de uma só face, e tem no meio um ponto, do qual todas as linhas levadas até à circunferência são iguais. Este ponto chama-se centro da esfera. A linha que passa pelo centro da esfera e toca com os seus cabos a circunferência: chama-se Eixo da esfera. Os dois pontos que são cabos do eixo são os pólos do mundo.» [48]

Posteriormente a Teodósio, Herão de Alexandria apresentou também uma definição de esfera, sendo pioneiro ao abordar a sua superfície: *uma figura sólida limitada por* *uma superfície, tal que todas as linhas rectas partindo de um dos seus pontos e caindo dentro da própria figura são iguais àquelas que partem de outros pontos*.

A definição de superfície esférica que hoje encontramos nos livros de geometria é algo semelhante à apresentada por Teodósio, porém com uma diferença significativa: *é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de um ponto dado, o centro.* Não sabemos ao certo qual a origem de *lugar geométrico* ou a quem devemos esta designação, no entanto denomina-se *lugar geométrico* de pontos, uma figura cujos pontos gozam de uma propriedade comum e exclusiva deles. Da investigação realizada constatámos com alguma surpresa, que este termo era já utilizado por Platão, sublinhando nas suas obras a importância de se levar em consideração este tipo de lugares. Podemos acrescentar que os Gregos classificavam os lugares geométricos em três categorias: os lugares planos, obtidos através de rectas e círculos; os lugares sólidos, formados por secções cónicas, visto serem descritas estereometricamente como secções de uma figura tridimensional, e os lugares lineares reunindo as outras curvas.

Uma das obras de Euclides que não chegou aos nossos dias, intitulada *Lugares geométricos em superfície*, prova a familiaridade que os geómetras da Antiguidade tinham com este conceito, apesar da maioria dos autores referirem que esta obra se ocupava presumivelmente do cone e do cilindro – no entanto, permanece a incerteza. Segundo o historiador e geómetra francês do século XVIII, Michel Chasles [49], também os *Porismas* de Euclides, hoje desaparecidos, deviam conter proposições que ajudariam a resolver os problemas mais complicados sobre lugares geométricos, os quais teriam na geometria antiga a mesma finalidade que as transformações algébricas hoje realizadas, quando passamos da equação de um lugar geométrico referido num certo sistema de coordenadas para a sua equação num outro sistema.

Também Arquimedes [50], atraído pela geometria, cria a conhecida espiral definindo-a como sendo *o lugar geométrico no plano de um ponto que se move, partindo da extremidade de um raio ou semi-recta uniformemente ao longo do raio enquanto esse por sua vez gira uniformemente em torno da sua origem*. Mais tarde, Apolónio de Perga[51] menciona no tratado sobre as *Cónicas* uma síntese sobre lugares geométricos mas de três e quatro rectas, posteriormente também estudados por Papus [52]. Apoiando-se na sua *Colecção Matemática,* René Descartes [53] em pleno século XVII expõe na sua *Geométrie* um estudo sobre lugares, procurando aplicar a álgebra a problemas geométricos determinados. No entanto, a sua análise apenas refere lugares geométricos no plano, perfilhando os estudos realizados até então. O seu rival, Pierre de Fermat [54] após se licenciar em Direito no ano de 1629, começa a dedicar-se à matemática por meio da restauração de obras perdidas da Antiguidade – os *Lugares planos* de Apolónio, uma delas, é recuperada através de referências encontradas na *Colecção* de Papus; esta reconstituição fornece a Fermat importantes descobertas, estimulando-o a dedicar-se ao estudo de lugares. O fruto deste árduo labor, surge após a sua morte em a *Introdução aos Lugares*, na qual se apresenta uma geometria analítica bastante próxima daquela que actualmente utilizamos. Nesta obra, Fermat sugere a existência da terceira dimensão na geometria analítica:

«Há certos problemas que envolvem só uma incógnita e que podem ser chamados determinados, para distingui-los dos problemas de lugares. Há outros que envolvem duas incógnitas e que nunca podem ser reduzidos a uma só; e esses são os problemas de lugares. Nos primeiros problemas, procuramos um único ponto, nos segundos uma curva. Mas se o problema proposto envolve três incógnitas, deve-se achar, para satisfazer à equação, não apenas um ponto ou uma curva, mas toda uma superfície. Assim aparecem superfícies como lugares (...).» [55]

Descartes e Fermat, tinham percebido o princípio fundamental da geometria analítica no espaço: *uma equação com três incógnitas representa uma superfície*, todavia não o demonstraram.

Apesar do século XVII ser considerado o século das curvas, é no século XVIII que se encetam os estudos sobre as superfícies, ocorrendo assim durante este período o desenvolvimento da geometria tridimensional e encontrando em Gaspard Monge [56] o seu grande impulsionador.

O primeiro tratado sobre geometria analítica no espaço deve-se a Alexis Clairaut [57], um dos matemáticos mais precoces – aos dez anos já lia as publicações de L´Hospital sobre as cónicas e o cálculo. Em 1731 Clairaut publica o célebre tratado *Recherches sur les courbes à double courbure*, onde estabelece numerosas curvas no espaço como intersecções de várias superfícies. Também Leonhard Euler [58] na sua *Introductio in analysin infinitorum*, editada em 1748, contribui com a apresentação de uma família que evocava as cónicas, as quádricas. No segundo volume desta obra encontramos uma análise profunda sobre curvas e superfícies, utilizando sistemas de coordenadas tanto a duas como a três dimensões; porém, o estudo sistemático sobre os lugares da geometria elementar – a recta e o círculo, o plano e a esfera – não constam da *Introductio*, nem tão pouco em outros textos da época.

Em 1802, num artigo publicado por Monge e Jean Hachette [59] encontramos grande parte da teoria elementar que envolvia a geometria analítica no espaço. Neste artigo, Monge apresenta dois teoremas com o seu nome, abordando num deles a esfera como um lugar geométrico: *o lugar dos vértices do ângulo tri-rectângulo cujas faces são tangentes a uma dada quádrica é uma esfera*, então conhecida como a esfera de Monge.

Se seccionarmos uma superfície esférica por um plano de modo a obtermos uma calote esférica, não temos dúvidas que esta é uma superfície côncava. Alberti refere que o interior deste tipo de superfícies, se assemelha ao revés da esfera; procurando simplificar o conceito, compara-a com a superfície interior de um ovo. Embora as anteriores definições mencionadas pelo nosso autor apresentem alguma semelhança com os enunciados euclidianos, tal não se verifica neste caso, uma vez que este tipo de superfície não merece qualquer referência na bíblia da geometria composta pelo geómetra grego. Porém, na sua *L'ottica* mostra claramente conhecer figuras côncavas e convexas, como é indicado na proposição 57: *grandezas situadas à mesma distância sem que os seus extremos estejam em linha recta com a sua parte média, formam a figura inteira às vezes côncava e às vezes convexa*. À luz dos conhecimentos que hoje possuímos a demonstração desta proposição, numa primeira análise, surge-nos como falaciosa, ora vejamos:

Observemos $\Gamma B\Delta$ *estando o olho situado em K, e incidam os raios* $K\Gamma$, *KB*, $K\Delta$. *Parecerá que a figura inteira é côncava.*

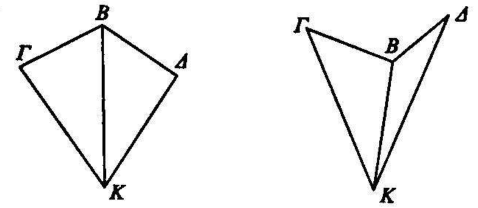


Figura 1.4. Imagem que acompanha a Proposição 57 da *Óptica* de Euclides.

Mova-se agora o que se vê na parte média e está situado mais próximo do olho. Parecerá que $\Delta B\Gamma$ *é convexo.*

Uma simples observação destas imagens, mesmo que pouco precisa, leva-nos a afirmar que a primeira figura será convexa e a segunda côncava, contrariamente à conclusão de Euclides, visto as definições a que recorremos actualmente, nos dizerem que uma *superfície côncava é aquela onde alguns dos seus pontos não podem ser unidos por um segmento de recta completamente contido nela*, sendo esta definição válida para qualquer figura côncava. Em oposição a este tipo de figuras surgem as convexas, *onde todos os segmentos de recta que unem quaisquer dois dos seus pontos estão completamente contidos nela* [60]. Importa salientar que nos deparamos com tal ideia, ainda que disfarçada, no primeiro livro dos *Elementos*, quando o sábio alexandrino define superfície plana como sendo *aquela sobre a qual assenta toda uma linha recta entre dois pontos quaisquer que estiverem na mesma superfície*. Embora o geómetra não atribua esta denominação, trata-se claramente da definição de uma superfície convexa. De facto todas as superfícies planas são convexas, o que já não acontece a todas as figuras planas. Podemos exemplificar através da família de quadriláteros, todos são figuras planas apesar de uns serem côncavos e outros convexos.

Contudo, a contradição entre a nossa conclusão e a de Euclides é esclarecida por intermédio de outras proposições da sua *Óptica* [61]. De acordo com este geómetra *as grandezas rectilíneas observadas à distância parecem curvílineas*, por conseguinte a primeira figura que surge na demonstração tornar-se-ia equivalente à superfície de um espelho côncavo e a segunda à de um espelho convexo, como evidenciamos de seguida:

Figura 1.5. À esquerda ilustramos uma reflexão num espelho côncavo e à direita num espelho convexo.

Devemos ainda salientar que as superfícies de ambos os espelhos são côncavas e, como podemos constatar, a sua distinção reside na reflexão dos raios luminosos.

Assim, somos levados a pensar que Alberti poder-se-á ter baseado na *Óptica* e na *Catóptrica* de Euclides, uma vez que o geómetra alexandrino estuda na primeira, a percepção de grandezas e na segunda, a reflexão em três tipos de espelhos: planos, côncavos e convexos.

4. Ângulos e sua classificação

Este subcapítulo podia intitular-se *inclinação* dada a analogia encontrada pelos geómetras para expressarem o que entendem por ângulo. «O termo $\kappa\lambda\acute{\iota}\sigma\iota\varsigma$, inclinação, utilizado para a definição de ângulo, surge, como se sabe, em Euclides, que vai recuperá-lo ao livro XI, onde começa a estereometria. Arquimedes, como é evidente, mas também Papus e Proclo servem-se constantemente dele, mas é ignorado pela tradição geométrica grega, de Tales ao léxico de Aristóteles, inclusive.» [62]

O autor dos *Elementos* considera a existência de ângulos planos e rectilíneos definindo-os, respectivamente, como *a inclinação entre duas linhas num plano que se encontram, mas não estando contidas numa linha recta. E quando as linhas contendo o ângulo são rectas, o ângulo diz-se rectilíneo.* Segundo Thomas Heath, esta definição é original, pois não encontramos nos seus antecessores qualquer referência relacionando *ângulo* com *inclinação*. Contudo, e à semelhança das anteriores definições, também esta não é muito correcta, visto Euclides não ter definido previamente *inclinação*, o que de acordo com alguns autores, este termo não seria mais popular que *ângulo*. Na verdade, este sábio pretende transmitir a ideia de algo que se inclina ou se afasta do equilíbrio, mas a julgar pelas palavras de Proclo referidas no seu *Comentário*, duras foram as críticas a este enunciado. Uma delas questionava como é que um ângulo podia ser uma inclinação, se uma inclinação produzia dois ângulos?

Segundo Proclo, longos foram os debates sobre qual seria a categoria de um ângulo. Alguns filósofos consideravam-no uma *quantidade*, para outros era uma *qualidade* e ainda existia um terceiro grupo, que dizia ser uma *relação*. Aqueles que o consideravam uma quantidade, argumentavam que um ângulo plano é dividido por uma linha e um ângulo sólido por uma superfície, como a superfície e o sólido são magnitudes, o ângulo neles formado também o será.

Eudemo de Rodes [63], discípulo de Aristóteles, foi um dos que defendeu *ângulo* enquanto qualidade. Tal como existem rectas e curvas numa superfície, esta também podia conter ângulos que seriam uma sua qualidade. Assim como os pitagóricos mais antigos, Eudemo de Rodes considerava que a origem dos ângulos estava nas linhas quebradas. Os pitagóricos apenas acrescentavam que o ângulo era um *ponto de seta* originado por uma linha quebrada num ponto. Os seus opositores argumentavam que se os ângulos fossem qualidades jamais poderiam ser divididos, acrescentando que apenas é possível dividir magnitudes, obrigando o ângulo a ser uma quantidade.

Euclides ao referir ângulo como inclinação está a inseri-lo na classe das relações, o que é defendido por Siriano de Alexandria [64], mestre de Proclo. Os seguidores desta teoria consideravam o ângulo como uma relação entre linhas e planos. Se existisse apenas uma inclinação entre linhas ou planos, então só havia um ângulo, caso fossem detectadas outras inclinações, o número de ângulos seria igual ao número de inclinações.

Mais tarde Apolónio define ângulo como «*uma contracção de uma superfície ou sólido, num ponto situado por baixo da linha ou da superfície*»[65]. Por outras palavras, admite que o ângulo é formado por uma linha quebrada ou por uma superfície quebrada, o que está em concordância com a definição de Aristóteles e dos seus discípulos. Por seu lado, Carpo [66] refere que o *ângulo é uma quantidade designada por distância entre as linhas e as superfícies que a contêm*. As definições de Apolónio e Carpo dizem respeito a ângulos planos, porém, na Antiguidade já se distinguiam e se classificavam os ângulos em planos, circulares, rectilíneos e mistos. Convém salientar que nesta época, o ângulo era o símbolo da coerência que governava as coisas divinas. O ângulo plano simboliza a mais imaterial, a mais simples e a mais perfeita forma de unificação. O ângulo circular imita as causas que envolvem formas inteligíveis, tal como as linhas circulares simbolizam imagens da mente ou da inteligência. O ângulo rectilíneo representa as coisas sensíveis permitindo a correlação de ideias e, finalmente, o ângulo misto preserva a comunidade entre formas sensíveis e inteligíveis.

Posteriormente, nasce uma nova classificação de ângulos atribuída, por Proclo, a Gémino [67], considerando que estes podiam existir tanto nas superfícies, como nos sólidos. As superfícies eram classificadas em simples, caso fossem planas ou esféricas, e em mistas, como o cone e o cilindro. A designação atribuída a esses ângulos foi simplesmente, ângulos em superfícies simples e ângulos em superfícies mistas. Nas superfícies planas, os ângulos estabeleciam-se entre linhas simples, mistas e pela combinação destes dois tipos. As linhas simples distinguiam-se em rectas e circunferências, permitindo formar ângulos entre rectas, entre rectas e circunferências, ou ainda entre circunferências. Nas linhas mistas formavam-se ângulos em segmentos da própria curva, ou entre a curva e os eixos coordenados [68]. Dediquemos exclusivamente a nossa atenção aos ângulos produzidos entre linhas rectas, os quais assumem a classificação que hoje em dia conhecemos – ângulos rectos, agudos e obtusos.

Esta divisão já era seguida na Antiguidade. Encontramos na *República* de Platão a existência de três tipos de ângulos considerados pelos geómetras, tipos estes que são obtidos pela divisão de um ângulo rectilíneo em espécies. O ângulo recto distinguia-se pela sua identidade e semelhança, o agudo e obtuso eram caracterizados pela sua grandeza relativa. Todavia, o agudo assumia um comportamento vivo e rápido, em oposição ao obtuso, cujo termo grego se aproxima do retardamento de determinado movimento, passando assim da «estática para a foronimia» [69].

Na investigação realizada não encontrámos razões suficientes que justificassem esta classificação, porém esta descende já dos pitagóricos para quem certos ângulos seriam dedicados a determinados deuses. O ângulo recto simbolizava a essência imaculada nas ordens divinas por ser inflexível e direito, não estando inclinado para o mal e estando em conformidade com os deuses solenes, que constituíam a imagem da perfeição, do poder firme e da inteligência. O ângulo obtuso era a imagem da extensão das formas, enquanto o agudo era tido como a causa que discriminava e activava todas as coisas. Aristóteles, na sua *Metafísica*, atribui igualmente prioridade ao ângulo recto em comparação ao agudo, uma vez que o primeiro é dividido em ângulos agudos.

Por seu lado, Euclides faz questão em apresentar esta classificação nos seus *Elementos – quando uma linha recta cai numa linha recta de modo a fazer iguais os ângulos adjacentes, cada um dos ângulos diz-se recto, e a linha recta que cai sobre a outra diz-se perpendicular a ela. Ângulo obtuso é o que é maior que um ângulo recto. Ângulo agudo é o que é menor que um ângulo recto*. Segundo Proclo, nem todos os ângulos agudos são inferiores a um ângulo recto, existem dois casos particulares: o *ângulo do semicírculo* e o *ângulo como um chifre* [70]. O primeiro é menor que um ângulo recto, mas não é um ângulo agudo; o segundo apesar de ser menor que um ângulo recto, também era considerado como menor que um ângulo agudo, não sendo portanto encarado como tal.

Alberti segue a definição dada por Euclides, tendo como princípio básico que os ângulos rectos são obtidos pela intersecção de duas linhas rectas. Os ângulos obtusos e agudos obtêm-se à custa do recto, acrescenta que o primeiro *está mais aberto* e o segundo *está menos aberto*.

Hoje é frequente definirmos ângulo como sendo *uma região ou superfície ilimitada determinada no plano por duas semi-rectas com a mesma origem*. Mas na verdade se considerarmos duas semi-rectas OA e OB, com a mesma origem O, verificamos que dividem o plano em duas regiões, cada uma delas é um ângulo, um é convexo e o outro côncavo, anteriormente definidos aquando da abordagem das superfícies côncavas. Às duas semi-rectas que limitam o corpo do ângulo designam-se lados do ângulo e à origem O, o vértice do ângulo. Por outro lado, também podemos definir ângulo como sendo uma região plana gerada por uma semi-recta que se move em torno da origem, da posição OA para OB. No início da geração, o ângulo tem os lados sobrepostos, o qual é designado nulo. Com este movimento a semi-recta gera ângulos convexos até o lado OB ficar no prolongamento de OA, nesse caso a semi-recta gerou um ângulo raso. Os ângulos que posteriormente são gerados, continuando este movimento, são côncavos. Ao terminar uma volta completa os lados do ângulo voltam a ficar sobrepostos, gerando a semi-recta um ângulo giro.

A semi-recta que divide um ângulo em duas regiões congruentes designa-se bissectriz. Bissectando um ângulo raso obtemos dois ângulos rectos. Este ângulo serve de referência para classificar os outros em duas famílias: agudos e obtusos, os quais apresentam, respectivamente, uma amplitude, menor e maior que um ângulo recto.

É pertinente analisarmos as palavras proferidas pelo nosso autor, que lhe permitem alcançar este conceito. Apesar de não serem as mais felizes para os matemáticos, teremos de admitir a riqueza de conceitos que desabrocham deste livrinho, florindo junto dos artistas.

Para além da geometria marcar a sua presença nesta obra, um outro ramo da matemática germina em clara antecipação, ainda que de modo disfarçado. Essa *senhora* da era moderna, chamada frequentemente por *geometria elástica*, ergue, neste humilde texto, uma ponta do seu longo véu. A Topologia entra em cena, ainda que involuntariamente, quando o sacerdote genovês se refere à alteração do contorno de uma figura, o qual é originado pela degeneração das linhas que o formam. Esta modificação deve-se ao alongamento ou encurtamento dessas linhas, recordando-nos o que hoje designamos por transformação topológica, que consiste em transformar uma figura ou um objecto noutro, sem que tenha sido acrescentada ou retirada matéria, ou tenha ocorrido algum corte, furo ou colagem. Assim, a figura que obtemos é topologicamente equivalente à inicial, as propriedades topológicas desta são conservadas pela transformada. Deste modo, um círculo, por exemplo, é topologicamente equivalente a uma elipse, a um quadrado, a um triângulo e a outras figuras que se possam obter do modo indicado.

A problemática agora é descobrir as fontes de inspiração onde Alberti bebeu tal afamado líquido. A julgar pelas obras publicadas até à sua época e conhecendo-se como discípulo dos tesouros da Antiguidade, é certo que nunca a topologia podia ter nascido no Egipto ou na Jónia, ou mesmo na Grécia «onde tudo se sabe por distância e medida; para conceber tal ideia, é necessário ultrapassar as colunas de Hércules, entrar nos mares onde as longínquas extensões de nevoeiro difuso nunca garantem que se submetam às mesmas leis que a proximidade, também ela deformável»[71]. Mas sendo o nosso autor um exímio observador, de certeza que abriu a sua janela sobre o mundo e vislumbrou no horizonte que o nevoeiro invade «o espaço vizinho, acumula-se, denso, compacto, rarefaz-se, leve, com intervalos abertos ou fechados, desvanece-se como um vapor. Tal como a sombra conserva os traços do mundo, assim a neblina os transforma continuamente por homeomorfismo, perdendo as distâncias, medidas e identidades.» [72]

5. Triângulos semelhantes

Segundo Aristóteles, o Egipto foi o berço das matemáticas – lá onde o sol projectou o hieróglifo em solo desértico e onde a ciência repousa em velhinhos papiros adormecidos nas margens do Nilo, as rubricas essencialmente aritméticas que o idoso Rhind, ou Ahmes,[73] nos testemunha, evidencia que a teoria sobre triângulos semelhantes era do conhecimento deste povo. Porém, alguns autores referem que os babilónios já conheciam de uma forma geral, as figuras semelhantes. De facto, parece não haver dúvidas que este conceito fosse dominado pelo povo da Mesopotâmia, uma vez que as tabelas deixadas contêm problemas sobre medidas de triângulos e a sua resolução implica necessariamente a noção de semelhança. Mas foi em território faraónico que estes triângulos imperaram, encontrando em Tales um convicto discípulo.

O conhecido episódio dos navios no mar é narrado por Proclo, ao comentar o vigésimo sexto teorema [74] do primeiro livro dos *Elementos*, referindo que nas *Histórias Geométricas* de Eudemo as origens deste teorema são colocadas em Tales, e dizendo que este tinha necessariamente de recorrer a ele, devido à maneira como é relatada a sua forma de determinar a distância entre navios no mar. Contudo, não existem evidências suficientemente fortes que provem a veracidade deste acontecimento, atribuir a Tales a descoberta da proporcionalidade dos lados de triângulos semelhantes não parece ser legítimo, tendo em conta os testemunhos que herdámos de povos mais antigos.

Os eruditos atravessam o Mediterrâneo. Um viajante grego, sábio, encontra-se com um sacerdote egípcio, do mesmo modo que uma cultura encontra outra. A geometria pura chega agora aos helénicos, surpreendendo matemáticos e filósofos.

Aristóteles é dos primeiros a referir este conceito numa das suas obras, dizendo que as figuras semelhantes apresentam ângulos iguais e lados proporcionais. Este filósofo generalizou a definição falando em figuras num sentido abrangente, porém não nos esqueçamos, por exemplo, do círculo e da circunferência, para os quais esta definição não se adequa dada a ausência de lados. Por seu lado, Euclides no sexto livro dos *Elementos* apresenta este conceito também generalizado, mas de uma forma mais correcta, referindo-se à semelhança de figuras rectilíneas como sendo *aquelas que tendo os ângulos iguais cada um a cada um, também têm proporcionais entre si os lados, que compreendem os ditos ângulos iguais*.

O francês Auguste Comte [75], conhecido fundamentalmente pelos seus estudos mecanicistas e astronómicos, revela-nos que seria a partir deste conceito que Aristarco de Samos [76], o Copérnico da Antiguidade, «calculava a distância relativa do Sol e da Lua à Terra, medindo um triângulo construído o mais rigorosamente possível, de modo a ficar semelhante ao triângulo rectângulo formado pelos três astros, no momento em que a Lua se encontra em quadratura e em que, por consequência, bastava, para definir o triângulo, observar o ângulo na Terra»[77].

A aplicação deste tipo de triângulos estende-se a vários domínios, para além de auxiliarem o cálculo de distâncias entre navios e entre planetas, surge pela mão de Alberti o seu emprego à óptica. Ao expor a sua teoria sobre a visão faz menção aos triângulos semelhantes, referindo a igualdade dos seus ângulos e a relação existente entre os seus lados.

É importante salientarmos um aspecto importante, os autores citados não levaram em consideração que os lados e os ângulos de um polígono devem ser tomados pela mesma ordem, assim dois polígonos são semelhantes quando a amplitude dos ângulos for igual e o comprimento dos lados correspondentes a esses ângulos, for proporcional. Por outro lado, as definições indicadas referem a igualdade de ângulos, o que hoje exprimimos por congruência, quer seja para ângulos, segmentos ou triângulos. De facto, os enunciados anteriores constituem intuitivamente a ideia que temos deste tipo de figuras, mas centremos a nossa atenção apenas nos triângulos semelhantes, apresentando de seguida uma definição mais completa:

Dizemos que dois triângulos ΔABC e ΔDEF são *semelhantes* (através da correspondência $A \mapsto D, B \mapsto E, C \mapsto F$) e escrevemos $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ se os ângulos correspondentes forem congruentes ($\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}$) e os lados proporcionais ($\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$). À razão entre os lados correspondentes de triângulos semelhantes, designamos *razão de semelhança,* assim caso $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, o quociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$ é a razão de semelhança entre ΔABC e ΔDEF.

Explicada a semelhança de triângulos, para que nada falte aos pintores, eis o enunciado de uma proposição matemática:

Se uma recta corta um triângulo, de modo que forme um outro menor e esta é paralela à base do primeiro, os lados do triângulo menor são proporcionais aos do maior.

Este enunciado baseia-se certamente num lendário teorema atribuído a Tales:

Um feixe de rectas paralelas, cortadas por duas transversais, intersecta estas em segmentos correspondentes directamente proporcionais.

No caso da figura seguinte, verificamos que: $\frac{\overline{ab}}{\overline{a'b'}} = \frac{\overline{cd}}{\overline{c'd'}}$.

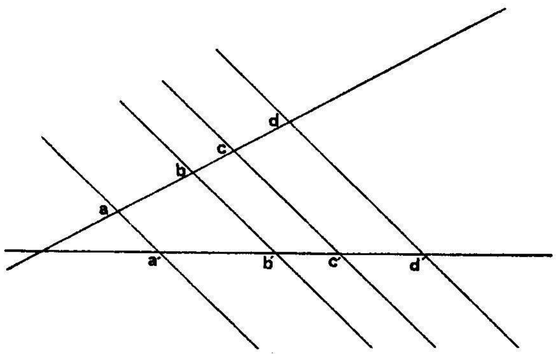


Figura 1.6.

Tendo em conta este resultado e os critérios de semelhança de triângulos hoje conhecidos, demonstremos a proposição albertiana:

Consideremos o triângulo ΔGKJ e sejam $I \in GK$ e $H \in GJ$, tais que $IH \parallel KJ$, o que implica $G\hat{I}H \equiv G\hat{K}J, G\hat{H}I \equiv G\hat{J}K$ e $I\hat{G}H \equiv K\hat{G}J$.

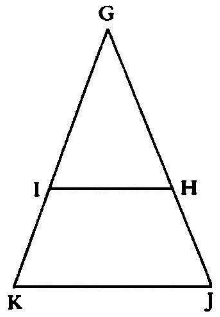


Figura 1.7.

Pelo critério seguinte, concluímos $\Delta GIH \sim \Delta GKJ$:

Critério AAA (*ângulo-ângulo-ângulo*): *Dois triângulos com ângulos internos iguais são semelhantes: mais precisamente, se os triângulos ΔABC e ΔDEF forem tais que $\hat{A} \equiv \hat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}, \hat{C} \equiv \hat{F}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.*

Consequentemente, se dois triângulos são semelhantes, para além de apresentarem ângulos congruentes também têm o comprimento dos seus lados proporcional, assim:

$$\frac{\overline{GI}}{\overline{GK}} = \frac{\overline{IH}}{\overline{KJ}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{GJ}}$$

o que conclui a demonstração.

Mas a afinidade entre o primeiro verdadeiro matemático e o criador da perspectiva linear, não se resume a este teorema. Vejamos as coincidências entre dois vultos da história separados por dois milénios, aproximadamente.

O triângulo, símbolo que representava para os antigos Maias o glifo do raio de sol, é abordado neste tratado de pintura por constituir uma secção da pirâmide visual, essa estrutura elementar que encontra nos raios, não solares mas visuais, auxiliares geométricos que procuram explicar a complexidade da nossa visão. A intensa investigação e o interesse manifestado por Alberti neste poliedro imaginário, relembram-nos o comportamento do célebre egípcio perante o seu monumento. Recuemos no tempo, aproximadamente dois milénios e meio atrás, quando Tales se mostrou encantado perante os simbólicos túmulos.

«O faraó Quéops, divino, omnipotente, representando o corpo social, manda o povo construir a sua pirâmide pedra a pedra, e Tales mede-a sem que a proporção descoberta tenha, de qualquer maneira, em consideração o rei, a sua ordem, o seu túmulo ou essa relação entre um e o múltiplo político. O *logos*-proporção expulsa o *logos*-discurso, existe uma lei ou uma ordem que não se conhece ou que não conhece a ordem ou a lei social, e o faraó morre mais uma vez. Resta um poliedro, uma caixa luminosa e transparente.» [78] Ao observá-la atentamente, este geómetra descobre as qualidades do olhar e sabiamente engendra uma representação. Os historiadores Diogénes Laércio [79] e Plutarco [80] contam-nos que Tales mediu a altura da pirâmide por observação dos comprimentos das sombras, no momento em que a sombra de uma vara vertical seria igual à sua altura. No esquema realizado, o sol desenha na areia dois triângulos; o primeiro representa o imponente túmulo faraónico, o segundo uma vara ou qualquer outro corpo de altura acessível. Ambos os triângulos são rectângulos de ângulos iguais, sendo por isso homotéticos. A secreta altura da pirâmide é descoberta, graças à relação que as sombras projectadas apresentam entre si.

Deste modo, nasce uma espantosa cumplicidade – «o teatro da medida revela a descodificação de um segredo, a decifração de uma escrita, a leitura de um desenho. A arena em que o Sol deixa o seu rasto transforma-se em ecrã, na parede de projecção no fundo da caverna. Eis a cena da representação milenariamente armada para o saber ocidental, a forma historicamente estável da contemplação do alto destas Pirâmides.

A história de Tales instaura, talvez esse momento da representação, indefinidamente reassumido pela filosofia, mas, sobretudo, pelas geometrias, das coordenadas de Descartes do ponto de vista argivo, da representação reduzida descritiva à moda de Monge em Gergonne... Primeira palavra de uma perspectiva, de uma projectura, de uma óptica arquitectural dos volumes, de uma matemática intuitiva, totalmente mergulhada no *organon* global dessa mesma representação.»[81]

Notas

[1] Viveu por volta de 430 a.C. e segundo Proclo, compôs uma obra intitulada *Elementos de geometria*, antecipando-se aos conhecidos *Elementos* de Euclides.

[2] Serres, *op. cit*., p. 255.

[3] Alguns autores supõem que Alberti possuiria uma cópia de uma tradução latina dos *Elementos* realizada por Campano de Novara, mas na verdade quando a edição de Campano foi impressa em Veneza no ano 1482, o nosso autor tinha falecido há uma década. Por este motivo, consideramos que Alberti possuiria um exemplar dos *Elementos* correspondente a uma versão anterior à de Campano. Apurámos que duas traduções latinas baseadas em textos arábicos o tinham precedido, a de Athellard de Bath em 1120 e a de Gerardo de Cremona em 1150, provavelmente uma delas constava do arquivo bibliográfico de Alberti.

[4] Alberti, *Della Pittura*, Livro I, p. 69, na versão de Cecil Grayson, Penguin Classics, 1991.
.

[5] Termo utilizado para designar os generais imediatos sucessores de Alexandre Magno.

[6] F. Enriques e G. Santillana, *Compendio di storia del pensiero scientifico*, citado por Carlos del Negro em *Considerações sobre a Perspectiva de Euclides e a Perspectiva linear*, Rio de Janeiro: Universidade do Brasil, 1953, p. 4.

[7] Serres, *op. cit*., p. 204.

[8] Viveu por volta de 428 a.C..

[9] (384-322)

[10] Viveu por volta de 450 a. C..

[11] (429-347 a.C.)

[12] Vasconcelos, *História da Matemática na Antiguidade*, Livrarias Aillaud e Bertrand, 1965, p.202.

[13] Platão, *Parménides*, tradução e notas de Maria José Figueiredo, Instituto Piaget, 2001, 137d.

[14] Serres, *op. cit*., p. 256.

[15] Platão, *op. cit*., 137e.

[16] A concepção platónica defendia a existência de quatro categorias na matemática: aritmética, geometria, astronomia e estereometria. Supõe-se que esta última tenha sido criada, pelo menos em grande parte, por Teeteto (417-368 a.C.), embora esta designação tenha sido atribuída por Aristóteles. O famoso problema da estereometria era a duplicação do cubo, também conhecido por *problema de Delos*. Segundo Erastótenes terá tido origem num oráculo dado aos habitantes daquela ilha, em que estes para se verem livres da peste tinham de duplicar as dimensões do altar que apresentava uma forma cúbica.

[17] Aristóteles, *De anima*, versão francesa de J. Tricot Paris: Librairie Philosofique J. Vrin, 1947, I.4, 409.

[18] Nasceu no ano 410 e morreu em 485 d.C.. Estudou filosofia em Alexandria e em Atenas com Plutarco. Tornou-se director da Academia de Platão, cargo que ocupou durante o resto da sua vida. O seu *Comentário ao primeiro livro dos Elementos* de Euclides é a principal fonte que dispomos sobre a história antiga da geometria grega. A importância dos seus trabalhos reside nas informações que retirou de obras que hoje se encontram perdidas.

[19] Serres, *op. cit*., p. 217.

[20] *Ibidem*, p. 224.

[21] (1780-1855)

[22] (1768-1830)

[23] Citado por Thomas Heath em *The thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. I, Dover Publications, New York, 1956, p. 173.

[24] Serres, *op. cit*., p. 265.

[25] (1862-1943)

[26] Serres, *op. cit*., p. 217.

[27] Citado por Carl Boyer em *História da Matemática*, tradução de Elza Gomide, S. Paulo, Edgard Blücher, 1974, p. 446.

[28] Serres, *op. cit*., p. 218.

[29] *Ibidem.*

[30] *Ibidem*, p. 106.

[31] *Ibidem*, pp. 107 e 111.

[32] Platão, *op. cit*., 137e.

[33] (50 a.C.-50? d.C.)

[34] (624-548? a.C.)

[35] Nasceu por volta de 490 na Anatólia, hoje uma província turca, e supõe-se ter falecido em 560, provavelmente em Atenas. Estudou filosofia em Alexandria na escola de Ammónio Hermiae, que foi aluno de Proclo e de Eutócio tendo-lhes dedicado o comentário que escreveu sobre o Livro I do conhecido tratado de Arquimedes, *Sobre a esfera e o cilindro*. Hermiae escreveu ainda algumas críticas sobre os trabalhos de Aristóteles, influenciando na altura o jovem discípulo Simplício.

Terminados os estudos em Alexandria, Simplício viaja até Atenas onde aprofunda os seus conhecimentos com o neoplatonista e filósofo Damáscio. Os comentários à *Física* e ao *De Caelo* de Aristóteles, constituem o seu principal contributo para a história da Matemática. Neste segundo comentário refere alguns detalhes sobre as esferas concêntricas de Eudóxio, fazendo citações baseadas num tratado de Sosígenes (século II) sobre este assunto.

[36] Platão, *Ménon*, versão francesa de Bernard Bietrre, Nathan, 1990, 81c-81e.

[37] Citado por Luís de Albuquerque em *Estudos de História*, vol. I, Actas Universitatis Conimbrigensis por Ordem da Universidade de Coimbra, 1974, pp. 158 e 159.

[38] Domingos Peres compilou num pequeno livro, numa espécie de manual, não só a tradução de algumas partes dos *Elementos*, como também nos oferece um capítulo sobre aplicações à planimetria, à altimetria e à gnomónica, tendo sido publicado em 1559. O autor era professor das duas filhas de D. Duarte e D. Isabel de Bragança, a quem dedica este livro que tinha por finalidade servir de caderno de estudo para as princesas. Segundo Luís de Albuquerque, Pedro Nunes era o mestre de matemática das princesas, porém devido aos seus frequentes impedimentos terá nomeado Domingos Peres para o substituir.

Domingos ensinou às duas jovens aritmética, fundamentos de música relacionados com *proporções harmónicas*, *teoria de planetas* e para além destes domínios, considerava indispensável o conhecimento dos seis primeiros livros dos *Elementos*. De facto a natureza do ensino ministrado, mostra que não diferia do que era habitual, tal como Euclides e Alberti também as duas princesas apresentavam no seu *curriculum* as disciplinas que constituíam o *quadrivium*.

[39] Na investigação realizada sobre a evolução da definição de superfície esférica, constatámos que alguns autores confundem-na com a esfera. Talvez por se preocuparem mais com o simbolismo associado à esfera do que com a distinção entre as duas. Ao longo desta exposição irão predominar as definições de esfera, mas dão-nos uma ideia do conceito de superfície esférica que estaria associado.

[40] Platão, *Timeu* in *Plato´s Cosmology: The Timaeus of Plato translated with running commentary*, London: Routledge & Kegan Paul, 1956, 33B.

[41] Esta estampa consta de uma obra de Mauro Fiorentino intitulada *Annotationi sopra la lettione della Spera del Sacrobosco*, impressa em Florença em 1550. Para além da tradução da *Esfera* de Sacrobosco, compreende *Vna Spera Theologica Diuina, & Christiana e Vna Spera Platonica, con Alcune eccitationi mathematiche, Theologiche & diuine*.

[42] Platão, *Timeu* in *op.cit*., 33B e 34B.

[43] Aristóteles, *De Caelo*, II.14, 297 a 24. Referido por Thomas Heath em *op. cit*., vol. III, p. 269.

[44] (315-241?a.C.)

[45] Matemático que viveu no primeiro século antes de Cristo.

[46] (1502-1578)

[47] (1195-1256)

[48] Citado por Luciano Pereira da Silva em *Obras Completas*, vol. I, Divisão de Publicações e Biblioteca Agência Geral das Colónias; Lisboa, 1943, p. 269.

[49] (1793-1880)

[50] (287- 212 a.C.)

[51] (260-190 a.C.)

[52] (290-315 d.C.)

[53] (1596-1650)

[54] (1601-1665)

[55] Fermat, *Oeuvres*, I, 186-187. Citado por Carl Boyer em *op. cit.*, p. 255.

[56] (1746-1818)

[57] (1713-1765)

[58] (1707-1783)

[59] (1769-1843)

[60] Esta classificação de figuras em côncavas e convexas também se deve ao tipo de ângulos que estas apresentam, os quais são designados simplesmente por côncavos e convexos. Se unirmos dois pontos quaisquer de um ângulo, tal que o segmento obtido esteja no seu corpo, este designa-se *convexo*. Se nele existirem dois pontos que não satisfaçam esta condição, o ângulo diz-se *côncavo*.

[61] Este tratado de Euclides será estudado com algum pormenor no capítulo seguinte.

[62] Serres, *op. cit.*, p. 219.

[63] Viveu por volta de 320 a.C.. A maioria dos autores referem que Eudemo terá escrito uma história da matemática, porém esta perdeu-se, mas alguém, não sabemos ao certo quem, terá resumido uma parte. Esta por sua vez teve o mesmo fim que a anterior, no entanto os mesmos autores referem que Proclo terá ainda extraído alguma informação para redigir o seu *Comentário ao primeiro livro dos Elementos de Euclides*.

[64] Viveu por volta de 450 d.C.

[65] Citado por Proclo no *Comentário ao primeiro livro dos Elementos*, versão inglesa de Glenn Morrow; Princeton University Press, 1970, p. 99.

[66] Não sabemos ao certo de quem se trata, encontrámos esta referência no *Comentário* redigido por Proclo ao primeiro livro dos *Elementos*, p. 101 na referida versão inglesa de Glenn Morrow. Apurámos que é mais conhecido como *Carpo – o Engenheiro*, sendo referido por Papus na sua *Colecção*. Simplício refere Carpo como pitagórico, atribuindo-lhe a resolução do problema da quadratura do círculo. No entanto, Tannery parece mais inclinado em considerar que Carpo terá vivido no tempo de Herão de Alexandria, contudo permanece a incerteza.

[67] Não conhecemos muito sobre a vida de Gémino, supõe-se que terá nascido por volta do ano 110 a.C. possivelmente em Rodes, tendo morrido provavelmente no ano 40 d.C. É da sua autoria uma obra muito completa sobre a divisão e a classificação das matemáticas. Supõe-se que este trabalho não chegou aos nossos dias, no entanto de acordo com Proclo, Simplício, Papus e Eutócio tratava-se de uma autêntica enciclopédia matemática. Proclo acrescenta ainda, que Gémino considerava a matemática como a disciplina que se ocupava das *coisas inteligíveis*, sendo constituída pela Geometria, a qual era dividida em Teoria do Plano e Estereometria, e pela Aritmética onde se inclui a teoria dos números lineares, dos número planos e dos números sólidos.

[68] Segundo Gémino, os ângulos formados entre uma recta e uma circunferência podem ser classificados em dois tipos: *ângulo do semicírculo* e o outro, vulgarmente conhecido entre os

antigos pelo seu aspecto de chifre, *ângulo como um chifre*. O primeiro é concebido por uma recta, ou segmento de recta, e pela região convexa de uma circunferência; o segundo é formado entre uma recta e a região côncava da circunferência. Entre circunferências podemos distinguir três tipos de ângulos: biconvexos, bicôncavos e mistos formados pelos dois tipos anteriores. Os biconvexos são obtidos entre regiões convexas de ambas as circunferências, analogamente, a partir dos segmentos côncavos de ambas as circunferências, forma-se um ângulo bicôncavo. Finalmente, os ângulos mistos, *convexo-côncavo*, podem ser ilustrados através dos ângulos lunares.

[69] Serres, *op. cit*., p. 221.

[70] Este ângulo actualmente é designado por ângulo de contingência, considerando-se a sua amplitude como nula. Tanto este como o anterior foram estudados por Euclides no terceiro livro dos *Elementos*.

[71] Serres, *op. cit.*, pp. 201 e 202.

[72] *Ibidem*.

[73] Estas são duas designações atribuídas ao mesmo papiro. Rhind, por ser o apelido do antiquário escocês que o adquiriu em 1858 na cidade de Luxor, Ahmes em homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a.C..

[74] «*Se em dois triângulos dois ângulos de um forem iguais a dois ângulos do outro, cada um a cada um, e um lado do primeiro igual a um lado do outro, e forem estes lados ou adjacentes, ou opostos a ângulos iguais; os outros lados dos dois triângulos serão iguais aos outros lados, cada um a cada um; e também o terceiro angulo será igual ao terceiro.*»

[75] Nasceu em Montpellier no ano de 1798 e morreu em 1857 na capital francesa.

[76] (310-230 a.C.)

[77] Citado por Michel Serres em *op. cit*., p. 168.

[78] *Ibidem*, p. 267.

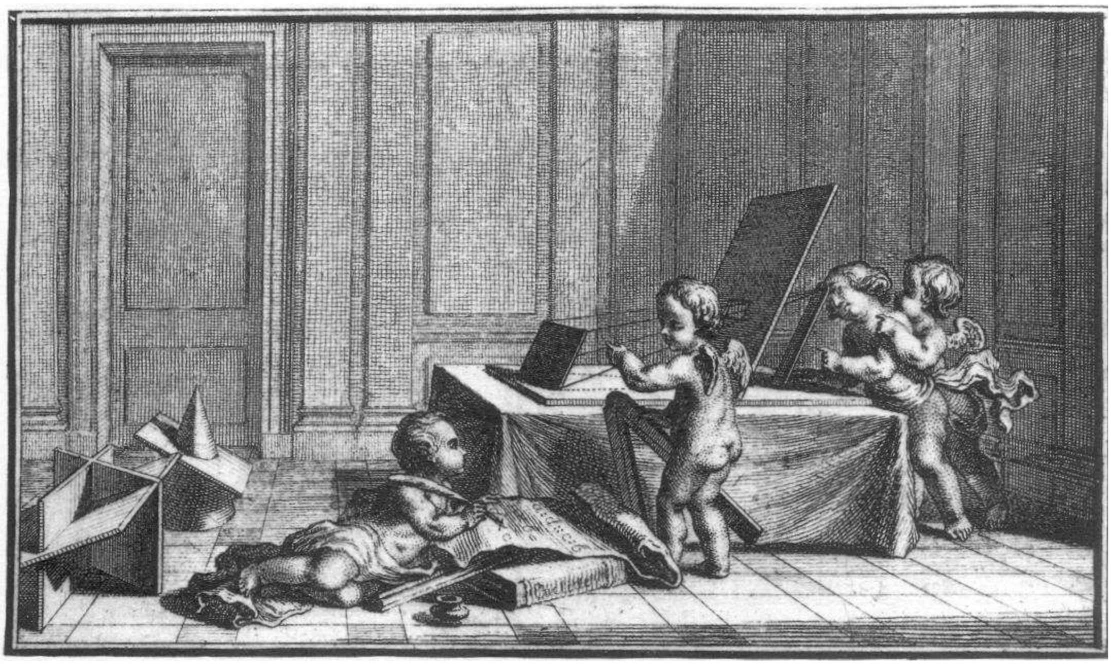
[79] Consultar Laertius, *Lives of eminent philosophers*, versão inglesa de R. D. Hicks, vol I, Livro I, Harvard University Press, 1972, pp. 22-46.

[80] Escritor grego nascido em Queroneia no ano 50 d.C., compôs cerca de 227 textos, embora apenas um terço se tenha conservado. Morreu aos 70 anos.

[81] Serres, *op. cit.*, p. 179.

Capítulo 2

Dos *enganos do olhar* à Perspectiva Linear



A invenção albertiana marca decididamente o nascimento, ou renascimento, do espaço pictórico. «O artista quer realizar um desenho discordante e enganador em relação à autoridade representada, fá-la depender de si mostrando-a ao mesmo tempo tão “central” que todas as coisas inscritas no território do quadro com elas devem ser relacionadas e medidas. A cena perspéctica na sua extensão, compreendida na totalidade dos olhares externos (“pirâmide visiva”) e tornada congruente com a estrutura da *tabula*, torna-se o *campo* da autoridade representada, é um pedaço de realidade; além disso, é o ponto de vista (*spiraculo*) a partir do qual se pode fazer quadrar o aspecto do poder com a verdade da imagem, em todos os pormenores que o rodeiam e lhe servem de acompanhamento e cortejo.»[1] Nestas condições, Alberti cria um novo método de representação conhecido por *perspectiva artificialis*; definindo a pintura como a *intersegatione della piramide visiva,* segundo uma distância dada, situado o seu centro e estabelecidas as luzes, representa-a artisticamente com linhas e cores sobre uma superfície dada.

A *piramide visiva*, esse elemento fundamental para a construção legítima, foi inspirada e recolhida na óptica medieval, desempenhando o principal papel na *perspectiva naturalis* que se debruçava sobre as teorias e mecanismos da visão. O artificial foi concebido a partir do natural e ambos sintetizados num processo que revolucionou a pintura, e a arte em geral, em pleno Renascimento.

O próprio significado latino de *perspectiva* apresenta as duas vertentes anteriormente mencionadas. Etimologicamente, este vocábulo deriva de *perspicere*, “ver com clareza” ou “ver através de”. A primeira tradução corresponde ao modo como vemos o que nos rodeia, tratando-se portanto da perspectiva natural e equivalendo a uma tradução literal da palavra grega *optiké*. A segunda baseia-se na definição moderna de perspectiva artificial, como sendo uma técnica de representar o espaço tridimensional numa superfície plana, dando a cada corpo a noção exacta da sua posição, distância e dimensão, o que está de acordo com a concepção albertiana.

A perspectiva linear, sobre a qual incide o nosso estudo, vinculando-se à competência de reproduzir o universo tal como ele se apresenta, apoiando-se na geometria e reduzindo artificiosamente o observador a um olho simbólico, tornou-se um precioso instrumento do conhecimento, cujas regras permitem transmitir com profundo realismo o que espírito capta do mundo que o envolve.

Segundo os historiadores da matemática, é com os Gregos que aparecem os primeiros ensaios de teorização sobre perspectiva, nascendo esta de um firmado interesse manifestado por médicos, filósofos e matemáticos em interpretar o mecanismo da visão, desenvolvendo então algumas concepções nesse sentido. Assim, a criação deste método de representação geométrica deve-se ao desenvolvimento de um ramo da física – a óptica.

«A Grécia seca continua a ser o reino dos geómetras, ali nascidos, numa luz opressiva ou numa noite tão vazia que podemos acreditar que basta erguer um véu para que a verdade surja, deslumbrante. Também a óptica começa nestes sítios.» [2]

1. A Herança Helénica

A visão para os filósofos: *o fogo do olhar*

Durante inúmeros séculos o mecanismo da visão foi reduzido a uma análise geométrica apoiada na propagação de raios visuais, uma espécie de setas fictícias que partiam do olho para atingirem o alvo pretendido. O *raio visual* tão citado por Alberti, resume numa só expressão duas palavras utilizadas separadamente mas indiferentes para os Gregos, *opis* e *akis*. *Aktines* [3] são os raios que conferem a sua cintilação a uma fonte luminosa; são também os traços do olhar, estes videntes que tornam perceptível o próprio acto da visão por oposição aos olhos fechados do cego. *Opseis* [4] são as imagens que se tem de um objecto; e quando se trata do olhar, este vocábulo grego refere-se a todas as linhas de visão que simultaneamente lhe facultam o que se vê.

Longos foram os tempos onde estes dois termos permaneceram indistintos um do outro. Para Homero, Hesíodo e Esquilo os corpos celestes estão dotados de visão de tal modo que expandem luz. O sol, essa estrela imponente, observa através dos seus raios os mortais que ilumina. Do mesmo modo *opsis*, a visão, designa simultaneamente o aspecto do que se vê, o facto de ver, o órgão da visão e o espectro dum morto ou a aparição de um Deus que se dá a ver; resumindo, refere-se ao que distinguimos e classificamos hoje por objectivo e subjectivo. Para que fosse legítima a analogia de *akis* com o nosso raio luminoso, necessário seria que a nossa fonte luminosa fosse *vidente*, ou seja, que a nossa visão irradiasse sobre tudo. Assim, durante dois milénios de óptica e de filosofia não foram elaboradas distinções consideráveis, que hoje são evidentes, entre uma sensação subjectiva, a visão, e um processo físico objectivo, a luz.

Charles Mugler no seu *Dicionário histórico da terminologia óptica dos Gregos*, menciona que «um grande número de representações sobre as quais os teóricos fundaram o edifício da ciência óptica dos Gregos encontra-se também uma parte nos poetas anteriores à era da reflexão filosófica e do racionalismo, em Homero, Hesíodo, Pindare, de maneira que se pode dizer que com os Gregos a óptica cientifica elaborada por uma elite de pensadores é fundada numa óptica popular feita a partir do conjunto de observações e de intuições de toda uma nação.» Continua acrescentando que «a terminologia da ciência óptica constituiu-se em parte por uma selecção operada pelos teóricos no vocabulário relativo à luz, às cores, à visão, tal como os poetas o conservaram.»[5]

Desde épocas muito remotas, que os fenómenos luminosos despertaram uma enorme curiosidade. «Auroras com dedos de rosa, crepúsculos de púrpura, auréolas, glórias, sóis múltiplos, arco-íris, que encantaram os poetas. Astros visíveis antes da hora prevista para a sua aparição, desvios anormais entre estrelas, luas coloridas, observadas desde há muito tempo pelos astrónomos.»[6] Razões suficientes para que este fogo divino se tornasse, numa primeira instância, uma preocupação filosófica. Como não podia deixar de ser, foi no mundo grego que se encetaram as discussões sobre este fenómeno natural. Encontramos no *Convívio* de Dante uma tentativa de elucidar o pensamento grego acerca da luz :

«O costume dos filósofos é chamar "claridade" à luz, na medida em que ela é no seu princípio aquilo que brota; chamar "raio", na medida em que corre através do

meio; chamar "esplendor", na medida em que é reflectida noutro lugar que ela ilumina.»[7]

A demanda de teorias que explicassem esta maravilha da natureza conduziu-os a uma certeza – os olhos constituem os principais órgãos sensoriais que o ser humano ostenta, como é mencionado por Platão no *Timeu*:

«Eles (os deuses) colocaram sobre o globo da cabeça, no lado da frente, em primeiro lugar, a cara, e sobre ela todos os órgãos úteis às previsões da alma, e decidiram que a parte virada para a frente tivesse parte na direcção. Os primeiros órgãos que eles fabricaram foram os olhos, portadores da luz (...) Ora, a vista, de acordo com o meu propósito, é para nós a causa de maior benefício porque das actuais considerações que fazemos sobre o universo, nenhuma teria sido feita se não tivesse visto os astros, nem o sol, nem o céu.» [8]

A descrição física das manifestações da natureza fez evoluir as percepções, fazendo com que fossem transfiguradas pelo conhecimento das teorias, o que levou a ciência helénica a abdicar do estudo da luz como um fenómeno físico, dedicando-se a aprofundar o mecanismo da visão e a investigar a natureza dos raios visuais.

Um aspecto que suscitou abundantes discussões, como referiu Alberti, diz respeito às propriedades dos raios visuais. Serão emitidos pelos olhos ou pelos objectos? Se nos parece actualmente certo que a luz se desloca para os nossos olhos, tal não era tão evidente há mais de dois mil anos atrás. De acordo com os atomistas Leucipo, Demócrito, Epicuro e Lucrécio os objectos despertam a sua presença, enviando através do espaço uma espécie de sombras em camadas muito finas que, num curto intervalo de tempo, penetram nos olhos apresentando a sua forma e as suas cores. Esta teoria é exposta de forma completa no quarto livro de *De natura rerum* de Lucrécio:

«Assim repito-o, sereis obrigados a reconhecer estas emanações dos simulacros que atingem os olhos e produzem em nós a sensação de vista (...). Tanto é verdade, que todos os corpos enviam continuamente emanações de todas as espécies, que provém de todos os lados, sem nunca parar, nem se esgotar. (...) A superfície de todos os corpos é guarnecida por uma multiplicidade de corpúsculos imperceptíveis que se podem separar, sem perder a sua ordem e a sua forma primitiva, e lançar com tanto maior rapidez quanto menos obstáculos tiverem de vencer.» [9]

Esta concepção não reuniu um grande número de defensores, pelo contrário, foi fortemente ridicularizada.

O conhecido mito da caverna que Platão descreve de forma extraordinária no sexto livro da *República*, assenta numa óptica em que a vista é obtida a partir da luz tendo o sol como a sua fonte universal:

«Ainda que exista nos olhos a visão, e quem a possui tente servir-se dela, e ainda que a cor esteja presente nas coisas, se não se lhes adicionar uma terceira espécie, criada expressamente para o efeito, sabes que a vista nada verá, e as cores serão invisíveis.(...) É aquilo a que chamas luz.(...) Sabes que os olhos quando se voltam para os objectos cujas cores já não são mantidas pela luz do dia, mas pelos clarões noturnos, vêem mal e parecem quase cegos, como senão tivessem uma visão clara.(...) Mas quando se voltam para os que são iluminados pelo Sol, acho que vêem nitidamente e torna-se evidente que esses mesmos olhos têm uma visão clara.» [10]

Contudo, as obras deste filósofo grego não se limitam a anunciar as suas ideias, expõem também de forma poética teorias defendidas por outros. Segundo Michel Authier, Platão «é para o historiador das ciências, uma armadilha graças à qual foi retido o pouco que sabemos dos seus predecessores»[11]. De facto, possuímos escassos conhecimentos sobre as fontes onde se baseou a ciência grega – o que hoje sabemos brotou de documentação secundária. Porém, descobrimos num dos textos de Platão que no século VI a.C. os pitagóricos consideravam a existência de um *quind*, uma espécie de fogo interior que saía do olho emitindo raios luminosos e se dirigia ao objecto observado para tacteá-lo, ocorrendo a impressão visual por reflexão sobre o órgão da visão. A visão e o tacto constituíam os sentidos activos em oposição à audição e ao odor. O que mais tarde é justificado por Aristóteles, por meio de um caricato argumento, a forma convexa do olho opõe-se à forma côncava das orelhas e das narinas. A verdade é que esta teoria conseguiu prevalecer cerca de dois mil anos.

Por seu lado, Empédocles procurou adaptar a sua teoria dos semelhantes ao mecanismo da visão – Platão dá-nos a conhece-la no *Timeu*:

«Então quando a luz do dia envolve a corrente da visão, o semelhante encontrando o semelhante, funde-se com ele e forma, na direcção dos olhos, um só corpo em toda a parte onde o raio visual, saindo de dentro bate no objecto que ele encontra no exterior. (...) Este corpo, inteiramente submetido às mesmas afecções pela semelhança das suas partes, se contacta, qualquer objecto, transmite esses movimentos através do corpo até à alma, e dá-nos a sensação graças à qual declaramos que vemos. Mas quando o fogo, irmão do fogo interior, se retira, à noite, este fica separado dele, porque cai sobre seres de uma natureza diferente, altera-se a ele mesmo, e extingue-se (...). Então deixa-se de ver e, além disso, o sono vem a seguir, porque as pálpebras, inventadas por Deus, para proteger a vista quando se cerram, também fecham o poder do fogo, dentro delas e, este uma vez apagado, acalma os movimentos internos, e este sossego traz o sono.» [12]

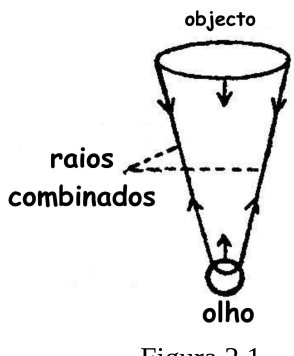


Figura 2.1.

Platão pretende assim transmitir que o olho e o objecto *formam um só*, logo a visão é um conhecimento.

Mais tarde, por intermédio de Arquitas de Tarento surge uma nova concepção, baseada na propagação de raios visuais rectilíneos, o que impulsionou fortemente a interpretação do mecanismo da visão e constituiu, como veremos, a base que sustenta a primeira tentativa de alcançar uma óptica científica. Arquitas defende que o *fogo sai do olho em linha recta e vai tocar nos objectos observados*. Esta noção irá influenciar as teorias futuras, nomeadamente Aristóteles. Contrariando as teorias existentes, este pensador grego defende que o meio entre o objecto e o olho do observador desempenha um papel fundamental, meio este que podia ser, por exemplo, o ar ou a água. Quando este meio está em repouso há obscuridade, mas excitado pelo fogo do objecto passa a estar activo, tornando-se transparente e permitindo às cores do objecto viajarem até aos nossos olhos:

«(...) a luz é a cor do diáfano por acidente (...) Mas aquilo a que chamamos diáfano não pertence propriamente ao ar ou à água nem a qualquer outro dos corpos assim denominados, mas é de tal natureza, de tal força comum, que não existe separadamente, mas está nos corpos (...). A natureza da luz está pois no diáfano indeterminado.» [13]

Perante o que foi exposto constatamos que «entre os filósofos gregos não existem concepções estáveis e unanimemente partilhadas sobre a natureza da luz. A primazia dada à vista sobre todos os outros sentidos colocará os problemas suscitados pela visão no centro das preocupações dos grandes "cientistas" gregos». [14]

L'ottica **euclidiana**

À *buonna maniera greca anticca* os homens do pensamento criaram múltiplas teorias. Contudo, a óptica geométrica já era considerada como uma disciplina autónoma, dotada de hipóteses e de métodos próprios. Aristóteles nomeia-a como um dos ramos da matemática aplicada, à semelhança da mecânica e da astronomia.

Apoiando-se na concepção de Arquitas, Euclides de Alexandria escreve um tratado sobre este domínio, sendo considerado como o primeiro da história. À semelhança dos *Elementos*, também a sua *Óptica* é desenvolvida a partir do conhecido método axiomático. Porém, não é pertinente a comparação entre estes dois tratados, uma vez que a geometria nessa época tinha já alcançado algum apogeu, enquanto que as ciências físicas eram ainda incipientes. Como sabemos, Euclides inspirou os seus *Elementos* numa doutrina geométrica fortemente avançada, importada do Egipto através de Anaximandro e Tales, e numa aritmética pitagórica algo refinada, não se passando o mesmo na sua interpretação geométrica de ilusões visuais. A sua *Óptica* é ainda muito embrionária, é preferível considerá-la como uma perspectiva pré-científica, subordinada a especulações filosóficas e a hipóteses confusas sobre a natureza da luz e fisiologicamente erradas do ponto de vista da organização do olho. De qualquer modo, este tratado sintetiza os esforços realizados pelos estudiosos dos séculos anteriores, que mais tarde influenciaram Ptolomeu e outros matemáticos gregos, como Papus – este refere no sexto livro da sua *Colecção Matemática* um conjunto de obras indispensáveis para quem pretende estudar astronomia, onde consta a *Óptica* e os *Elementos* de Euclides.

Nos resultados coligidos pelo geómetra alexandrino, os raios visuais são regidos por uma geometria elementar – o único ponto que participa na visão é o olho, ficando o mundo reduzido a uma representação que se pode observar à esquerda, à direita, para cima ou para baixo. Provavelmente estes resultados constituem os primeiros elementos de uma física matemática. A carência de leis físicas na Grécia Antiga merece uma encantadora justificação de Michel Serres: «os Gregos teriam hesitado (diante da lei física), porque haviam pequenos deuses que estavam instalados no espaço, cada um no seu departamento: quando uma hamadríade guarda cada árvore, quando uma ninfa em cada fonte acautela a expansão das águas, quando no mar pupulam as sereias e os prados de faunos, mil singularidades se opõem à afirmação da regra geral. É necessário esperar o Deus único para que a extensão se esvazie subitamente e nenhuma localidade obstrua o universo homogéneo.»[15]

Para Gérard Simon os textos ópticos de Platão, Aristóteles e Euclides expõem uma óptica que transforma o problema da visão numa investigação geométrica, embora os resultados obtidos sejam limitados. Um dos principais factores deve-se à ausência de considerações de natureza anatómica, como a constituição do olho, não havendo porém qualquer referência quanto à existência da retina e às imagens que nela se formam.

A *Óptica* euclidiana é constituída por dois livros, a *óptica*, propriamente dita, e a *catóptrica*. A adequação do título merece a seguinte justificação de Giuseppe Ovio:

«Elas (óptica e catóptrica) abraçam, no seu complexo, tudo o que na Antiguidade se conhecia da Óptica. Em muitas traduções destas duas obras o título de "óptica" dado à primeira parte é substituído por "perspectiva". Os dois termos equivalem-se, nos tempos passados, sem instrumentos, sem conhecimentos sobre a natureza e as propriedades da luz, toda a óptica reduzia-se ao estudo "daquilo que se vê", ainda que fosse por meio do espelho, isto é, a simples perspectiva.» [16]

A *óptica*, propriamente dita, inicia-se com a exposição de sete postulados, sobre os quais se desenvolve todo o tratado. No primeiro dos postulados, Euclides admite que as linhas rectas emitidas pelo olho se propagam divergindo para as grandezas. É evidente nesta hipótese a concepção defendida por Arquitas de que os olhos tal como os corpos luminosos, emitem raios propagando-se em linha recta. Esta hipótese continuará a ser admitida pelos sucessores de Euclides, embora seja fortemente atacada pelos físicos árabes.

O segundo postulado considera que os raios visuais engendram um cone tendo o contorno da grandeza como base e o vértice no interior do olho. Encontramos nesta hipótese uma diferença fundamental em relação ao mecanismo da visão proposto por Alberti – a configuração de um cone e não de uma pirâmide. Esta teoria deve-se possivelmente a Alhazen que aperfeiçoou os conhecimentos gregos. No entanto, as traduções realizadas da obra deste sábio árabe não têm sido muito esclarecedoras. Segundo a versão mais recente, Mark Smith refere que Alhazen defendia a formação de um cone luminoso. Já David Lindberg traduz essa estrutura de radiação por uma pirâmide. Esta ausência de conformidade deve-se à expressão latina *pyramis*, cuja tradução literal é cone, sendo *conus*, o seu vértice. As versões mais antigas, como a edição de Risner de 1572, mencionam *pyramis rodunda ou conica*; mas esta tradução parece um pouco descabida e redundante: *cone cónico*. Na realidade, tudo não passa de um problema de tradução devido ao facto de não serem matemáticos a realizá-la. Por este motivo, desconhecemos a verdadeira origem da pirâmide albertiana.

Apesar desta segunda hipótese ser falsa, visto Euclides não ter em consideração aspectos da natureza fisiológica e anatómica do olho, permitiu aos primeiros trabalhos de uma óptica mais teórica que experimental, tirarem um certo número de verdadeiras proposições geométricas. Arquimedes, filho de um astrónomo e um brilhante observador, já não se acomodava à visão unipontual. Apesar de não possuirmos as suas obras sobre óptica, este assunto é abordado num passo do *Arenário* para demonstrar que o diâmetro aparente do sol no horizonte, é maior que o lado do chiliagone inscrito no maior círculo do universo. Arquimedes utiliza um método experimental engenhoso para reforçar *«como os olhos não vêem a partir dum ponto único, mas duma certa grandeza (...)»*[17]. Embora primitivamente, o matemático de Siracusa antecipa, como veremos, a concepção que viria a ser elaborada pelos sábios árabes.

No terceiro postulado, Euclides menciona que *as grandezas sobre as quais caem os raios visuais são vistas, enquanto que aquelas sobre as quais não caem, não o são*. Defende assim que os raios visuais apresentam intervalos entre si, como se se tratassem de elementos discretos, não constituindo um feixe homogéneo – o que justifica a nossa dificuldade em encontrarmos um pequeno objecto caído no chão, como por exemplo, uma agulha.

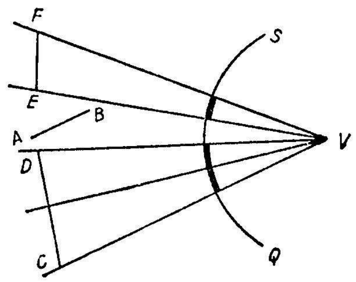


Figura 2.2.
Seja V o ponto que indica o olho do observador e AB o segmento de recta representativo de uma agulha. Como Euclides postula os raios visuais como discretos, o olho não consegue percepcionar AB devido à posição em que este se encontra.

Devemos realçar um aspecto importante. Parece-nos um pouco contraditório que o geómetra grego tenha estabelecido o mecanismo da visão baseado num cone e de seguida defendido a discrição dos seus raios, quando ele tão bem sabia que este é um sólido de revolução e como tal é gerado por um movimento contínuo. Por conseguinte, os raios não deviam ser considerados como estruturas individuais, mas sim como elementos que num todo formam o cone, apresentando este feixe de raios portanto uma continuidade e constituindo por isso, um feixe homogéneo. Duras foram as críticas a este postulado. Até o seu compatriota Ptolomeu, que o seguiu em tantos passos, não ficou indiferente a tal incorrecção.

No quarto postulado, Euclides enuncia que *as grandezas vistas sob ângulos maiores (mais pequenos, iguais) aparecem maiores (mais pequenas, iguais)*. Este postulado, como sugere Giuseppe Ovio, poderá ser enunciado de uma forma mais sintetizada: *a grandeza de uma imagem é directamente proporcional à grandeza do ângulo que compreende o objecto*.

Nos quinto e sexto postulados, respectivamente, refere que *as grandezas vistas sob ângulos mais elevados parecem mais elevados, sob ângulos mais baixos parecem mais baixos; e, de maneira semelhante, parece mais à direita os que se vêem sob raios mais à direita e mais à esquerda os que se vêem mais à esquerda*. Estas premissas são utilizadas para a demonstração de fenómenos ilusionistas, que resultam das imagens que se formam tendo em conta a constituição anatómica do nosso olho e a *conformação do espírito* em interpretá-las.

No sétimo postulado Euclides indica que *as grandezas vistas sob ângulos mais numerosos aparecem mais distintamente*, ou seja, quanto maior for a amplitude do ângulo de visão, melhor é a percepção do corpo observado.

Para além dos postulados indicados, e tendo em conta apenas a *óptica* propriamente dita, este tratado é constituído por cinquenta e oito proposições que pretendem interpretar os efeitos causados pela distância à percepção visual das dimensões e das formas dos objectos; os fenómenos ópticos relacionados com esferas, cilindros, cones e figuras em movimento, e problemas de altimetria e longimetria.

Apresentamos de seguida uma digressão pelos principais teoremas desta *óptica*, analisando-os e tecendo algumas considerações relativamente à sua aplicação na perspectiva linear.

Na primeira proposição, Euclides enuncia que *nenhum objecto pode ser visto na sua totalidade por um só golpe de vista*. Vejamos os argumentos utilizados para a demonstração. Considera que o segmento AΔ representa o objecto observado e o ponto B, o olho, a partir do qual incidem os raios visuais BA, BΓ, BK e BΔ.

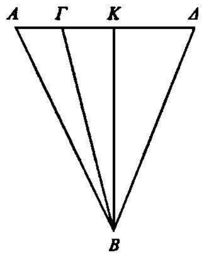


Figura 2.3.

Uma vez que Euclides defende a propagação divergente dos raios visuais no espaço, estes não incidem de uma forma contínua sobre AΔ, produzindo-se assim neste segmento intervalos resultantes da não incidência destes raios, o que está de acordo com o primeiro postulado. Consequentemente AΔ não será visto na sua totalidade. O sábio alexandrino termina a demonstração, dizendo que os raios visuais se deslocam rapidamente e portanto iludem-nos ficando a sensação de que todo o objecto foi visto, quando na verdade não isso não ocorreu.

Esta situação é em termos psicológicos verdadeira, porém baseia-se num postulado falso como apontámos. A demonstração indicada apoia-se em vão sobre a primeira hipótese, segundo a qual os raios visuais seriam separados por intervalos nos quais as partes do corpo observado permaneceriam obscuras, hipótese na insuficiência da qual o fim da demonstração parece por outro lado suprir, constatando que um objecto parece todavia observado com uma só olhadela devido à extrema rapidez com que o corpo é observado, sendo este abrangido pelos raios divergentes emitidos pelo olho.

A segunda proposição estabelece que *das grandezas iguais desigualmente distantes, as mais próximas vêem-se com maior precisão do que as mais afastadas*. A demonstração assenta em princípios idênticos à anterior.

Seja B o ponto que caracteriza o olho e os segmentos ΓΔ e KΛ as grandezas observadas supostamente iguais e paralelas. Consideremos que o olho está situado mais próximo de ΓΔ do que KΛ , os quais são percepcionados pelos raios BΓ, BΔ, BK e BΛ.

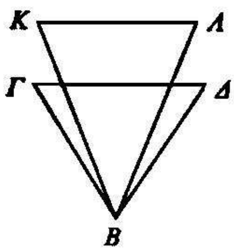


Figura 2.4.

Os raios visuais incidentes em KΛ não intersectam os pontos Γ e Δ, caso isso acontecesse o segmento KΛ seria maior que ΓΔ e tínhamos suposto que seriam iguais (congruentes). Assim, Euclides constata que o segmento ΓΔ será visto através de um maior número de raios visuais do que ΚΛ, ou seja, que a amplitude de $\Gamma\hat{B}\Delta$ é maior que a de $K\hat{B}\Lambda$. Portanto, pelo sétimo postulado, ΓΔ será observado com maior precisão que ΚΛ.

Continuando a comparação de grandezas, o geómetra alexandrino mostra através da quinta proposição que as *grandezas iguais colocadas a diferentes distâncias parecem desiguais e parece sempre maior aquela que estiver mais próxima do olho*.

Principia-se a demonstração considerando que os segmentos AB e ΓΔ representam duas grandezas iguais situadas a diferentes distâncias, e o ponto E, indica a posição do olho, o qual está mais próximo de AB do que ΓΔ.

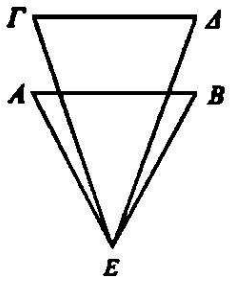


Figura 2.5.

Do ponto E viajam os raios AE, EB, EΓ e EΔ ao encontro dos segmentos referidos. Segundo o quarto postulado, *as grandezas observadas sob ângulos maiores parecem maiores*, como a amplitude do ângulo $A\hat{E}B$ é maior que $\Gamma\hat{E}\Delta$, então AB parecerá maior que ΓΔ, o que conclui a demonstração.

De acordo com Lawrence Wright, a aparente diminuição do tamanho dos objectos com o aumento da distância, era já conhecida pelo menos no século VIII a.C.. De acordo com um texto encontrado numa tábua síria, um certo Etana quando estava perto do trono celeste da deusa Isthar foi abalroado por uma águia, mas a calma que conseguiu manter perante tão pavorosa circunstância, permitiu-lhe observar que a terra diminuía progressivamente de tamanho até se converter num ponto. Mesmo que esta história não passe de uma lenda, a verdade é que estamos de acordo com o referido autor. De facto, se observarmos atentamente os baixos-relevos egípcios, mesmo aqueles datados do final do Antigo Império e da Época das Pirâmides [18], é notório o esforço efectuado na atribuição de algum sentido de profundidade. Um exemplo deste empenho é o baixo relevo de Ipi que se encontrava no túmulo de Sakará, hoje pertencente ao Museu do Cairo. Neste baixo-relevo verificamos que as alturas dos servos, colocados na última fila, vão diminuindo à medida que se distanciam do observador.

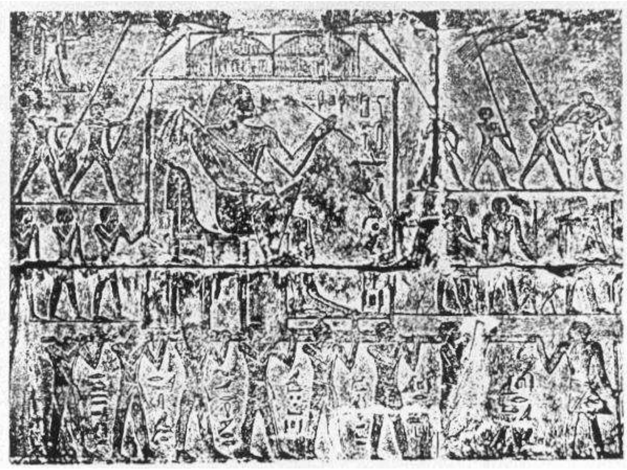


Figura 2.6. Baixo relevo de Ipi.

Os historiadores de arte são unânimes ao afirmarem que os artistas egípcios não alcançaram a redução das proporções das figuras devido ao efeito perspectivo, mas com o empenho manifestado conseguiram esboçar um espaço pictórico ilusório, ainda que rudimentar. Um outro exemplo, encontra-se no folheto de *Arte Egípcia da Gramática dos Estilos* dirigida por Henry Martin – trata-se de um baixo relevo pintado de Ibsambul, em que se apresenta Ramsés II no seu carro de Guerra. Posta de parte a figura gigantesca e isolada do faraó, os três carros apresentados obedecem igualmente à quinta proposição euclidiana.

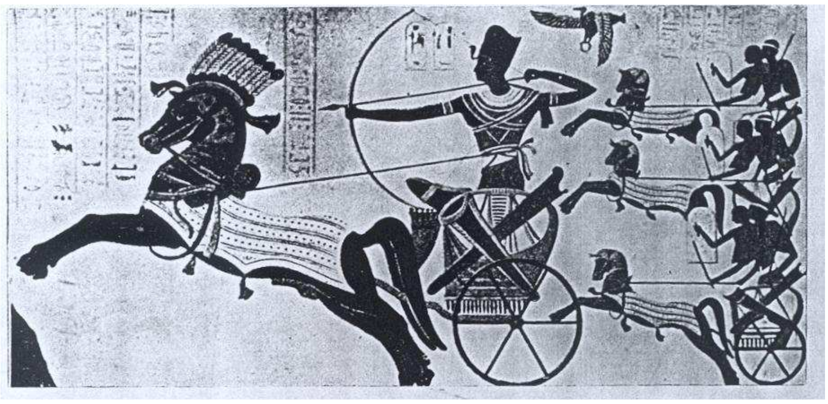


Figura 2.7. Ramsés II no seu carro de Guerra.

Como referimos, se observarmos um objecto e nos formos distanciando dele, o seu tamanho irá diminuir até ficar reduzido a um ponto. Obviamente que haverá uma distância em que este deixará de ser visto. Esta ideia é-nos transmitida pelo sábio alexandrino na terceira proposição: *para qualquer grandeza existe uma determinada distância além da qual deixa de ser visível*. Euclides demonstra-a representando o olho pelo ponto B e a grandeza observada pelo segmento ΓΔ, sendo este deslocado para uma distância tal, de modo a ficar compreendido exactamente no intervalo mínimo de dois raios.

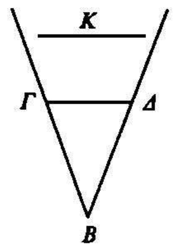


Figura 2.8.

Se continuarmos este deslocamento até K, o segmento ΓΔ deixa de ser atingido pelos raios visuais e de acordo com o terceiro postulado, não será visível.

Apoiando-se nos resultados anteriores, Euclides enuncia na nona proposição um efeito causado na observação de um corpo, motivado pela distância a que este se encontra – *as grandezas rectangulares vistas à distância parecem arredondadas*. Esta proposição tem em consideração a acção da radiação luminosa sobre o objecto mais ou menos afastado do observador. Apesar de ser um fenómeno conhecido pelos antigos, a física rudimentar existente ainda não permitia explicá-lo. Para o tradutor francês Ronald Fréart de Chantelou [19], esta proposição não carece de demonstração matemática, pois o senso comum encarrega-se de a provar: «não é preciso de modo nenhum procurar outra demonstração mais natural que a experiência normal a qual nos permite observar de longe as torres quadradas, os bastiões, as meias luas, os redutos e outras tais estruturas de arquitectura militar, que primeiramente nos parece redondo. E a razão desta surpresa do olho é porque as extremidades dos ângulos são sempre as mais pequenas partes dum corpo, elas começam também por ser as primeiras a desaparecerem no distanciamento e é certo que o resto da massa aparecerá, confusamente numa forma obtusa e convexa, que é uma espécie de arredondamento.» [20]

Mas vejamos os argumentos usados por Euclides nesta demonstração. Em primeiro lugar é necessário termos presente que para qualquer objecto há uma distância, a partir da qual este deixa de se distinguir, tal como demonstrámos na terceira proposição. Consideremos agora, o rectângulo ADH visto à distância e situado num plano mais elevado que o observador, sendo o seu olho representado pelo ponto V.

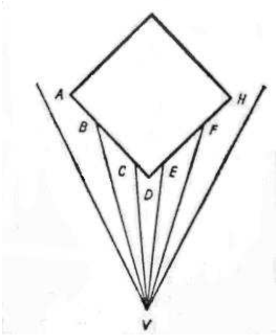


Figura 2.9.

Atendendo ao terceiro postulado, Euclides conclui que os pontos nas proximidades do vértice D não são vistos, enquanto os "numerosos" pontos dos lados AD e DH, por exemplo, B, C, E e F, são percepcionados, sucedendo o mesmo aos vértices A e H. O que justifica o facto das partes que se aproximam dos vértices perderem a nitidez e desaparecerem em primeiro lugar; por conseguinte, todo o objecto parece *oblongo*.

Segundo Carlos del Negro, a segunda, terceira e nona proposições têm uma aplicação tão evidente na pintura que parecem «ter[em] sido concebidas especialmente para esta, afim de que se apaguem e não detalhem os objectos longínquos»[21].

Uma outra proposição onde Euclides também refere a distorção das imagens realizada pelos nossos olhos, é a trigésima sexta, onde menciona uma pura ilusão visual. Se observarmos obliquamente um carro, verificamos que as suas rodas perdem a circularidade, o que se deve à incidência oblíqua dos raios visuais, daí Euclides dizer que *as rodas dos carros parecem uma vezes circulares, e outras, oblongas*. O geómetra grego explica este fenómeno, por meio da figura seguinte. Define que ΑΒΓΔ representa uma roda e traça os diâmetros ΒΑ e ΓΔ que se intersectam perpendicularmente no ponto Ε, tendo em consideração que o olho não está no plano do círculo.

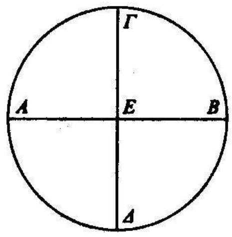


Figura 2.10.

Se a recta traçada do olho até ao centro do círculo formar ângulos rectos com o plano, ou se ela for igual ao raio, os diâmetros parecem todos iguais e portanto a roda parecerá circular. Mas se a recta traçada desde o olho até ao centro do círculo não formar ângulos rectos com o plano, nem for igual ao raio, os diâmetros parecerão desiguais e assim a roda parecerá oblonga.

Continuando a nossa exposição por esta perspectiva essencialmente comparativa, chegamos à quarta proposição apoiada no conhecimento das grandezas e das suas aparências por medidas angulares. Euclides enuncia-a do seguinte modo: *dos comprimentos iguais considerados sobre a mesma recta e equidistantes, aqueles que se vêem a maior distância parecem menores*.

Para a demonstração, o sábio grego considera que os segmentos ΑΒ, ΒΓ e ΓΔ são iguais e todos situados sobre a mesma recta. Traça, formando um ângulo recto com ΑΔ, o segmento ΑΕ na extremidade do qual está situado o olho (Ε).

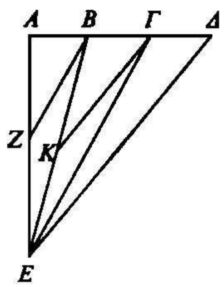


Figura 2.11.

Atendendo a estas condições, pretende provar que o segmento ΑΒ parecerá maior que ΒΓ e ΒΓ maior que ΓΔ.

Começa por unir os pontos Β, Γ e Δ a Ε (raios visuais) e desenha uma paralela a ΓΕ passando por Β, ΒΖ. Uma vez que o segmento ΒΖ é paralelo a um dos lados (ΓΕ) do triângulo ΑΕΓ, está em condições de aplicar a segunda proposição do Livro VI dos

Elementos: *se uma linha recta for desenhada paralelamente a um dos lados de um triângulo, então intersecta os lados do triângulo proporcionalmente*. Por conseguinte,

$$\frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EZ}}{\overline{ZA}}$$

como por hipótese os comprimentos de BΓ e BA são iguais, o comprimento de EZ também é igual ao de ZA e portanto Z é o ponto médio de AE . Por outro lado, o comprimento de BZ é maior que ZA e portanto também é maior que ZE. Assim a amplitude do ângulo $Z\hat{E}B$ é maior que a do ângulo $Z\hat{B}E$, mas a de $Z\hat{B}E$ é igual à de $B\hat{E}\Gamma$, logo a amplitude de $Z\hat{E}B$ é maior que a de $B\hat{E}\Gamma$. Assim, pelo quarto postulado, AB parecerá maior que BΓ. Analogamente, se traçarmos uma paralela a ΔE passando pelo ponto Γ, concluímos que BΓ parecerá maior que ΓΔ.

Uma consequência imediata desta proposição, reduzindo-se assim a um seu corolário, é a sétima proposição, onde Euclides enuncia que *grandezas iguais colocadas sobre a mesma recta mas situadas a diferentes distâncias do olho, parecem desiguais*.

O geómetra inicia a demonstração considerando que AB e ΓΔ são duas grandezas iguais sobre o mesmo segmento AΔ, sem estarem colocadas uma em continuação da outra, mas situadas a distâncias desiguais do olho, o qual é indicado pelo ponto E. Sobre o segmento referido, incidem os raios EA e EΔ, sendo o comprimento de EA maior que EΔ. Pretende mostrar que ΓΔ parecerá maior que AB.

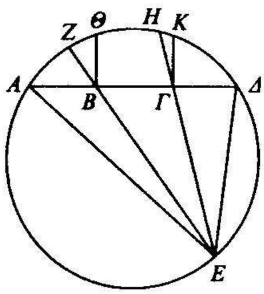


Figura 2.12.

Começamos por unir o ponto E com os pontos B e Γ, obtemos assim os segmentos EB e EΓ. De seguida circunscreva-se um círculo em torno do triângulo AEΔ e sejam BZ e ΓH prolongamentos dos segmentos EB e EΓ, respectivamente. Em B e Γ trançam-se dois segmentos perpendiculares a AΔ, BΘ e ΓK, os quais são congruentes. Esta congruência pode ser justificada à custa da mediatriz de AΔ, uma vez que os referidos segmentos AB e ΓΔ são congruentes e equidistantes do ponto médio da referida mediatriz, a qual também pode ser considerada como um eixo de simetria do círculo representado na figura, visto coincidir com o diâmetro. Por conseguinte o ponto Δ é imagem de A, Γ é imagem de B e analogamente o segmento BΘ é imagem de ΓK. Como a simetria axial é uma isometria, estes segmentos têm de ser congruentes.

Por outro lado, como AB é congruente a ΓΔ e o ângulo $A\hat{B}\Theta$ tem igual amplitude que $\Delta\hat{\Gamma}K$, o arco de circunferência $\overset{\frown}{A\Theta}$ é congruente ao arco $\overset{\frown}{\Delta K}$. Consequentemente $\overset{\frown}{\Delta K}$ é maior que $\overset{\frown}{ZA}$, logo o arco $\overset{\frown}{H\Delta}$ é muito maior $\overset{\frown}{ZA}$. Mas o ângulo $A\hat{E}Z$ está sobre o arco de circunferência $\overset{\frown}{ZA}$ e ângulo $H\hat{E}\Delta$ está sobre o arco $\overset{\frown}{H\Delta}$, assim a amplitude de $H\hat{E}\Delta$ é maior que $A\hat{E}Z$. Como AB é observado através do ângulo $A\hat{E}Z$ e $\Gamma\Delta$ através de $H\hat{E}\Delta$, então pelo quarto postulado, $\Gamma\Delta$ parecerá maior que AB.

Os artistas do Renascimento fizeram uso destas duas proposições euclidianas para especularem um pouco sobre a sua aplicação nas construções monumentais da Antiguidade, nomeadamente na Coluna de Trajano em Roma, erigida entre 106 e 113 a.C. para comemorar as campanhas vitoriosas do imperador sobre os Dácios [22]. Esta coluna apresenta uma faixa contínua em espiral com baixos relevos revestindo toda a superfície desde do capitel até à base, onde é narrada a história das Guerras Dácias. O mito de que esta espiral crescia em altura, sendo considerado como um verdadeiro prodígio da óptica, foi motivo de longas discussões. Em 1585, Lomazzo, baseando-se na lei óptica de que os objectos que vemos do mesmo tamanho subentendem ângulos visuais iguais, assinala que as bandas se viam iguais porque a sua largura aumentava ao aumentar a altura. Somente no século seguinte, em 1646, por intermédio de Athanasius Kircher, acontece a correcção deste raciocínio. Apoiando-se nos conselhos e num esquema de Albrecht Dürer, Kircher realiza um desenho em que a espiral apenas dá sete voltas, apesar de na realidade apresentar vinte e três.

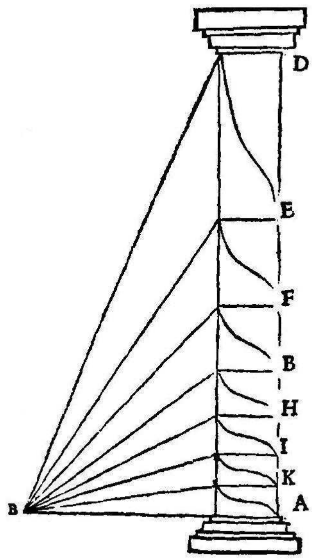


Figura 2.13. A Coluna de Trajano segundo Kircher.

Dürer, perfeito conhecedor da óptica euclidiana, recomenda no seu *Underweissung der Messung* que se deve aumentar proporcionalmente em altura as dimensões de uma figura para compensar a contracção originada pela redução do ângulo visual, referindo ainda que as linhas de um texto, escritas numa parede, aparentam ser todas da mesma altura se o tamanho das letras for aumentando conforme for subindo, de maneira a serem iguais os respectivos ângulos visuais.

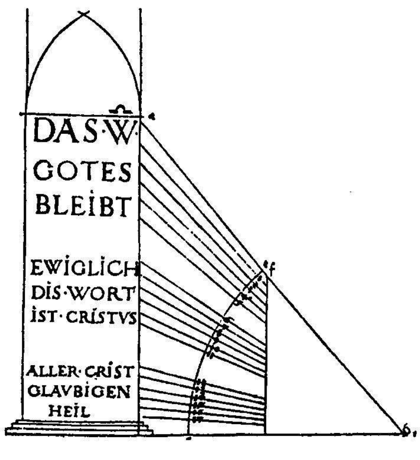


Figura 2.14. Inscrição de Dürer: *“A palavra de Deus é eterna. Esta palavra é o Cristo, a salvação de todos os crentes”.*

Porém, somente em 1663, Fréart de Chantelou, admitindo o entusiasmo nesta ilusão óptica e mencionando que *a arte corrige os defeitos da natureza*, conseguiu mostrar que tudo não passava de um mito. Não foi difícil comprová-lo medindo o original, uma vez que no interior da coluna existe uma escada em caracol iluminada por uma série de orifícios. Quando decidiram fazer a verificação, os sábios ficaram perplexos: a banda em espiral tinha igual largura em todos os níveis e o subtil refinamento era pura ilusão. Se as vinte e três voltas em espiral estivessem realmente corrigidas para que parecessem iguais, vistas desde o ângulo visual de 60º, a banda mais alta teria de ser no mínimo três vezes mais larga que a primeira de baixo. Isto só é válido para o caso em que os comprimentos são estabelecidos de modo a garantir a igualdade entre os ângulos.

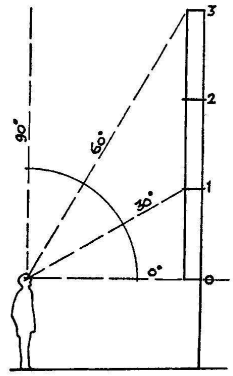


Figura 2.15.

E nesse caso a Coluna de Trajano teria de ser representada do seguinte modo:

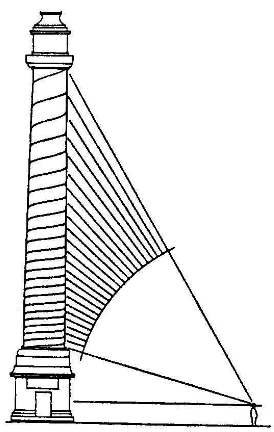


Figura 2.16.

Estas proposições estão em franca contradição com a perspectiva linear, por esse motivo a correcção de distâncias com a altura constituí um efeito conhecido como contraperspectiva. De acordo com as regras da perspectiva linear, os comprimentos iguais perspectivam-se iguais entre si. Insistindo na validade da igualdade dos comprimentos, se um objecto mais distante for visto de um ângulo menor, o mesmo sucede na sua imagem perspectiva. Assim pela figura seguinte constatamos que, se $a = b = c$ então $a' = b' = c'$. Apesar de percebermos que estes comprimentos são iguais, a impressão visual que deles realizamos indica a existência de uma aparente diminuição.

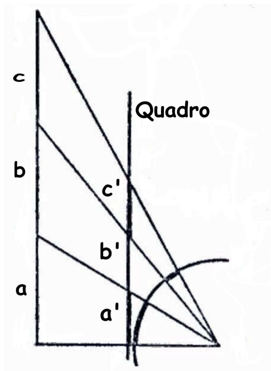


Figura 2.17.

Por outro lado, se considerarmos que os comprimentos a, b e c são estabelecidos entre si de modo a garantir a igualdade dos ângulos α, β e δ, estes três comprimentos serão claramente desiguais. Porém, a sua representação numa superfície côncava como a retina, apresenta-os aproximadamente iguais, enquanto a projecção numa superfície plana mantém os comprimentos desiguais.

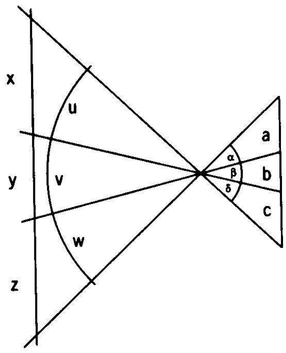


Figura 2.18.

Torna-se deste modo evidente, a grande diferença entre a perspectiva *naturalis* e a *artificialis*. [23]

À semelhança da célebre coluna, outras aplicações destas duas proposições ocorreram na Antiguidade procurando-se corrigir os efeitos perspéctivos. Um dos que condenava esta prática ilusionista foi Platão, chegando mesmo a denunciar as obras dos escultores que aumentavam as proporções das figuras destinadas a edifícios altos, levando assim em consideração o ponto de vista do observador: «*se uma pessoa pudesse ter dessas figuras uma visão correcta, elas nem sequer se pareceriam com o que pretendem parecer*»[24]. Platão conhecia certamente um clássico episódio que nos é narrado por Plínio:

«Desejando consagrar uma maravilhosa imagem de Minerva no topo do alto pilar, os atenienses mandaram que Fídias e Alcamenes pusessem mãos à obra, na intenção de escolher, no fim, a melhor das duas estátuas. Alcamenes, que nada sabia de geometria e de óptica, fez uma deusa que pareceu belíssima a todos os que a viram de perto. Fídias, pelo contrário... considerou que a forma da imagem deveria mudar de acordo com a altura do pedestal onde ia ficar e por isso fez a deusa de lábios abertos, nariz um tanto fora do vulgar e assim por diante... quando as duas imagens foram levadas para o ar livre e comparadas, Fídias correu grande risco de ser apedrejado pela multidão... mas só no momento em que foram ambas postas na altura indicada. Os doces traços que Alcamenes conseguira com tanta diligência desapareceram; mas desapareceram também as deformidades que tinham parecido tão cruas na estátua de Fídias. O povo riu-se de Alcamenes, e Fídias venceu a competição.» [25]

Estes factores fizeram com que o filósofo grego criasse uma certa aversão à pintura, uma vez que «*o artista não criava a coisa em si, mas em contrapartida, um mero sonho ou ilusão. Era como o sofista, que conjura na mente dos outros uma impressão que não corresponde à realidade.»* [26]

Regressemos à óptica euclidiana. A proposição que mais se destaca por estar em perfeita sintonia com a perspectiva linear, é a número seis: *as paralelas vistas à distância parecem convergentes*. Para a demonstração, Euclides distingue dois casos possíveis: no primeiro considera que o olho está no mesmo plano que as linhas paralelas e no segundo, o órgão da visão encontra-se num plano mais baixo.

Consideremos duas grandezas paralelas AB e ΓΔ e seja o olho representado pelo ponto E. Incidam nas grandezas referidas os raios visuais EB, EZ, EΘ, EΔ, EH, EK e tracemos os segmentos de recta BΔ, ZH e ΘK.

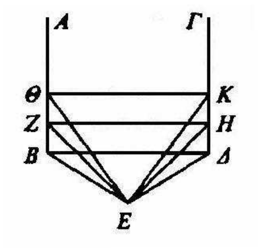


Figura 2.19.

Como a amplitude do ângulo $B\hat{E}\Delta$ é maior que $Z\hat{E}H$ então, pelo quarto postulado, BΔ parece maior que ZH. Por outro lado, a amplitude de $Z\hat{E}H$ é maior que $\Theta\hat{E}K$, assim ZH parecerá maior ΘK, logo o comprimento BΔ parece maior que ZH e ZH maior que ΘK. Portanto, os intervalos entre as paralelas não parecem sempre iguais, mas sim cada vez menores à medida que se vão distanciando do olho. Vejamos agora o caso em que o olho não se encontra no mesmo plano que as paralelas.

Euclides fundamenta o seu raciocínio através da figura seguinte, supondo que as paralelas estão situadas num plano mais elevado e começando por desenhar a perpendicular a AB desde o ponto A (representativo do olho do observador) ao plano considerado, onde os segmentos ΛΞ, KN, ΘM são paralelos.

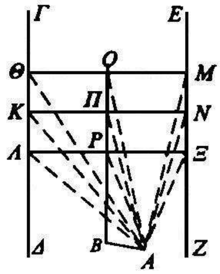


Figura 2.20.

De seguida traça a partir de B, o segmento BP perpendicular a ΛΞ e prolonga BP até O. "Apela ao observador para incidir" os raios visuais AΛ, AK, AΘ, AΞ, AN, AM e desenha os segmentos AP, AΠ e AO. Como o segmento AP foi traçado desde o ponto A até PΞ, então AP é perpendicular a PΞ, tal como AO é perpendicular a OM e AΠ a ΠN, portanto os triângulos APE, AΠN e AOM são rectângulos. Assim o comprimento de ΠN é igual PΞ e o de ΠA é maior que AP, então a amplitude do ângulo $\Xi\hat{A}P$ é maior que $\Pi\hat{A}N$. De acordo com o quarto postulado, PΞ parecerá maior que ΠN e analogamente PΛ parecerá maior que ΠK. Por conseguinte, *toda a grandeza ΛΞ se verá maior que toda a grandeza KN e portanto também assim, as grandezas são vistas como convergentes*.

Uma consequência imediata desta proposição, também de acordo com as regras da perspectiva linear, é décima segunda proposição, na qual Euclides enuncia que *das grandezas que estão colocadas sobre os pontos mais distantes de rectas paralelas estendidas diante do olho, as que estão à direita parecem inclinar-se para a esquerda e as que estão à esquerda parecem inclinar-se para a direita*.

Para a demonstração, o geómetra grego baseia-se no sexto postulado. Considera que as rectas AB e ΓΔ são duas grandezas observadas e E, o ponto que representa o olho, a partir do qual incidem os raios EΘ, EK, EA, EZ, EH e EΓ nas grandezas referidas. Pretende mostrar que EZ, EH, EΓ parecem inclinar-se para a esquerda, enquanto EΘ, EK e EA para a direita.

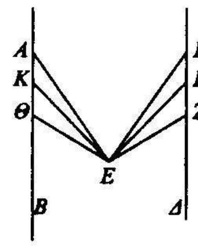


Figura 2.21.

Realiza a demonstração atendendo a um simples argumento, o segmento EZ está mais à direita que EH e EH mais que EΓ, transmitindo a impressão que EΓ troca de direcção passando para a esquerda de EH e EH para a esquerda de EZ. Analogamente, EK, EA e EΘ parecem desviar-se para a direita.

As proposições já enunciadas, não oferecem dúvidas quanto à perspicácia do poder de observação manifestado por Euclides e pelos seus antecessores. No comentário redigido por Proclo aos *Elementos*, este refere que Gémino apresentou três subdivisões desta ciência da visão: a *óptica* propriamente dita, a *catóptrica* e a *cenografia*. A primeira ocupa-se da teoria geométrica que envolve a percepção visual e as ilusões de perspectiva que dela resultam, talvez tenham sido estes os motivos que levaram os tradutores da óptica euclidiana a designá-la por perspectiva. A catóptrica compreende a teoria dos espelhos, e a cenografia é uma pura aplicação das regras de perspectiva à pintura, escultura e arquitectura, em que predomina essencialmente a técnica artística e não a ciência propriamente dita, o que depreendemos das seguintes palavras proferidas por Gémino:

«Sendo um ramo da óptica, a cenografia procura traçar, com correcção, as imagens de edifícios. Porém, não é possível representá-las como na realidade são, nem como aparentam ser. Por isso, tentam os cenógrafos representar o modo como as proporções reais se nos afigurarão ao serem representadas, e não as proporções reais. O propósito do arquitecto está na feitura de uma representação que transmita a impressão de equilíbrio. Ele pretende ainda encontrar soluções para os logros da visão e, para isso, não se esforça por dar a proporção real, mas sim a proporção de acordo com a impressão visual. Assim, como uma coluna cilíndrica, uma vez enfraquecida parecerá mais estreita no meio, o arquitecto alargá-la-á nesse ponto. Ao desenhar um círculo, não o traça como um círculo, mas como uma elipse; ao quadrado representá-lo-á em forma de rectângulo e a um conjunto de colunas de diferentes tamanhos, desenhá-lo-á em relações diversas de grandeza. O mesmo método segue o escultor monumental, que dá a proporção tal como aparecerá na obra concluída, por forma que a visão a capte como equilibradora e que não seja, em vão, talhada à medida na sua matéria real. A verdade é que os trabalhos finais não são exactamente o que se vê em muitas representações.» [27]

Apesar de nesta citação o termo *cenografia* não ter propriamente o mesmo significado que hoje lhe atribuímos, a verdade é que as duas últimas proposições euclidianas constituíram um particular estímulo para a construção dos magníficos cenários que decoraram a experiência teatral grega. O desejo de iludir o espectador conduziu os encenadores a aperfeiçoarem as suas decorações, desenvolvendo assim uma rudimentar perspectiva. O que nos é dado a conhecer pelo arquitecto romano Vitrúvio[28]:

«Foi assim que Agatarco tendo sido instruído por Esquilo em Atenas da maneira como devem fazer-se as decorações dos Teatros para a Tragédia, e tendo o primeiro feito um livro, ele apercebeu-se de seguida daquilo que ele conhecia de Demócrito e de Anaxágoras, que também escreveram sobre este assunto; principalmente por qual artifício se pode tendo colocado um ponto num determinado local, imitar tão bem a natural disposição das linhas que saem dos olhos em se alargando, que por muito que esta disposição de linhas seja uma coisa que nos é desconhecida, não deixa de ser uma forma extremamente boa de representar edifícios nas Perspectivas que se fazem nas decorações dos Teatros; e faz-se aquilo que está pintado apenas numa superfície plana, parece avançar mais nuns locais, e recuar noutros.» [29]

Esta citação vitruviana é o único testemunho que pode, eventualmente, justificar a possível existência de uma perspectiva na Antiguidade. Outros testemunhos, como estas proposições euclidianas, baseiam-se puramente na visão contudo nenhum deles atribui qualquer designação a este ponto particular. Todavia, devemos ter algum cuidado na interpretação deste excerto de Vitrúvio. De facto, Demócrito e Anaxágoras defenderam algumas teorias sobre perspectiva, embora os seus textos não tratassem propriamente da representação destinada a pintores, mas sim de óptica, seguindo os passos de Euclides, o que constatamos pelo título de um tratado perdido de Demócrito, *Aktinographié*, ou seja, *O Desenho dos Raios*.

Apesar de Euclides chamar a atenção para o facto das paralelas parecerem convergir para um ponto, os artistas não lhe deram a devida importância. Por isso, encontramos no período que lhe antecedeu representações com a mesma interpretação geométrica que as elaboradas após a morte do geómetra grego. No exemplo seguinte ainda são visíveis traços de uma representação arquitectónica desenhada num vaso do sul da Itália, datado do século IV a.C..

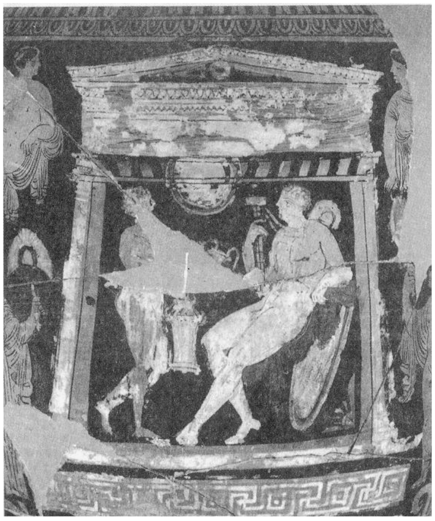


Figura 2.22.

Se analisarmos com cuidado um outro exemplo do primeiro século a.C., verificamos que o esquema geométrico utilizado na construção de ambos é muito semelhante.

Figura 2.23. Fragmento da decoração de uma parede em estuque e tinta de Boscoreale, datado do séc. I a.C..

Como podemos verificar, apesar das aparentes linhas paralelas e vistas de frente serem ortogonais ao plano de representação, estas contribuem para a ilusão de profundidade; ao prolongarmos essas linhas, elas convergem na maioria para pontos que estão alinhados na mediana vertical do plano de representação. Este esquema empírico, com o aspecto de uma *espinha de peixe*, é designado por *eixo de fuga* dado os diversos pontos estarem dispostos ao longo de um eixo comum. É provável que este esquema seja baseado na simetria e os pontos de convergência não sejam pontos construídos, o eixo central seria apenas o resultado de uma construção à posteriori.

Contudo, não podemos deixar de mencionar uma importante descoberta realizada em 1961. Trata-se de um mural romano do *Salão das Máscaras do Palatino*, datado possivelmente do século I a.C., onde está representado uma *loggia* que dá para um jardim. Este fresco constitui um exemplo ímpar, uma vez que vislumbramos apenas um único ponto de intersecção dessas aparentes linhas ortogonais à superfície pintada.

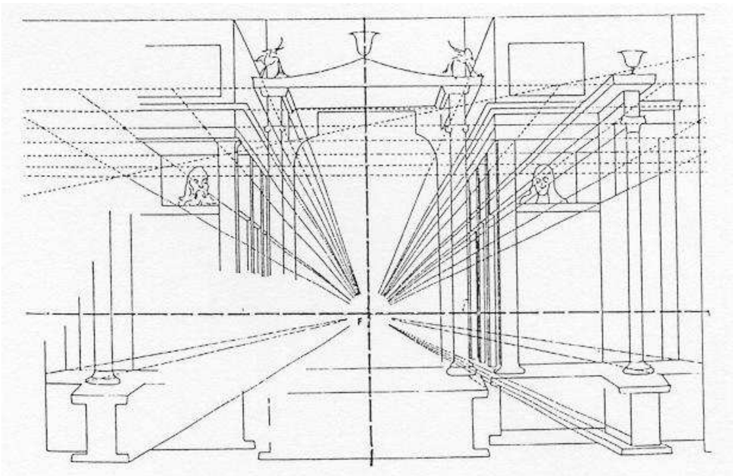


Figura 2.24.Esquema perspectivo do mural do *Salão das Máscaras do Palatino*, possivelmente do século I a.C., Roma.

A descoberta deste mural parece tornar evidente o conhecimento que a Antiguidade já possuía das regras de perspectiva. Trata-se de um admirável exemplar, onde a profundidade concebida é digna de destaque. Porém, a escassez de obras com esta qualidade artística levam-nos a pensar que apesar de estarmos perante uma boa aproximação à construção legítima, esse método geométrico não seria ainda conhecido. Pois caso contrário, este tipo de obras teriam outra predominância. Assim, acreditamos que se trata de um fresco raro, realizado concerteza por um genial artista, dotado de umas belas mãos e de um extraordinário poder de visão. Esta interpretação deve-se ao facto de o mundo antigo não nos ter deixado qualquer testemunho escrito sobre a prática que teria permitido chegar a este resultado, nem mesmo Vitrúvio faz qualquer referência a um possível método utilizado na época.

Voltemos à óptica euclidiana e às ilusões provocadas pelo distanciamento das grandezas. Segundo a décima e décima primeira proposições *as partes mais afastadas dos planos situados por baixo do olho parecem mais elevadas* e analogamente, *nos planos situados acima do olho, os objectos mais distantes parecem mais baixos*.

A demonstração destas proposições é idêntica, por isso provamos apenas a primeira delas. Consideremos a figura seguinte – seja A o ponto representativo do olho do observador situado acima do plano ΒΕΓ, sobre o qual incidem os raios ΑΒ, ΑΕ, ΑΔ, ΑΓ e seja ΑΒ normal ao plano considerado.

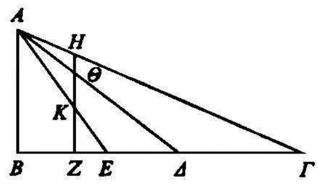


Figura 2.25.

Tome-se em BE um ponto ao acaso Z, e trace-se o segmento ZH perpendicular a BEΓ. Como os raios visuais incidem em ZH antes que em ZΓ, incidam AΓ em ZH no ponto H, AΔ em Θ e AE em K. Uma vez que o ponto H está mais elevado que Θ e Θ mais que K, enquanto que Γ está no mesmo plano que H, Δ no mesmo que Θ e E no mesmo que K; o segmento ΔΓ vê-se por meio dos raios AΓ e AΔ e do mesmo modo o segmento ΔE vê-se mediante AΔ e AE. Pelo quinto postulado, Euclides conclui que o segmento ΓΔ parece mais elevado que ΔE e analogamente ΔE parecerá mais elevado que BE.

Do vasto leque de proposições presentes neste tratado, apenas estas duas que acabámos de mencionar, dizem respeito especificamente a planos. Daí que seja pertinente referirmos a ausência de um teorema com um enunciado análogo ao das rectas: *planos paralelos vistos à distância parecem convergentes*.

Samuel Edgerton sugere que a *construzione legittima* apresentada por Alberti foi influenciada pela décima proposição euclidiana. A comparação das figuras apresentada na página seguinte revela uma próxima analogia – se pensarmos que o segmento EG pode ser visto como uma secção do pavimento a desenhar e IK como o quadro do pintor, esta proposição euclidiana e a representação albertiana são virtualmente idênticas.

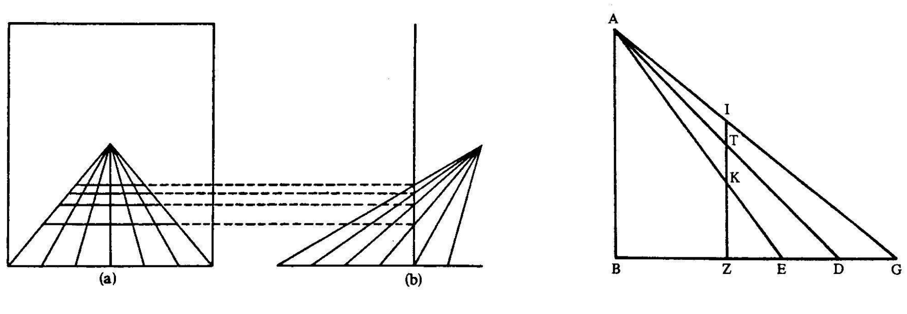


Figura 2.26. Comparação entre a construção albertiana e a ilustração da décima proposição da *Óptica* de Euclides.

Mesmo que Alberti não tenha tido acesso à *Óptica* de Euclides, o que achamos pouco provável, uma vez que chegou à Itália meridional no século XII, sendo conhecida pela maioria dos artistas renascentistas, esta proposição, assim como outras, figuram em alguns tratados de perspectiva escritos na Idade Média, nomeadamente no de Vitélio [30], e esses, como veremos e dada a divulgação que alcançaram, Alberti conhecia de certeza.

Contudo, não foi apenas nesta proposição euclidiana que Alberti se terá inspirado. Alguns autores referem que a vigésima primeira proposição foi igualmente fundamental para a sua teoria, a partir da qual terá nascido o triângulo visual como secção da pirâmide de radiação. De facto, a imagem que acompanha a demonstração é bastante sugestiva nesse sentido. O curto enunciado apresentado pelo geómetra grego é o seguinte: *dado um comprimento, determiná-lo*. De acordo com a figura seguinte, Euclides pretende determinar o comprimento do segmento AB, para tal situa o olho do observador no ponto Γ e incide os raios ΓA e ΓB sobre o referido segmento, obtendo assim, segundo Alberti, um triângulo visual indispensável para a percepção das grandezas. Posteriormente, o sábio grego, toma próximo do olho Γ um ponto, Δ, escolhido ao acaso sobre o raio ΓA.

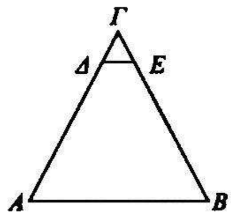


Figura 2.27.

Traça a partir do ponto Δ, o segmento ΔE paralelo a AB. Como ΔE é paralelo a um dos lados do triângulo ABΓ, está em condições de aplicar a segunda proposição do sexto livro dos *Elementos*, mencionada anteriormente. Assim:

$$\frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{\Delta E}} = \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{AB}}$$

Uma vez que a primeira razão é conhecida, a segunda também será, logo $\overline{\Gamma A}$ é conhecido e consequentemente $\overline{AB}$ também.

No primeiro livro do *Della Pittura*, também encontramos vestígios da proposição com o número vinte e quatro da óptica euclidiana. Alberti refere-se a ela na sua exposição acerca do mecanismo da visão, dizendo que a percepção de certas superfícies, como as esféricas, não se processa do mesmo modo que nas planas. Quanto menor for a distância entre o observador e a superfície esférica, menor esta parece e pelo contrário, quanto maior for o distanciamento maior parecerá. Esta situação merece o seguinte enunciado de Euclides*: ao aproximar-se o olho de uma esfera, o que se vê será menor, mas parecerá maior.* A demonstração segue os seguintes passos: sejam A, o centro de uma esfera, e B o ponto que representa o olho, a partir do qual traçamos a recta AB.

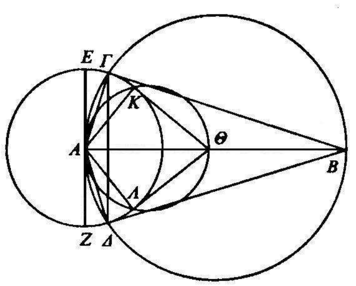


Figura 2.28.

Circunscreva-se o círculo $\Gamma B \Delta$ em torno de AB e trace-se a recta EZ, passando por A e perpendicular a AB. Prolongue-se o plano que passa por EZ e AB, o que produzirá como secção um círculo, $\Gamma EZ\Delta$ e tracemos os segmentos ΓA, AΔ, ΔB, BΓ e ΓΔ. Como AΓB é um semicírculo, o ângulo correspondente a $A\hat{\Gamma}B$ é recto, o mesmo acontecendo a $B\hat{\Delta}A$. Portanto, BΓ e BΔ intersectam-se em B, assim a partir do olho B vê-se a parte ΓΔ da esfera.

Altere-se a posição olho, aproximando-o da esfera para o ponto Θ, através dele trace-se o segmento ΘA e desenhe-se a circunferência AΛK, tendo aquele segmento como diâmetro. Desenhemos os segmentos ΘK, KA, AΛ e ΛΘ seguindo o raciocínio anterior, do olho Θ vemos a parte KΛ da esfera, enquanto que de B víamos ΓΔ e constatamos que KΛ é menor que ΓΔ. Assim, ao aproximar-se o olho, o que se vê é menor mas dá a impressão que é maior, uma vez que a amplitude do ângulo $K\hat{\Theta}\Lambda$ é maior que $\Gamma\hat{B}\Delta$, o que está de acordo com o quarto postulado.

Aproveitemos a abordagem da proposição anterior para também enunciarmos a vigésima terceira e relacionar ambas com a perspectiva linear. O geómetra alexandrino enuncia-a do seguinte modo: *uma esfera vista de qualquer maneira por um olho parece sempre menor que uma semiesfera e a própria parte vista da esfera parece uma circunferência de um círculo*. Para demonstrá-la, consideremos uma esfera com centro em A, e seja B o ponto que representa o olho do observador.

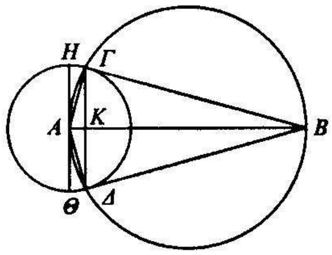


Figura 2.29.

Unamos os ponto A e B e seccionemos a esfera por um plano que contenha o segmento BA, a secção obtida é o círculo ΓΔΘH. Desenhemos, de seguida, um outro círculo ΓBA, cujo diâmetro é AB e trace-se os segmentos BΓ, BΔ, AΔ e AΓ. Como AΓB é um semicírculo, o ângulo $A\hat{\Gamma}B$ é recto, o mesmo sucedendo a $B\hat{\Delta}A$ e portanto ΓB e BΔ intersectam-se. Unamos agora os pontos Γ e Δ e seja K o ponto médio do segmento obtido, trace-se o segmento HΘ paralelo a ΓΔ passando por A. Assim os ângulos com vértice em K são rectos, fazendo rodar o triângulo BΓK em torno de KB, permanecendo este fixo, o ponto Γ será constantemente tangente à esfera, descrevendo uma circunferência de raio KΓ. Euclides termina o raciocínio dizendo, *assim na esfera ver-se-á uma circunferência de um círculo*.

Estas duas proposições estão de acordo com a nossa visão, visto o olho ser esférico e as imagens serem formadas na retina, a qual apresenta uma superfície côncava.[31] Porém, na *Óptica* de Euclides não existem indicações de natureza anatómica, mas será a este nível que poderemos interpretar estas proposições, analisando-as como projecções centrais sobre um quadro esférico, o qual se aproxima bastante da forma da retina. Contudo, sendo um quadro de pintura plano, estas proposições divergem das regras da perspectiva linear, havendo apenas um caso em que a esfera é vista sob a forma de circunferência, isto é, quando o centro está situado sobre o raio principal. Euclides não faz qualquer distinção entre os raios visuais, deixa isso para os seus compatriotas, Ptolomeu e Galeno, como veremos mais adiante. De qualquer modo, o raio principal a que nos estamos a referir corresponde ao raio cêntrico mencionado por Alberti, raio este que viajando do olho incide perpendicularmente no centro da circunferência.

Outra proposição que se encontra simultaneamente em harmonia com as regras da perspectiva linear e o mecanismo da visão, é a vigésima segunda: *colocando um arco de circunferência no mesmo plano em que está o olho, esse arco parecerá uma linha recta*.

A demonstração de Euclides é sustentada mais uma vez pela figura que a acompanha. Este começa por considerar que $\overset{\frown}{B\Gamma}$ é um arco de circunferência de um círculo situado no mesmo plano que o olho, indicado pelo ponto A, a partir do qual incidem os raios AB, AΔ, AE, AZ, AH, AΘ e AΓ. Pretendemos demonstrar que o arco $\overset{\frown}{B\Gamma}$ se assemelha a uma recta.

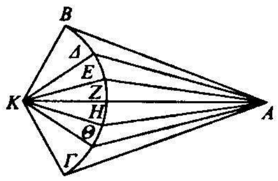


Figura 2.30.

Seja K o centro da circunferência e tracem-se os segmentos KB, KΔ, KE, KZ, KH, KΘ e KΓ. O segmento KB vê-se através do ângulo $K\hat{A}B$ e KΔ através de $K\hat{A}\Delta$, como $K\hat{A}B$ tem uma amplitude superior a $K\hat{A}\Delta$, então KB parecerá maior que KΔ, e analogamente KΔ parecerá maior que KE e KE maior que KZ. Por outro lado, KΓ parecerá maior que KΘ, KΘ maior que KH e KH maior que KZ. Por este motivo, o segmento KA permanecendo fixo é sempre perpendicular ao referido arco, o mesmo se verifica na parte côncava da circunferência, o que para Euclides finaliza a demonstração.

No entanto, este raciocínio encontra-se incompleto. Tal como sugere Paul Ver Eecke, devemos ter em consideração que a diminuição aparente dos sucessivos raios visuais equivale às sucessivas retracções dos pontos Δ, E, Z, etc., o que produziria o endireitamento aparente do arco até se transformar numa recta perpendicular ao raio AZ. Por outras palavras, como KB parece maior que KΔ, KΔ é maior que KE e KE maior que KZ; então o ponto Z parecerá mais próximo de K do que E, e analogamente o ponto E parecerá mais próximo de K do que Δ e Δ mais próximo de K do que B. Aplicando o mesmo raciocínio à outra metade da circunferência, constatamos que ela aparece como uma linha recta.

Este enunciado é válido para a perspectiva linear, quer se trate de uma circunferência ou simplesmente de um plano; ambos os casos ao passarem pelo olho, aparecem como linhas rectas. Devemos salientar que a observação feita para a circunferência não se estendeu ao plano, pois a conclusão que acabámos de tirar não é mencionada pelo geómetra alexandrino. No que diz respeito à nossa visão, a sua validade permanece, uma vez que num quadro esférico, como na retina, as imagens são arcos, mas parecem linhas rectas.

Assim, salvo alguns pormenores e de uma forma geral, estes enunciados estão de acordo com a perspectiva linear. Por este motivo, os tradutores desta obra substituíram o título original por *Perspectiva*. Contudo, uma simples proposição deitava tudo a perder, razão pela qual foi por muitos alterada ou, pura e simplesmente, omitida. Esta pedra no sapato daqueles que procuravam encontrar justificações matemáticas para os efeitos perspécticos, diz o seguinte: *as grandezas iguais e paralelas situadas a distâncias distintas do olho, não se vêem proporcionalmente às distâncias*. À semelhança das proposições anteriores, comecemos por demonstrá-la.

Sejam duas grandezas AB e ΓΔ iguais e situadas a distâncias distintas do olho, representado pelo ponto E, sobre as quais incidem os raios EA e EΓ. Desenhemos o arco de circunferência $H\widehat{Z}\Theta$, com centro em E e raio igual ao comprimento de EZ.

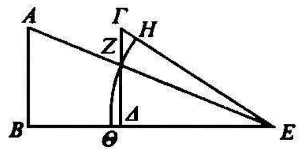


Figura 2.31.

Como o triângulo $EZ\Gamma$ é maior que o sector EZH e o triângulo $EZ\Delta$ é menor que o sector $EZ\Theta$, então o triângulo $EZ\Gamma$ tem com o sector EZH uma razão maior que o triângulo $EZ\Delta$ com o sector $EZ\Theta$:

$$\frac{\text{triângulo } EZ\Gamma}{\text{sector } EZH} > \frac{\text{triângulo } EZ\Delta}{\text{sector } EZ\Theta} \quad \text{por permutação}^{32}\text{:} \quad \frac{\text{triângulo } EZ\Gamma}{\text{triângulo } EZ\Delta} > \frac{\text{sector } EZH}{\text{sector } EZ\Theta}$$

por composição[33], triângulo $EZ\Gamma$ tem com o triângulo $EZ\Delta$ uma razão maior que o sector EHZ com o sector $EZ\Theta$:

$$\frac{\text{triângulo } EZ\Gamma + \text{triângulo EZ}\Delta}{\text{triângulo } EZ\Delta} > \frac{\text{sector } EZH + \text{sector EZ}\Theta}{\text{sector } EZ\Theta}$$

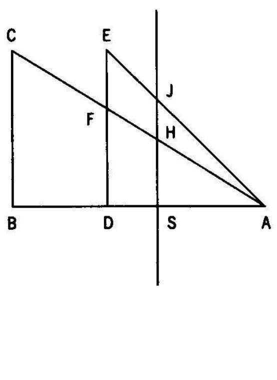
$$\text{mas } \frac{\text{triângulo } E\Gamma\Delta}{\text{triângulo } EZ\Delta} > \frac{\text{sector } EH\Theta}{\text{sector } EZ\Theta}, \text{ por outro lado, } \frac{\text{triângulo } E\Gamma\Delta}{\text{triângulo } EZ\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\text{Z}} \text{ mas como}$$

$$\Gamma\Delta = AB \text{ vem } \frac{\text{triângulo } E\Gamma\Delta}{\text{triângulo } EZ\Delta} = \frac{AB}{\Delta\text{Z}}, \text{por sua vez } \frac{\text{AB}}{\Delta Z} = \frac{BE}{E\Delta} \text{ logo } \frac{\text{triângulo } E\Gamma\Delta}{\text{triângulo } EZ\Delta} = \frac{BE}{E\Delta}$$

$$\text{portanto } \frac{BE}{E\Delta} > \frac{\text{sector } EH\Theta}{\text{sector EZ}\Theta}. \text{ Por outro lado } \frac{H\hat{E}\Theta}{Z\hat{E}\Theta} = \frac{\text{sector } EH\Theta}{\text{sector } EZ\Theta} \text{ logo } \frac{BE}{E\Delta} > \frac{\text{H}\hat{E}\Theta}{\text{Z}\hat{E}\Theta},$$

assim, a grandeza ΓΔ vê-se a partir do ângulo $H\hat{E}\Theta$, enquanto AB é observado por meio de $Z\hat{E}\Theta$. Por conseguinte, as grandezas iguais não se vêem proporcionalmente às distâncias.

Esta proposição parece ter sido mencionada para expressar a diferença existente entre as duas perspectivas. A proporcionalidade entre as imagens e as distâncias só se obteria com o quadro plano (perspectiva linear), analogamente as imagens e os ângulos que compreendem os objectos, como quer demonstrar esta proposição, exige o quadro esférico, que ilustramos do seguinte modo:



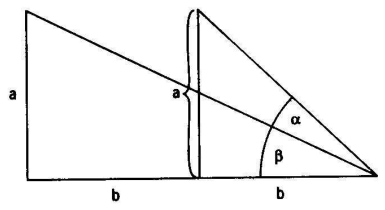


Figura 2.32. Comparação entre a perspectiva linear e a perspectiva angular.

A representação à esquerda diz respeito à perspectiva linear, na qual as grandezas $\overline{HS}$ e $\overline{JS}$ são inversamente proporcionais às distâncias $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$. À direita esquematizamos a perspectiva angular, comprovando que as dimensões visuais (β e $\alpha+\beta$) não são inversamente proporcionais às distâncias (2b e b). Assim, a oitava proposição sublinha que a «diferença aparentemente verificada entre duas grandezas iguais, apercebidas de distâncias diferentes, não é determinada pela proporção dessas distâncias mas sim pela proporção, menos discordante, dos ângulos de visão. Esta teoria é diametralmente oposta à que subjaz à representação perspectiva moderna, já nossa conhecida através da máxima de Jean Pélerin, mais conhecido por Viator: *as quantidades e as distâncias variam proporcionalmente*.»[34]

Enquanto a perspectiva *naturalis* ou *communis*, defendida por Euclides, procurou formular matematicamente as leis da visão natural, estabelecendo que as grandezas aparentes são exclusivamente determinadas pela amplitude dos ângulos de visão e não pela distância a que estas estão do olho, a *perspectiva artificialis* criada por Alberti, desabrocha destas considerações euclidianas, criando um método geométrico para representar fielmente imagens tridimensionais em superfícies com duas dimensões. Perante a exposição que realizámos torna-se flagrante a contradição entre «duas autoridades igualmente respeitadas»[35], razão pela qual os operários renascentistas das línguas tenham oscilado entre emendar ou eliminar o texto euclidiano. Vejamos um pouco da metamorfose por que passou a proposição mais conhecida da *Óptica* de Euclides.

Em 1503 é publicada em Veneza uma tradução deste tratado realizada por Zamberto, na qual a oitava proposição é formulada do seguinte modo: *aequales magnitudines inaequaliter expositae intervallis proportionaliter minime spectantur*, ou seja, *as dimensões iguais, estabelecidas de modo desigual, aparentam ser, à distância menos proporcionadas*. Segundo Panofsky, o facto deste tradutor colocar *intervallis* antes de *proportionaliter* pode ter induzido em erro os leitores. Uma das vítimas deste pequeno equívoco foi o pintor e gravador alemão Albrecht Dürer, relacionando de tal modo as palavras latinas que redigiu uma frase carente de sentido e totalmente deturpada – *não se conseguem ver as dimensões iguais que são estabelecidas, de modo desigual, com diferenças proporcionais*. A tradução que se seguiu à de Zamberto, publicada em 1557 teve como autor Johannes Pena, corrigindo a anterior da seguinte forma: *as dimensões iguais, que estão a distâncias diferentes do olho, não têm a proporção dos ângulos igual àquela a que têm as distâncias*. A conclusão que se pode tirar deste enunciado é que os ângulos não são proporcionais às distâncias, quando o que se devia concluir era que a proporção dos tamanhos aparentes é determinada apenas pela proporção dos ângulos e não pelas distâncias, o que é totalmente omitido no texto referido. A confusão que se estabeleceu em torno desta questão ainda se prolongaria nas versões seguintes – tanto a versão italiana de Egnazio Danti, *La Prospettiva di Euclide* (Florença, 1573), como a francesa de Ronald Fréart de Chantelou, *La perspective* *d'Euclide* (Le Mans, 1663), em vez de se debruçarem sobre o texto original, seguiram literalmente o texto de Pena. Somente nos finais do século XIX, por intermédio de Heiberg, a verdade é reposta em *Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum Scholiis antiquis*, o manuscrito mais completo que até à altura se conhecia, e considerada então como a melhor de todas as versões impressas.

Em jeito de conclusão resta-nos sublinhar a nossa admiração pela perspectiva natural da Antiguidade. Apesar de ser encarada por muitos como uma simples aplicação da geometria elementar, preocupando-se apenas em descrever os fenómenos perspectivos, foi a partir do seu estudo que surgiu essa maravilha do engenho humano que é a perspectiva linear.

A *perspectiva* vitruviana e a rejeição de um *quantum continuum*

O axioma do ângulo proposto por Euclides exerceu sobre a pintura greco-romana uma influência notável; e enquanto esta se mantivesse fiel a tal princípio, os seus trabalhos seriam desprovidos de projecções em superfícies planas, sendo substituídas pelas superfícies esféricas. Razão suficiente para a impedir de alcançar um modo de representação em perspectiva. A primeira tentativa de o fazer é-nos apontada pelo único testemunho teórico conhecido sobre a actividade da perspectiva na Antiguidade, um tratado de Vitrúvio. Arquitecto e engenheiro, Vitrúvio imortalizou-se com *De Architectura Libri X* [36], composto depois do ano 27 a.C. e dedicado a Augusto. É o único exemplar da Antiguidade que nos dá informação sobre as técnicas de construção, sobretudo da época Alexandrina.

No primeiro livro desta obra encontramos um passo algo controverso, no qual Vitrúvio descreve dois tipos de representações correntemente utilizados na época – duas projecções ortogonais, uma horizontal, a chamada *icnografia* [37] e a outra num plano vertical, a *ortografia* [38]. Estas duas projecções vistas de um edifício são complementadas com uma descrição a que Vitrúvio designa por *cenografia*, embora não indique qualquer método para a sua construção:

«A Icnografia é o traçado a régua e compasso do plano de um edifício, num pequeno espaço como se fosse o terreno; a ortografia representa também esse pequeno espaço de uma fachada de tal modo que as medidas sejam proporcionais; a cenografia permite ver a fachada de um dos lados mas também as partes laterais, isto graças às linhas que concorrem num ponto central.» [39]

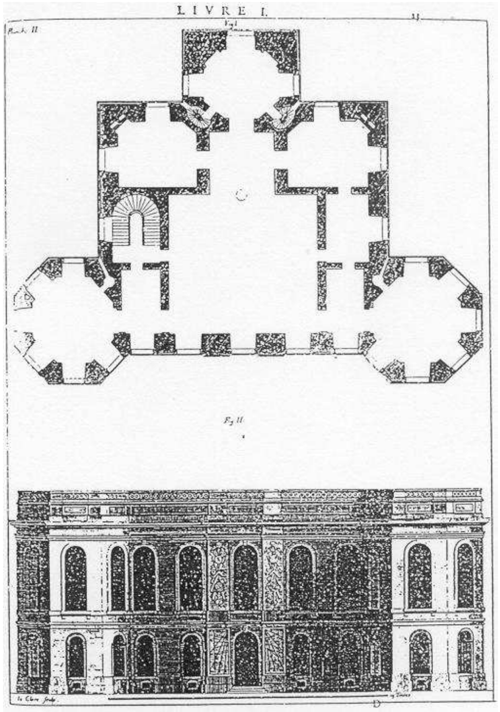


Figura 2.33. Gravuras da edição de Claude Perrault em 1648, os *Dez livros de Arquitectura* de Vitrúvio. Icnografia e Ortografia por Vitrúvio.

Surge então pela primeira vez, um termo equivalente ao que hoje designamos por perspectiva. De acordo com o tradutor português desta obra, o vocábulo *cenografia* significa a representação de uma tela, ou seja, a representação inteira de todo o edifício. Esta significação é mais completa que qualquer uma das referidas anteriormente, visto que através da icnografia apenas se desenha o plano e através da ortografia, a elevação de uma das fachadas. Assim a cenografia (perspectiva) permite observar vários lados de uma só vez.

Mas este termo já nos é familiar, mencionámo-lo a propósito da distinção indicada por Gémino quanto aos ramos da óptica na Antiguidade. Contudo, a *cenografia* referida por este comentador reveste-se de um sentido mais abrangente, aplicando-se não só às leis da óptica como também à arquitectura de uma forma geral. Já para Vitrúvio este termo é bastante mais restrito, dizendo apenas respeito a uma representação perspectiva de uma estrutura tridimensional sobre uma superfície plana.

Por outro lado, a citação indicada menciona ainda um pormenor importante, a concorrência de linhas num ponto central. Porém, tal ponto não se vislumbra em nenhuma pintura da Antiguidade que tenha chegado aos nossos dias, à excepção do admirável mural do *Salão das Máscaras do Palatino*, curiosamente datado do mesmo século em que viveu Vitrúvio.

Seja qual for a interpretação que possamos fazer, é importante salientar que de acordo com os testemunhos visuais e literários que hoje dispomos, a pintura ilusiva já tinha surgido no quinto século a.C., tendo em Apolodoro e Zeuxis os grandes inovadores da técnica de representação espacial.

Plínio conta-nos que Zeuxis, exímio no seu ofício de pintor, concebeu um quadro onde magistralmente ilustrou um cacho de uvas, de tal forma que até os pássaros conseguiu enganar. Era deste modo que os pintores se notabilizavam, o efeito ilusionista era fundamental para o seu apogeu. Mas foi sobretudo nos tempos helenísticos e romanos que este espírito se desenvolveu. «Em Roma e na Campânia poderemos encontrar interiores, paisagens e perspectivas de cidades particularmente elaborados que, sem dúvida, nos colocam perante "uma área aparentemente tridimensional que parece estender-se indefinidamente para além da superfície pintada objectivamente bidimensional"; e pelo menos num exemplo, a saber, nas célebres "Paisagens da Odisseia" da Biblioteca Vaticana, a comparação de Alberti [40] foi concretamente antecipada, já que toda a parte do cenário é vista através de enquadramento de pilares simulados.»[41] Em relação ao princípio de *redução em perspectiva*, constatamos que as linhas em profundidade (ortogonais ao plano do quadro) raramente convergem de modo coerente, ou seja, podem convergir mas não para um horizonte único, e muito menos para um centro único – predominando assim uma perspectiva paralela, tal como pudemos verificar nos exemplares indicados anteriormente. Chamamos também à atenção para a diminuição das grandezas com o afastamento, embora não seja ainda de modo constante.

De acordo com os historiadores de arte, os pintores helénicos e romanos anteciparam os efeitos do Impressionismo do século XIX, predominando nas suas obras refracções, reflexões e sombras projectadas, mas longe de uma iluminação uniforme. Na «Arte da Antiguidade o mundo representado afigura-se-nos da maior solidez e harmonia, se comparado com o da Arte Moderna; mas logo que da representação passou a fazer parte o espaço, e isto sobretudo na pintura de paisagens, esse mundo passa a ser estranhamente irreal e vago, como um sonho ou miragem»[42], o que se deve à ausência de continuidade e infinidade presentes no espaço concebido pelas pinturas greco-romanas as quais são desprovidas de um «sistema homogéneo no interior do qual cada ponto, é unicamente determinado por três coordenadas perpendiculares entre si prolongando-se *in infinitum* a partir de um dado ponto de origem» [43].

Tudo isto é compreensível se pensarmos nos calafrios que os filósofos sentiam quando lhes colocavam a hipótese de existir o conceito de *infinito*, o espaço sistemático tinha tanto de impensável para estes pensadores como de inimaginável. Durante largos séculos as teorias daqueles que dedicavam o seu precioso tempo à mente, impuseram-se radicalmente. Segundo Platão, o espaço opunha-se ao mundo dos elementos, redutíveis a corpos constituídos geometricamente, que funcionavam como o seu receptáculo informe. Também a doutrina aristotélica condena a existência de um *quantum continuum* em que fosse possível dissolver a essência das coisas isoladas. O estagirita defendia que o cosmos tinha por centro absoluto o centro da Terra e por limite absoluto o limite da esfera celeste.

Assim, enquanto prevalecessem estas teorias e o dogma da óptica clássica, os antigos não poderiam criar um método que lhes permitisse uma construção em perspectiva exacta, e portanto seria para eles impossível a obtenção de uma representação precisa intersectando, simplesmente, uma pirâmide visual com um plano.

1.4. Cláudio Ptolomeu, *Óptica* e *Geografia*

Nos séculos seguintes, o mecanicista e matemático Herão de Alexandria e o maior astrónomo da Antiguidade, Cláudio Ptolomeu [44], debruçando-se sobre a *Óptica* euclidiana apresentaram importantes contributos para a óptica geométrica. O primeiro destacou-se através de uma obra denominada *Catóptrica*, da qual salientamos uma interessante demonstração da igualdade entre os ângulos de incidência e de reflexão, baseando-se no princípio aristotélico – *a natureza nada faz do modo mais difícil*. Já Ptolomeu efectuou um estudo mais completo dedicando-se aos três capítulos principais da óptica, tendo escrito um tratado cujo título era precisamente *Óptica*. Lamentavelmente não conhecemos o seu primeiro livro, pois este não sobreviveu na íntegra até aos nossos dias. Nesta obra, não só aprofundou a geometria da visão proposta por Euclides, como a engrandeceu incluindo elementos físicos, fisiológicos e psicológicos. O seu tratado é constituído por cinco livros. O conteúdo do primeiro é nos transmitido pelo pequeno resumo que inicia o segundo livro, referindo-se ao mecanismo da visão, no qual analisa o olho e os raios visuais, assim como o efeito que a luz e as cores provocam neste sistema. No segundo desenvolve a visão monocular e binocular; no terceiro e quarto livros analisa a reflexão, e termina com uma contribuição extraordinária para o estudo da óptica no que diz respeito à propagação dos raios luminosos em meios distintos, a refracção. Perante este catálogo de conhecimentos com que Ptolomeu nos brinda, não é legítimo considerarmos, como fazem alguns historiadores, que a sua *Óptica* tenha o rosto da euclidiana. Pelo contrário, apesar de existirem alguns pontos em comum, como o seguimento da teoria extramissionista [45] outros tantos, como veremos, diferem.

A *Óptica* de Ptolomeu não foi de fácil interpretação, para além do primeiro livro se encontrar perdido, impedindo um estudo mais detalhado e forçando os historiadores a especularem sobre o seu conteúdo, com base no pequeno excerto que inicia o segundo livro, ainda surgiram outros obstáculos, fruto de uma tradução latina incoerente e incorrecta efectuada no século XII a partir de uma versão árabe, do emir Eugénio de Sicília. Também este tradutor utiliza a expressão latina *pyramis visibilis*, para se referir ao cone visual, o que mais uma vez influenciou negativamente as interpretações que nele se apoiaram.

Apesar de Ptolomeu concordar com Euclides quanto à percepção das grandezas se realizar por meio de um cone visual, o mesmo não acontece quanto à natureza dos raios visuais. O astónomo afirma que o cone visual é homogéneo sendo por isso constituído por um feixe de raios contínuos:

«É necessário reconhecer que a natureza do raio visual (...) é necessariamente continua e não discreta.» [46]

Este tipo de interpretação, deve-se ao facto do astrónomo grego referir que o fluxo visual tem a mesma génese que os raios luminosos. Esta posição torna-se clara através de uma análise de Simeon Seth:

«Ptolomeu menciona na sua Óptica que o "pneuma" visual é uma espécie de éter, pertencente à quinta essência.» [47]

A associação da luz com a quinta essência, recordam-nos as teorias aristotélicas.[48] Ptolomeu vislumbrando a filosofia no horizonte, declara que a alma é composta pelos três elementos menos materiais: o ar, o fogo e o éter. Admite que o éter opera sobre as sensações e que de entre os sentidos, a visão e a audição são os que mais se aproximam desta nobre essência. Por este motivo formula a radiação visual como uma transferência de energia. Esta energia visual continuamente brotada pelo olho, tem o poder de percepcionar os objectos que encontra, tendo em conta a claridade existente e a força da radiação.

O astrónomo alexandrino acrescentou ainda alguns pontos importantes que viriam a ser essenciais para os estudos posteriores. Em primeiro lugar cria um novo elemento geométrico, dotando o cone visual de um *axis visibilis pyramidis* ou *axis proprius*. Tal elemento é representado através de uma recta partindo do vértice do cone e dirigindo-se até à sua base, mais especificamente até ao centro do círculo que forma a base. De acordo com Albert Lejeune, este novo elemento é hoje conhecido como o *eixo do cone*. Porém, não se trata simplesmente de um raio visual com uma posição particular, mas sobretudo de uma recta geométrica que desempenha uma importante função – permite reconhecer a existência de variações de sensibilidade no cone visual:

«O que for observado sobre o eixo é visto mais nitidamente do que se observado por um dos lados através dos raios laterais.» [49]

Esta concepção influenciou as gerações seguintes, revolucionando de alguma forma a interpretação e análise dos raios visuais. Encontramos nesta ideia fortes coincidências com a teoria exposta por Alberti. De facto, este *eixo* de Ptolomeu é perfeitamente equivalente ao raio cêntrico do artista italiano.

Esta sua recente criação, o *eixo*, e esse elemento preponderante da óptica euclidiana, o ângulo de visão, são encarados como determinantes no processo tamanho-percepção. Um exemplo onde a primeira destas estruturas é fundamental, diz respeito à obliquidade de uma figura que ilustramos de seguida:

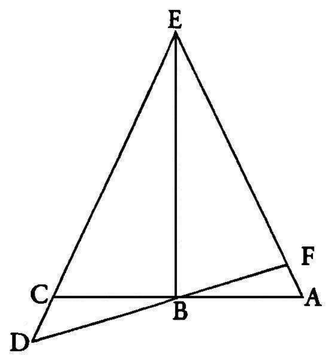


Figura 2.34.

Consideremos em primeiro lugar os raios EA e EC que flanqueiam o *eixo* EB, como os pontos A e C se encontram à mesma distância de B, a superfície representada por AC é perfeitamente percepcionada frontalmente. Por outro lado, se forem os raios ED e EF a flanquearem EB, B deixa de ser o ponto médio do segmento DF, e portanto DBF é definido como oblíquo. Assim, o facto do raio axial (*eixo*) não incidir exactamente no ponto médio do segmento indicado, a percepção que fazemos a partir dele é completamente distinta do primeiro caso indicado – pelo que a obliquidade é crucial para da percepção das dimensões. Relativamente ao ângulo de visão, Ptolomeu menciona que se dois objectos subentendem o mesmo ângulo de visão, mas situados a diferentes distâncias, o mais afastado parecerá maior. Do mesmo modo, se dois objectos forem vistos do mesmo ângulo, sendo um deles mais oblíquo que o outro, parecerá maior aquele que apresenta maior obliquidade. A capacidade de perceber a obliquidade é crítica para a percepção de uma figura, o que está de acordo com a trigésima sexta proposição da *óptica* de Euclides ao salientar que por vezes, as rodas dos carros parecem oblongas. Ptolomeu modifica ligeiramente este enunciado dizendo que se um círculo estiver num plano inclinado, apreendemo-lo como uma elipse.

O astrónomo alexandrino salienta ainda uma questão pertinente. A distância e a dimensão dos objectos podem ser determinadas por outros processos extra geométricos, que não passam de artifícios comummente utilizados pelos pintores. A título de curiosidade referimos apenas um exemplo, se dois corpos vizinhos apresentarem diferenças significativas no seu brilho, caso sejam observados sob ângulos iguais e indeterminadas as suas distâncias, o mais escuro será tido como o mais afastado, parecendo menos distinto. O que merece o seguinte comentário deste astrónomo:

«A pintura mural usa fracas e ténues cores para os objectos que pretende representar à distância.» [50]

Um segundo ponto importante que se destaca nesta *Óptica*, consiste na localização precisa do vértice do cone visual. Baseando-se numa dióptrica de Arquimedes que não chegou aos nossos dias, Ptolomeu sublinha que o olho não vê a partir de um só ponto existente na pupila, mas sim através de vários que se situam nesta superfície, referindo-se a ela como uma pequena calote. Por este motivo, discorda que o vértice do cone visual se situe à superfície do olho (córnea), mas sim algures no seu interior. Para podermos compreender os argumentos usados por Ptolomeu e as exposições dos sábios que se seguem, apresentamos um breve resumo sobre a fisiologia do nosso órgão da visão.

Como é do conhecimento de todos, o olho tem uma forma sensivelmente esférica no qual se distinguem dois pólos, um equador e meridianos. As suas paredes são formadas por três túnicas concêntricas: a mais externa é fibrosa, a média é vascular e a interna é nervosa. Esta última é designada por retina, sendo nela que ocorre a formação invertida das imagens observadas. Para que os raios luminosos a atinjam, têm de atravessar uma série de meios transparentes e refringentes que são, de frente para trás, a córnea, o humor aquoso, o cristalino e o humor vítreo.

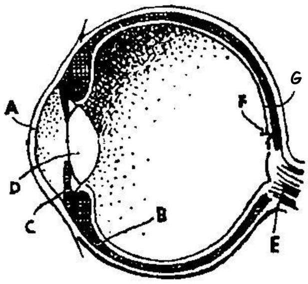


Figura 2.35. Constituição anatómica do olho.

a- córnea e- nervo óptico
b- esclerótica f- fóvea
c- íris g- retina
d- cristalino

Estamos agora em condições para analisar os argumentos que fundamentam esta teoria de Ptolomeu que, apesar de ao longo da obra nos serem dadas algumas informações, se encontram no primeiro livro então perdido. Para o estudo desta questão, o astrónomo grego elabora uma experiência utilizando um espelho, representado na figura que se segue [51] pelo arco ABG, examinando o facto do vértice do cone visual (D) coincidir com o centro da curvatura desse espelho.

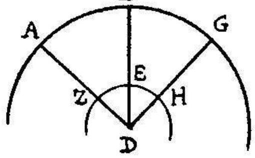


Figura 2.36.

Ptolomeu demonstra que todo o raio visual contido no plano da figura é normal ao espelho e que se reflecte sobre ele próprio. Fazendo rodar o sector ADG em torno de raio axial BD, constata que todo o raio do cone visual assim obtido goza da mesma propriedade. Para determinar qual a imagem que se vai formar no espelho nestas condições, traça o arco ZEH com centro em D e raio menor que o espelho, denominando-o *circumferentia secans latitudinem aspicientis* (arco representante da secção meridiana horizontal do *aspiciens*). Conclui então, que a imagem deste arco (calote esférica), sobre os seus diferentes pontos, apresenta os raios necessariamente reflectidos ocupando toda a porção útil do espelho. Da análise deste raciocínio, constatamos que o vértice do cone se localiza no interior do olho. Contudo, não podemos especificar o local concreto, uma vez que os estudos oftalmológicos existentes na época eram bastante diferentes dos actuais.

Ptolomeu foi conduzido a esta questão, não por razões anatómicas, mas por uma necessidade de carácter teórico – o estudo da refracção, visto os raios visuais se *quebrarem* ao transporem meios com densidades diferentes, salvo o caso em que são normais à superfície de separação dos meios. Mesmo sem possuir profundos conhecimentos anatómicos sobre o olho, admite que os meios transparentes oculares são mais compactos que o ar exterior. Salvaguardando o princípio da propagação rectilínea do fluxo visual, é obrigado a situar a origem comum dos raios visuais de tal forma que sejam todos normais à superfície de separação do olho com o ar, tal como mostra a figura anterior. Contudo, não conhecemos qual será exactamente, a localização do dito vértice.

Segundo o historiador francês Albert Lejeune, «esta questão não é desprovida de interesse, a importância atribuída à localização do vértice do cone visual reside no ponto de vista de construções geométricas: o fluxo visual parte de um ponto de origem que existe concretamente a partir do qual ele procura determiná-lo. O cone visual não é apenas uma abstracção originada por uma definição geométrica: mas sim uma extensão material, com a qual é possível medir do mesmo modo o afastamento angular que separa duas estrelas.» [52]

Na impossibilidade de conhecermos o conteúdo do primeiro livro desta obra, procurámos descobrir um pouco mais sobre as concepções defendidas por este astrónomo, o que nos levou a consultar o tratado óptico grego que lhe sucedeu na esperança que este fizesse alguma referência. Eis que chegamos ao último dos seus compatriotas a dedicar-se a estes estudos, Damiano. Por volta do século IV, inspirando-se largamente em Ptolomeu, compõe um opúsculo, as *Hipóteses Ópticas*. E o que podia ter sido extremamente útil, acabou por ser um verdadeiro fracasso! O facto de Damiano ter tido acesso ao primeiro livro da *Óptica* de Ptolomeu, devia tê-lo conduzido a revelar no seu ensaio informações preciosas acerca desse conteúdo. Porém, não foi bem isso que aconteceu; num dos parágrafos das suas *Hipóteses* Damiano contenta-se em referir que o vértice do cone visual se situa no interior do olho e não sobre a pupila, não apresentando justificações concretas.

Ptolomeu apresenta deste modo uma concepção muito distinta da de Euclides, para quem um simples raciocínio geométrico a partir das direcções dos raios visuais e das amplitudes dos ângulos formados pela intersecção entre o objecto e o cone visual único, permite concluir com segurança a forma como o objecto aparecerá. Estas inovações ptolemaicas possibilitaram atingir uma teoria da visão mais adequada, tendo para isso sido necessária uma análise cuidada sobre a percepção visual e uma observação mais atenta dos fenómenos, o que contribuiu fortemente para alertar os sábios gregos quanto à complexidade da nossa visão.

Contudo, a fama de Ptolomeu encontra-se mais associada a outras obras, como a *Geografia*, onde descreve três métodos de projecções cartográficas, para além de se introduzir o sistema de latitudes e longitudes, sendo o segundo dos métodos considerado como uma projecção central, ou também denominada projecção estereográfica.

Segundo Samuel Edegerton, este tratado ptolemaico revestiu-se de uma especial importância para a criação albertiana, visto a construção geométrica proposta por Alberti poder ser classificada também como projecção central, sendo o observador o centro de projecção, e o plano do quadro o plano de projecção. Vejamos em que consiste este método do astrónomo alexandrino e comparemo-lo com a construção albertiana.

Consideremos a esfera do globo terrestre e localizemos o paralelo que divide em duas metades a extensão norte-sul do mundo, na altura localizada a 42º N passando por Siene [53], actual Assuão no Egipto. De seguida, foquemos com o nosso olhar o centro da esfera, alinhemo-lo com o nosso olho e com o ponto que resulta da intersecção do referido paralelo com o meridiano desse lugar, – assim determinar-se-á a situação geográfica de Siene. Por outras palavras, o olho do observador situar-se-á no prolongamento do raio terrestre que passa por Siene.

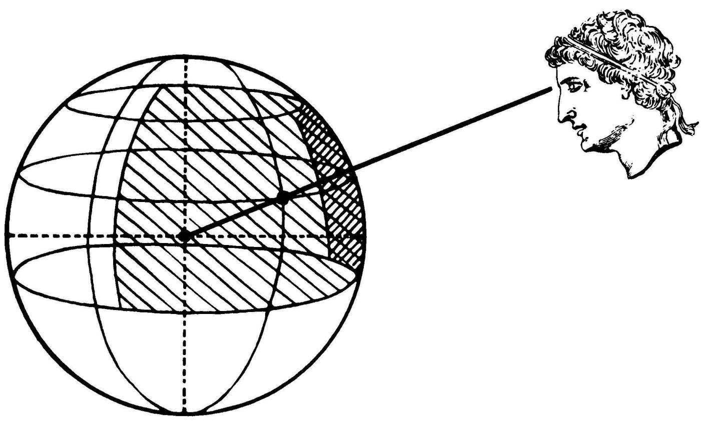


Figura 2.37. Método cartográfico baseado numa projecção central.

Desta feita, o eixo visual, a partir do qual se vê o globo terrestre, será obtido pela intersecção entre o plano da latitude e o plano da longitude. Portanto, o observador verá o dito meridiano como uma recta vertical e os outros como linhas curvas, à esquerda e à direita, passando pelos pólos e com a concavidade voltada para a vertical.

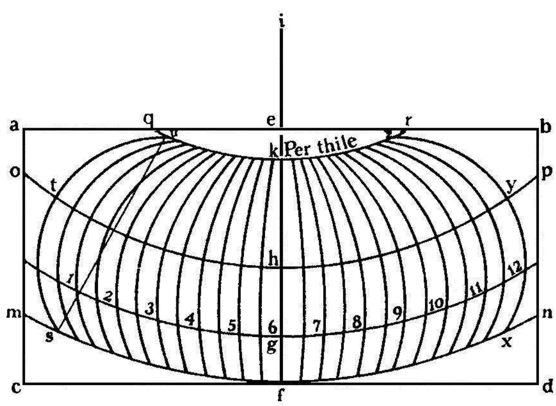


Figura 2.38. Projecção de uma parte da superfície esférica num plano.

Esta projecção cartográfica, originada por um só ponto que representa o olho do observador, está de acordo com as regras da perspectiva linear, constituindo um método que traduz uma evidente aplicação da óptica à cartografia. Apesar de Ptolomeu ter escrito um tratado sobre óptica, nunca lhe ocorreu aplicá-lo aos métodos através dos quais obtinha mapas. Daí alguns autores sugerirem que a construção legítima apresentada por Alberti, foi influenciada pela *Geografia* do astrónomo alexandrino particularmente por este tipo de projecção. De facto, o tratado de Ptolomeu chegou a Florença em 1400 por intermédio de Manuel Chrisolara e Agnolo de Scarperia, que viajaram até Bizâncio em busca dos preciosos manuscritos gregos com o objectivo de os colocarem à disposição dos jovens alunos da escola linguística privada. Se havia dúvidas quanto ao conhecimento de Alberti acerca desta obra de Ptolomeu, elas dissipam-se quando o próprio Alberti em 1434, desenha um plano da cidade de Roma, um autêntico mapa daquela que hoje é a actual capital italiana.

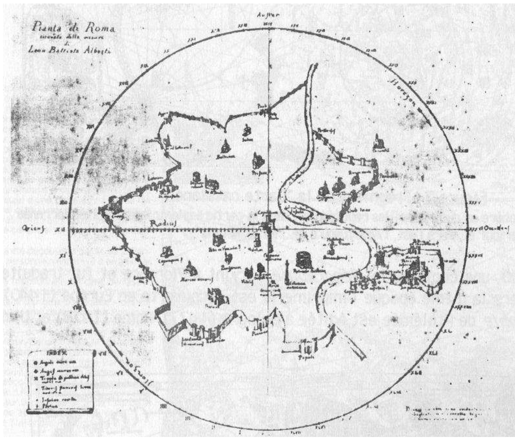


Figura 2.39. Plano de Roma realizado por Alberti.

Assim, é provável que a geometria aplicada aos métodos cartográficos tenha estimulado a construção legítima. De acordo com Odile Trotoux, o estudo da *Geografia* de Ptolomeu caiu drasticamente quando os interesses se voltaram para a perspectiva, mas afinal tanto a cartografia como a perspectiva são dois métodos de representação do espaço.

1.5. Galeno, anatomia e geometria

O primeiro estudo levado a cabo relacionando a anatomia do olho com a geometria associada ao mecanismo da visão, foi realizado por Galeno. Um dos maiores médicos da Antiguidade, nasceu em 129 d.C. em Pérgamo e morreu em Roma no ano 199. Começou a estudar medicina na sua cidade natal e por volta dos dezasseis anos parte para Esmirna onde prossegue os seus estudos, viajando posteriormente para Alexandria. Exerceu a sua arte em Pérgamo tratando gladiadores, e em Roma tornou-se tão famoso que veio a ser médico na corte de Marco Aurélio. A este médico da Antiguidade se devem as descobertas da existência da espinal-medula e a de que há sangue nas artérias, contrariamente ao ar que se supunha aí existir. Compôs ao longo da sua vida cerca de 262 livros que versam questões de medicina, filosofia, gramática e retórica. No que diz respeito à anatomia ocular, e apoiando-se num estudo realizado há vários séculos por Herófilo [54], Galeno produz uma obra substancial, embora de carácter geral, que chegou aos nossos dias. Intitulada *Sobre a utilidade das partes do corpo humano* esta obra foi considerada como o melhor tratado da Antiguidade sobre anatomia e um ponto de partida fulcral para a medicina científica – assim se compreende que o seu estudo tenha sido obrigatório nas universidades medievais.

Na referida obra, Galeno aborda de uma maneira geral a física e a funcionalidade do olho, com uma abundante dose de teologia elogiando a sabedoria do artista divino. Quanto à geometria, esta faz uma breve aparição quando Galeno descreve o humor cristalino em termos geométricos. Argumenta então que este humor central do olho é redondo, mas não perfeitamente esférico visto ser enviezado à frente, sendo a sua intersecção com a retina um círculo perfeito que divide o cristalino em duas metades. Este enviezamento é justificado através de outro pormenor geométrico: o facto do cristalino não ser perfeitamente esférico permite uma maior correspondência entre pontos da superfície deste humor e a superfície do objecto visível. Será a partir desta ideia que irá nascer o verdadeiro modelo explicativo da visão, como veremos mais adiante.

Galeno, tal como Euclides e Ptolomeu, desenvolveu ainda a geometria do cone visual definindo os raios visuais como rectas que viajam do olho para o objecto observado. A citação seguinte é esclarecedora quanto à concepção defendida por este médico da Antiguidade:

«Seja o círculo visto por um dos dois olhos, permanecendo o outro olho fechado. (Chamo, evidentemente, círculo ao que é igual de todos os lados a partir dum ponto ao centro) Imagine a partir desse ponto ao centro do círculo (que se chama também o seu centro) e até à pupila que observa um trajecto rectilíneo não se afastando nem se desviando de nenhuma outra maneira da sua direcção. Esta linha recta representa um fino cabelo ou fio de aranha rigorosamente estendido da pupila em direcção ao centro do círculo. Imagine ainda da pupila à linha que delimita o círculo (chamamos a sua circunferência) outras inumeráveis linhas estreitas como finos fios de aranha são estendidos uns ao lado dos outros. Chamo à figura limitada pelo círculo e por todas estas rectas, um cone que retém na pupila o seu vértice e no círculo a sua base. Chamo eixo à recta estendida da pupila ao centro do círculo a qual está ao meio de todas as outras rectas e do cone completamente inteiro (...).

Seguidamente imagine que sobre o eixo do cone, estendido pelo ar desde a pupila até ao centro do círculo, se encontra um grão de milho miúdo ou qualquer outro corpo minúsculo. Este eclipsará o centro do círculo e impedirá a pupila de o ver. Se vós considerastes bem tudo isto, ser-vos-á consequentemente bastante fácil de compreender que todo o corpo colocado entre o objecto e o olho que observais fará “écrans” e impedirá o objecto de ser percebido, mas uma vez este corpo completamente levantado ou simplesmente deslocado lateralmente, torna o objecto visível. Se vós vos deres conta disto, podeis concluir que o que deve ser visto não pode ser ocultado, então nada se pode interpor sobre a recta saída do olho ao objecto. Se vós compreendestes bem isto, nada podereis encontrar de ilógico à afirmação dos matemáticos, que os objectos são vistos através de linhas rectas. Chamo estas rectas de raios visuais (...). A circunferência do círculo é vista por estes raios, o seu centro pelo raio visual particular *que está estendido seguindo o eixo do cone e toda a superfície do círculo por estes inumeráveis raios visuais que caem sobre ela.»* [55]

Esta descrição galénica deixa-nos sem palavras. Clarifica de uma forma tão lúcida o que temos vindo a mencionar, podemos considerá-la como um pequeno resumo do que já foi exposto.

«Foi assim que, durante oito a nove séculos, a luz foi uma preocupação central do pensamento mitológico, filológico e científico da Grécia, ou talvez fosse mais exacto dizer, do Mediterrâneo. Fonte das géneses do mundo, quer fossem elas egípcias, babilónicas ou hesíodona, a luz perdeu gradualmente substância e unidade. Este trabalho de separação acabou, por, ao fim de vários séculos, dividir a óptica em diversas secções: psicológica, fisiológica e física. Ao confundi-la com o seu modelo de raio rectilíneo, os mecanicistas e os astrónomos, o mais das vezes de Alexandria, afastaram a luz dos consideráveis problemas colocados pela sua natureza. Eles dedicaram-se sobretudo a estabelecer uma geometria da deslocação do raio visual à qual reduziram a luz.» [56]

2. O contributo árabe

No século VI, enquanto a matemática grega ensinada na famosa escola alexandrina era encarada como uma prática pagã constituindo uma ameaça ao cristianismo ortodoxo, pelos desertos arábicos viajavam os nómadas beduínos, sem saberem ler nem escrever. Entre eles encontrava-se aquele que viria a ser o profeta Maomé [57]. O contacto e a convivência, ao longo das suas viagens, com judeus e cristãos e suas práticas religiosas, provocaram-lhe uma tal reflexão que este acabou por se considerar discípulo de Deus, procurando assim conduzir espiritualmente o seu povo. Invocou a guerra santa para aumentar a conversão dos povos, tendo os seus seguidores conquistado a Palestina, o Iraque, a Síria, o Egipto e, em 642, dez anos depois da sua morte, Alexandria. Reza a lenda que quando ao chefe das tropas vitoriosas lhe perguntaram o que devia ser feito aos livros da biblioteca alexandrina, este terá respondido que os queimassem.

Especulação ou não, a verdade é que muitas histórias foram contadas, nomeadamente que as obras gregas teriam sido queimadas não só pela sua superficialidade comparada com o Corão, mas também com o intuito de aquecerem a água dos banhos árabes.

A expansão do império árabe continuou avançando pela Pérsia até chegar ao Ocidente da Índia, invadindo ainda o Norte de África, Espanha e a Europa Ocidental. Contudo, esta não se limitou a conquistar territórios; em meados do século VIII surgiu o interesse pela ciência que existia no seio das populações submetidas ao jugo árabe. Havia já alguns anos que na Síria as obras de filosofia e das ciências gregas conheciam traduções na sua língua natural. No século seguinte as autoridades de Bagdad, califas e ricos mecenas encomendaram essas traduções, fazendo com que os eruditos islâmicos se debruçassem sobre a herança helenística da Antiguidade, traduzindo para árabe as principais obras gregas. Euclides, Ptolomeu e Galeno são alguns dos nomes que eles citam sem cessar. Tal permitiu à grande biblioteca da Casa da Sabedoria em Bagdad, equiparar-se, na sua intenção difusora, ao Museu de Alexandria.

«Foi durante o califado de al-Mamun [58] que os árabes se entregaram totalmente à sua paixão pela tradução. Diz-se que este califa teve um sonho em que apareceu Aristóteles, e em consequência al-Mamun decidiu mandar fazer versões árabes de todas as obras gregas em que conseguisse deitar as mãos.» [59] Não podemos deixar de referir que esta caça aos manuscritos foi considerável, atendendo a que muitas das obras que hoje conhecemos aos árabes as devemos, visto se terem perdido os originais gregos.

Com a introdução do sistema de numeração árabe baseado no sistema indiano, e o aperfeiçoamento da álgebra, a matemática recebeu um impulso decisivo. O mesmo aconteceu às ciências físicas, nomeadamente à óptica. Longe de ser uma simples intermediária, a ciência árabe vai literalmente refundir este domínio.

2.1. Al-Kindi, um discípulo de Euclides

O primeiro filósofo e matemático do mundo islâmico a dedicar-se aos estudos ópticos foi, sem dúvida, Abu Yusuf Ya'qub ibn Ishaq al-Kindi. Supõe-se que terá nascido nos finais do século VIII na cidade de al-Kufa, onde o seu pai era governador. Segundo alguns historiadores, após a sua infância Al-Kindi viaja para Bassorá e mais tarde ingressa numa escola de Bagdad, sob a responsabilidade de al-Mamun e de outros dois, al-Um'tasim e al-Wathiq. Ficou célebre como matemático, médico, astrónomo e filósofo. Considerado como um dos sábios mais estimados da sua época, os árabes apelidavam-no *filósofo por excelência*. Morreu por volta do ano 866.

Al-Kindi tornou-se o grande impulsionador da óptica grega. Para além de se esforçar em comunicar os conhecimentos gregos ao povo árabe, defendia o ensino da filosofia helénica aos jovens estudantes, o que nos é revelado pelas humildes palavras escritas no prefácio de um dos seus tratados sobre metafísica:

«É, então, conveniente reconhecer toda a gratidão que sentimos por todos aqueles que contribuíram, ainda que pouco fosse, para a verdade, já para não falar dos que muito contribuíram. Se eles não tivessem vivido, teria sido impossível para nós, apesar do nosso zelo, durante toda a nossa vida reunir esses princípios da verdade, os quais formam a base das inferências finais da nossa investigação. A reunião de todos esses elementos foi efectuada século após século, nos tempos que nos antecederam (...) É então, conveniente para nós não ficarmos envergonhados em agradecer a verdade e assimilarmos tudo aquilo que nasceu e chegou até nós, mesmo que sejamos conduzidos a gerações anteriores e a pessoas desconhecidas.» [60]

Imbuído neste espírito, escreveu cerca de duzentos e sessenta trabalhos em vários ramos do conhecimento. A óptica foi sem dúvida um dos seus temas de eleição, ocupando um importante lugar na sua filosofia natural. Sendo a visão considerada como algo divino, este sábio árabe procurou comparar as leis da óptica às da natureza, o que é expresso em *De radis stellarum*. Al-Kindi defende que os raios não são apenas emitidos pelos olhos, mas também pelas palavras que proclamamos. Estes raios conectam os nossos sentidos com o mundo através de uma transformação do ar que nos rodeia [61], possibilitando perceber qualidades como a forma e a cor do que observamos. Os raios existem como entes físicos, resultam em substâncias e actuam sobre as qualidades. Se essas substâncias forem compostas, não se alteram, sendo formadas a partir dos quatro elementos da natureza: ar, água, terra e fogo. Porém cada qualidade, excepto a sua composição, modifica-se pelo efeito da radiação recebida. Assim, quanto maior for a intensidade da radiação maior é a definição dessas qualidades, permitindo uma melhor percepção. À semelhança dos raios emitidos pelos nossos olhos, os que são irradiados pelo sol, para além de nos permitirem ver, fornecem também calor e quando concentrados num espelho chegam mesmo a queimar. Por conseguinte, Al-Kindi verifica que ambos os tipos de raios apresentam diferentes níveis de intensidade. Assim conclui que tudo o que existe emite raios em todas as direcções e portanto, o universo está ligado por uma rede de radiações que invade o espaço – dependendo da sua composição os raios afectam os objectos, por exemplo as pedras magnéticas tanto podem atrair cravos como estrelas.

Esta teoria teve um tal prestígio junto dos científicos medievais que, na ânsia de explicarem certos fenómenos luminosos, apoiaram as suas ideias nas leis ópticas. Se «a luz se reduz a raios que se deslocam por linhas rectas, então a ciência que se ocupa destas linhas, a óptica geométrica, poderia ser utilizada para explicar a transmissão das causas nos processos naturais, assim as leis da natureza seriam análogas às da óptica»[62]. Um dos seguidores desta doutrina foi Robert Grosseteste que, entre 1230 e 1240, escreveu dois pequenos tratados: *De lineis, angulis et figuri* e *De natura loci*, nos quais defende *«que a natureza e o seu tear de linhas de transmissão das causas estruturam-se segundo padrões geométricos próprios dos raios de luz»* [63].

Todavia Al-Kindi não se ficou por aqui, o seu interesse foi além da filosofia, avançando para uma abordagem científica. Possivelmente o tratado que o imortalizou foi *Liber de causis diversitatum aspectibus*, mais conhecido como *De aspectibus* onde desenvolve a óptica geométrica. Sublinhando, mais uma vez, que um dos motivos que o conduziram a escrever esta obra foi o desejo de corrigir e comunicar à sociedade islâmica a doação legada pelos sábios gregos.

A maioria dos historiadores é unânime em afirmar que *De aspectibus* constitui um complemento à óptica euclidiana. Grande parte deste tratado demonstra ou justifica algumas lacunas a que Euclides não deu importância. No primeiro postulado, o geómetra grego menciona a propagação rectilínea dos raios visuais a partir do olho. Al-Kindi prova-o recorrendo aos raios luminosos e não aos visuais, procurando assim dar prioridade às estruturas da luz no processo de visão. A sua demonstração assenta em considerações geométricas de sombras projectadas por um corpo opaco, quando este interrompe a trajectória de um raio luminoso. Considera duas situações distintas – na primeira (fig. 2.40) usa uma vela (DE) maior que o corpo considerado (AB), verifica que a sua sombra é projectada na superfície horizontal e o seu comprimento (GB) é proporcional à altura do corpo (AB), assim como a distância entre a vela e o fim da

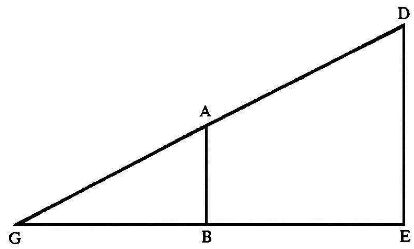


Figura 2.40.

da sombra (GE) é proporcional à altura da vela (DE). Ou seja:

$$\frac{\overline{GB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{DE}}$$

Tal não aconteceria se o segmento GAD não fosse recto.

Na segunda situação (fig. 2.41), a vela ABG é colocada opostamente à abertura UZ, atrás da qual se encontra uma protecção, HT. Seja K um ponto de HT, a partir do qual traçamos uma linha recta, constatamos que intersectará o ponto U e por prolongamento, o ponto B. O que prova, mais uma vez, que a luz se propaga mediante linhas rectas.

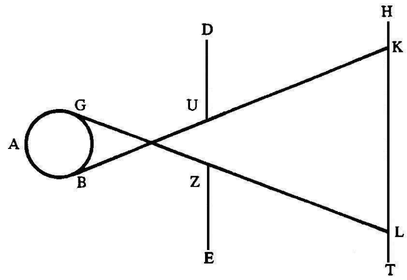


Figura 2.41.

Apesar de Al-Kindi aceitar que os raios viajem do olho em direcção ao objecto, introduz uma variante na versão euclidiana do cone visual. Tal como Ptolomeu, exclui a hipótese de o cone ser constituído por raios discretos, argumentando que este é formado por um volume de radiação gerado de maneira contínua. Nesta interpretação o raio deixa de ser uma mera recta geométrica e converte-se numa impressão produzida pelos corpos que inundam o espaço. O raio não é considerado uma partícula material nem algo com substância, mas uma transformação do ar que separa o olho do objecto. Assim, o poder visual prepara o meio para transmitir aquilo que se converterá em sensação visual no olho. Al-Kindi define no seu *De aspectibus* que *«um raio é uma impressão dos corpos luminosos sobre os corpos opacos»*[64]. E mostra que esta *impressão* está longe de ser unidimensional, usando como argumento que se um corpo apresenta três dimensões não poderia ser percepcionado por raios ou linhas rectas que estivessem separados entre si. Acrescenta ainda, que se considerarmos os raios como linhas, obviamente sem largura, o que o olho emite tocará no objecto observado e assim essas linhas como terminam num ponto, e este não tem grandeza, os raios não seriam capazes de o perceber. Conclui que os raios visuais só percebem os pontos, se estes apresentarem uma pequena área, passando a ter comprimento e largura. Portanto matematicamente, deixam de ser pontos para se transformarem em pequenas superfícies.

Em oposição a Ptolomeu, para quem o cone visual é único, apresentando o vértice no interior do olho e todos os raios são emitidos pela pupila, em Al-Kindi encontramos que cada parte da córnea em contacto com o exterior, é um ponto de partida de um cone.

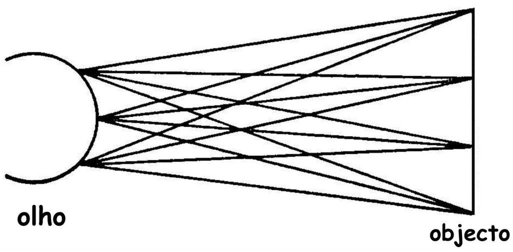


Figura 2.42. Multiplicidade de cones, de acordo com Al-Kindi.

Assim, todos os pontos que constituem o campo de visão de um observador, são iluminados por raios que ao saírem de qualquer parte do olho, têm uma conexão em linha recta com esses pontos. Este modelo permite a Al-Kindi introduzir um raio particular, o raio axial, que à semelhança do *eixo* de Ptolomeu, parte do vértice do cone e atinge o centro do círculo que lhe serve de base. É considerado assim como "o mais forte" de todos os raios e por este motivo existem variações de sensibilidade no interior do cone visual, sendo justificado pelo matemático árabe do seguinte modo:

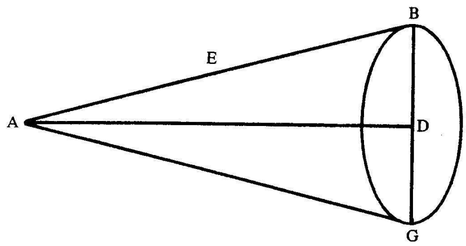


Figura 2.43. O cone visual, segundo Al-Kindi.

Um objecto em E, na superfície do cone visual, não é visto do mesmo modo que um colocado em D. Este último é percepcionado mais claramente do que o anterior por estar junto ao raio axial. Um dos factores que pode justificar este fenómeno é a relação existente entre a luz e a cor. A cor só é percepcionada caso seja iluminada pela luz e quanto mais forte esta for, mais distintamente se vê. O mesmo acontece aos raios visuais, quanto mais intensos forem mais clara se torna a percepção da cor. Convém explicarmos o que se entende por raio mais forte. O processo da visão consiste em transformar o meio que nos rodeia, portanto um raio é considerado "forte" se produzir uma transformação perfeita e completa, analogamente, é designado "fraco" caso a transformação realizada seja imperfeita e incompleta. Como o raio axial apresenta uma posição privilegiada este elabora uma transformação do meio de melhor qualidade que os restantes, sendo por isso o mais "forte". São nítidas as semelhanças desta teoria com as referidas variações de sensibilidade de Ptolomeu.

A multiplicidade de cones propostos por Al-Kindi permite que o objecto observado, caso seja atingido pelo raio axial, seja também banhado por mais raios, possibilitando uma melhor transformação do meio entre o objecto e o olho, cujo efeito traduziria uma percepção mais clara do objecto em causa. Baseando-se no lema *«duas velas iluminam melhor um lugar do que uma apenas»* [65], enuncia no seu *De aspectibus* a proposição 14:

«Seja o instrumento da visão, denominado olho, o círculo ABG, tendo como centro D. E seja a parte (do olho) que diz respeito ao poder de compreender o objecto visível, denominada por gibosidade externa do olho (córnea), o arco ABG. Desenhemos ZE tangente em B, o qual divide o arco AG em duas partes iguais; e a linha HT tangente ao ponto A, a qual é uma das duas extremidades da gibosidade externa do olho; e a linha IK tangente no ponto G, a qual é a outra extremidade. E seja o corpo observado o arco HEILTZK. Existirá um ponto directamente oposto ao centro do olho, o ponto L; tal que se desenharmos uma linha de L para B, esta será perpendicular a EZ.

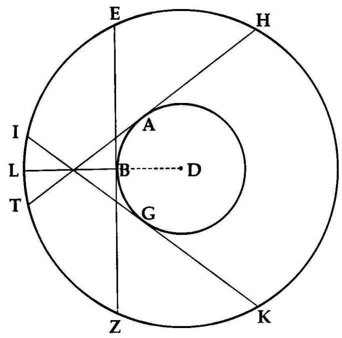


Figura 2.44.

Assim toda a parte do arco HT é iluminada pela parte A (do olho); por conseguinte a parte L é iluminada pela parte A. Analogamente, toda a parte do arco IK é iluminada pela parte G (do olho); portanto L é igualmente iluminado pela parte G. Também toda a parte do arco EZ é iluminada pela parte B, logo L é iluminado pela parte B. Consequentemente a parte L é iluminada por três partes (do olho), A, B e G.

Mas o arco EI é comum a dois arcos, HT e EZ, portanto é simultaneamente iluminado por duas partes, A e B. Seguindo o mesmo raciocínio demonstra-se que o arco ZT é iluminado pelas partes G e B. Porém o arco HE é uma parte de HT, assim sendo é iluminado apenas pela parte A. E de acordo com o argumento anterior prova-se que o arco ZK é iluminado exclusivamente pela parte G.

Desta maneira o ponto L é iluminado pelas partes A, B e G. E todo o ponto comum aos arcos EI e ZT é iluminado por duas partes, tal como dissemos. Por conseguinte L é mais iluminado que qualquer outro ponto comum aos arcos EI e ZT, e a iluminação destes dois arcos é maior que a iluminação dos arcos HE e ZK (...) Assim fica claro que o centro é fortemente iluminado, e o que estiver próximo dele é mais iluminado em comparação com o que está afastado, por ser atingido por mais luz, ou seja, por ser iluminado por mais partes.» [66]

Esta proposição atribui à superfície do olho as mesmas características de um corpo luminoso, o qual, enviando raios em todas as direcções, ilumina, desde cada uma das suas partes, todo o corpo que pode ser alcançado mediante uma linha recta.

Al-Kindi retém a geometria dos trabalhos de Euclides e de Ptolomeu, desviando-se das orientações anatómicas e fisiológicas de Galeno. Pelas inúmeras referências que faz a Euclides, na sua maioria favoráveis, os historiadores defendem que ele próprio considerava-se um fiel representante da teoria da visão euclidiana. Apenas dotou-a de interpretações galenas, no que diz respeito à natureza física dos raios visuais, e acrescentou algumas demonstrações dos postulados indicados pelo geómetra grego.

De aspectibus exerceu uma grande influência junto dos interessados pela óptica, só no mundo islâmico realizaram-se numerosas cópias juntamente com a *Óptica* de Euclides, as quais foram adoptadas como as verdadeiras teorias da visão.

2.2. Avicena e o renascer da Teoria Intromissionista

O primeiro grande ataque à teoria extramissionista surge por intermédio do árabe Abu ‘Ali al-Husain ibn‘Abdullah ibn Sina, mais conhecido por Avicena. Foi sem dúvida um dos filósofos mais influentes de toda a história islâmica. Nasceu nas imediações de Bukhara em 980, falecendo cinquenta e sete anos depois. Considerado um verdadeiro génio, por volta dos catorze anos tinha já estudado todas as obras gregas, o que lhe permitiu seguir a carreira de consultor, administrador e físico ao serviço de vários príncipes.

Como nobre pensador não podia deixar de dar testemunho das suas ideias. No que diz respeito às teorias da visão destacam-se as seguintes obras: *Danishnama* (Livro do Ciência) e *Liber sextus naturalium* ou *De anima*, nas quais revela alguma simpatia pelas teorias aristotélicas, rejeitando totalmente a concepção adoptada por Euclides e Galeno. Duas autênticas vítimas que encontramos nestes tratados, tais foram as duras críticas feitas por este árabe.

Em primeiro lugar condena absolutamente que o olho possa emitir qualquer tipo de raios. Questionando-se como seria possível que algo tão pequeno pudesse emitir uma substância contínua, suficientemente larga para sentir o hemisfério do mundo, acrescenta ironicamente:

«Terá que ser emergido do olho, apesar da sua pequenez, um corpo cónico de um tamanho imenso, o qual comprime o ar e repulsa todos os corpos celestes, a não ser que atravesse um espaço vazio.» [67]

Além disso, este processo teria de ser repetido sempre que os olhos estivessem abertos, ou seja, qualquer substância radial deveria ser repetidamente emitida e retornada. Este retorno surge como uma novidade, Avicena defende que qualquer substância proveniente do objecto, tal como o meio entre este e o observador, constituem dois factores indispensáveis no processo da visão. A sua concepção resulta de uma síntese baseada no diáfano aristotélico e nos simulacros lucrecianos.

Este filósofo árabe dedica uma cuidadosa análise à tese que sustem o raio luminoso como uma substância corpórea. Rejeitando que o olho possa ser concebido como uma nascente ígnea, um lume sensível dotado de luz própria que emite qualquer coisa de material, argumenta que a sensação visual pode ser explicada sem ser necessário recorrer a qualquer tipo de raios. Refere ainda, que a visão se processa primeiramente pela acção de um agente exterior, que transmite informação ao instrumento, o olho, e este por meio de vínculo orgânico comunica ao cérebro a recepção da imagem.

À semelhança de Ptolomeu e do seu compatriota Al-Kindi, também Avicena contesta Euclides, quanto ao facto do geómetra propor os raios visuais como discretos. Afirmando que se tal fosse verdade, os raios só percebiam o que encontravam, e assim o observador só percepcionava as manchas onde os raios incidiam, excluindo todas as outras que não eram atingidas por estes, portanto o observador só percebia uma parte do objecto vendo uns pontos aqui e outros ali, mas perdendo a maior parte.

Para além de todas as críticas que elabora nas suas obras, segue Ptolomeu quando compara a visão com a imagem formada num espelho, o que é expresso através das seguintes palavras:

«O olho é como um espelho, e o objecto visível é como algo reflectido nesse espelho pela mediação do ar ou de outro corpo transparente; e quando a luz incide no objecto, projecta a sua imagem dentro do olho (...) Se o olho possuir alma, verá a imagem nele formada.» [68]

Esta teoria permite-nos apreender como o afastamento de um objecto visível afecta a percepção do seu tamanho. Avicena, no seu *Danishnama*, apresenta o seguinte exemplo geométrico:

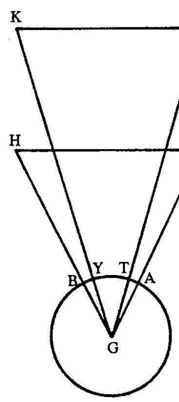


Figura 2.45.

A imagem de um objecto situado em HD é *lançada* para a superfície do olho em AB; se o mesmo objecto se deslocar para a posição KZ, a imagem ficará restrita a TY, o qual é menor que AB. Avicena conclui:

«É estranho que a pessoa que defende a teoria dos raios (emitidos pelo olho) também fale do ângulo (formado no olho pelo objecto visível); este é usado quando as imagens vêm em direcção ao olho, e não quando o olhar avança para a imagem.» [69]

Deste modo, Avicena elimina totalmente a teoria euclidiana – embora não menospreze a sua utilidade matemática, prova que esta não se adequa à física natural do mecanismo da visão. Em oposição valoriza a teoria aristotélica, mostrando a sua consistência e incorporando-lhe alguns elementos geométricos.

2.3. Alhazen, o prodígio da Óptica

Em 965 nasce em Bassorá aquele que se tornaria o verdadeiro génio desta ciência, Abu ‘Ali al-Hasan ibn al-Hasan ibn al-Haytham.

Por esta altura Bassorá estava em declínio devido ao enfraquecimento do poder abássida. Jamal al-Din ibn al-Qifti e Ibn Abi Usaybi’a [70], biógrafos de al-Haytham, contam-nos que este emigrou para o Cairo, tendo chegado em pleno renascimento da *mesquita-universidade*, onde certamente tomou conhecimento das obras originárias da escola alexandrina, visto desde o século anterior constituirem os pilares dos grandes centros científicos árabes. Foi nesta cidade que permaneceu até à morte, o que viria a acontecer em 1039.

Dotado de uma capacidade intelectual fora do comum, compôs mais de duzentos trabalhos em vários ramos do conhecimento: física, matemática, astronomia, cosmologia, meteorologia, óptica, medicina, metafísica e teologia. Neste vasto leque incluem-se os comentários aos *Elementos* de Euclides, ao *Almagesto* de Ptolomeu, às *Cónicas* de Apolónio e à *Física* de Aristóteles. Relativamente à óptica redigiu quinze obras entre 1028 e 1038, destacando-se a monumental síntese *Kitab al-Manazir* (Livro de Óptica). Tal foi o seu êxito, que por volta de 1200 aparece em latim sob o título *De* *aspectibus*[71], atribuído a um certo Alhazen [72] nome que o tornaria célebre no Ocidente. Este tesouro da óptica é constituído por sete livros. No primeiro expõe as pré-condições e os fundamentos físicos essenciais para a visão em termos da radiação da luz e da cor, e a estrutura anatómica e fisiológica do olho. No segundo livro explica como a radiação física é transformada em impressões visuais pelo complexo óptico entre o olho e o cérebro. No terceiro discute a origem das percepções incorrectas, as quais ocorrem quando as pré-condições mencionadas no primeiro livro excedem certos limites, como a influência da cor e da distância na percepção do objecto. No quarto, quinto e sexto livros são abordados os efeitos visuais da reflexão, introduzindo os princípios básicos, a formação das imagens em geral e a sua distorção de acordo com a reflexão na superfície do espelho. Termina os seus estudos com o sétimo livro, onde desenvolve os efeitos visuais da refracção.

À medida que a nossa leitura flui pelas páginas desta obra, são visíveis alguns traços da óptica grega. Não há dúvida que Alhazen conhecia os trabalhos de Euclides e Ptolomeu, o que nos é confirmado pelos seus biógrafos através de um tratado publicado em data incerta, cujo título nos elucida perfeitamente quanto ao seu conteúdo: *O livro no qual eu sumario a ciência da Óptica a partir dos dois livros de Euclides e Ptolomeu, ao qual adicionei noções do primeiro discurso perdido do livro de Ptolomeu*. Lamentavelmente esta obra encontra-se perdida, porém fica-nos a sensação que deve ter sido redigida antes *De aspectibus*, com o objectivo de realizar uma síntese da informação que lhe parecia mais importante. Esta interpretação deve-se ao facto de Alhazen apresentar neste *Kitab* uma tese totalmente original e distinta das teorias até então conhecidas. Contudo, são frequentes as referências aos sábios gregos.

Ao contrário da dureza e ironia evidenciados nos ataques avicenos, Alhazen elabora uma crítica compreensiva e construtiva, procurando justificar a adopção dos raios visuais pelos matemáticos como um meio auxiliar à análise geométrica dos fenómenos visuais. Estes raios são considerados como meras construções geométricas, indispensáveis para a demonstração das propriedades da visão, podendo servir como hipóteses matemáticas mas não como realidades físicas:

«Não usam nada nas suas demonstrações excepto linhas imaginárias, às quais chamam raios (...) e a sua crença nestas linhas radiais imaginárias é verdadeira, mas a fé na suposição de que qualquer coisa real emerge do olho é falsa.» [73]

Por conseguinte, Alhazen substitui os raios visuais pelos luminosos, à semelhança dos seus compatriotas Al-Kindi e Avicena:

«Se a visão ocorre graças a algo que transita desde o olho até ao objecto, então a dita coisa é um objecto ou não é. Se for (...) então ao contemplar as estrelas, sai do nosso olho, nesse momento, um corpo que enche todo o espaço entre o céu e a terra sem que o olho perca nada de si mesmo. Sendo isto impossível e absurdo (...) Se pelo contrário, aquilo que sai do olho não é um corpo (não possui substância), então não poderá "sentir" o objecto visível, dado que as sensações são próprias unicamente dos corpos animados. Por conseguinte nada sai do olho para "sentir" o objecto visível.» [74]

Propõe assim, um mecanismo para a visão baseado em algo que penetra no olho, argumentando empiricamente que:

«Seja quem for que olhe para uma fonte de luz muito intensa experimenta uma sensação de dor (no olho) e um possível dano (físico).» [75]

Tal é igualmente justificado a partir de experiências comuns do dia a dia – quando observamos um objecto branco por meio de uma luz intensa, ao fecharmos os olhos a imagem do objecto mantém-se. Reunindo todos estes factores, Alhazen afirma que:

«Se um corpo é opaco, então possui cor. E se é iluminado por qualquer tipo de luz, esta se fixará sobre a superfície, e da sua cor irradiará uma luz que partirá como forma que se estende em todas as direcções, ao alcançar o olho produzirá sobre ele um efeito (...) e o olho sentirá o objecto.» [76]

Alhazen recorre a estudos anatómicos do olho para explicar o mecanismo da visão, mas como a lei islâmica não permitia a dissecção de órgãos, este apresenta um diagrama do olho baseado nos antigos textos anatómicos de Galeno. Na verdade, o seu modelo foi tão bem elaborado que a maioria das designações atribuídas correspondem ao que é hoje ensinado nas lições de oftalmologia.

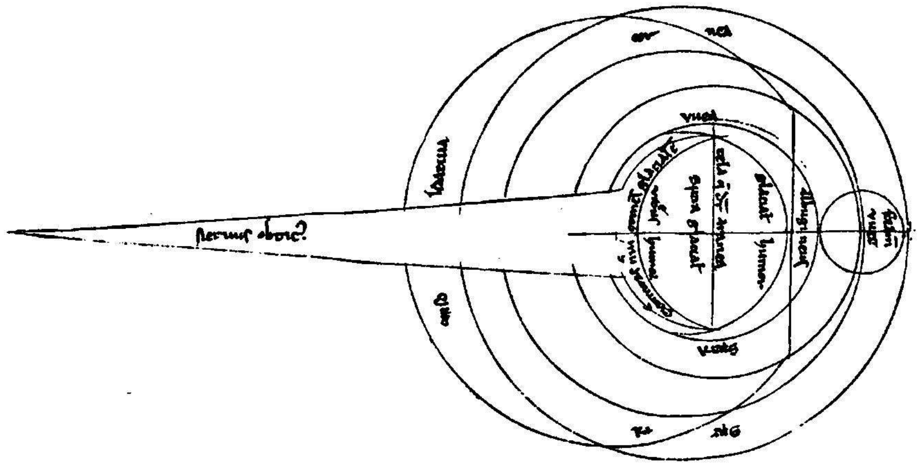


Figura 2.46. Estrutura anatómica do olho, segundo Alhazen.

Neste esquema, Alhazen apresenta um pequeno círculo no topo do olho designando-o por *foramen uvee* (abertura da uvea), o que hoje conhecemos por pupila, a qual está inserida na *spera cornea*, sendo esta interceptada pela *consolidativa* (conjuntiva). No interior da *spera cornea* localiza-se a *spera uvea*, que cerca o *albugeneus* (humor albugeneo), o *glacialis humor* (humor cristalino) e o *vitreous humor* (humor vítreo). A estrutura afunilada contida na esfera do *glacialis* é o *nervus obticus* (nervo óptico). A localização do cristalino no centro do olho, e não à frente onde realmente se situa, deve-se a questões filosóficas – sendo a visão o mais nobre dos sentidos, o olho deveria assim possuir uma forma perfeita igual à do universo, por conseguinte teria de ser esférico, e como o cristalino é um órgão vital para a visão, concerteza devia ocupar a região central.

Ao transformar o olho num instrumento óptico, o génio árabe adopta literalmente o princípio aristotélico – *na visão tudo é refracção*. O seu modelo de radiação estabelece que cada ponto no olho recebe um raio em linha recta de cada ponto do campo visual [77], os quais invadem a superfície da córnea sob vários ângulos, como ilustramos de seguida:

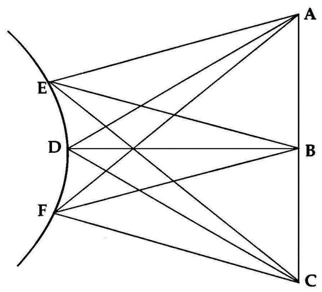


Figura 2.47.

Sejam A, B e C pontos da superfície visível representada pelo segmento ABC. Cada um deles emite diversos raios para a superfície da córnea, descrita pelo arco EDF. Consequentemente, os pontos deste arco receberão simultaneamente vários raios provenientes de todos os pontos da superfície visível. Contudo, apenas os raios que incidem perpendicularmente demonstram adequadamente a sua impressão. Os outros são simplesmente ignorados pela sua relativa debilidade, o que traduzido fisicamente equivale a dizer serem refractados.

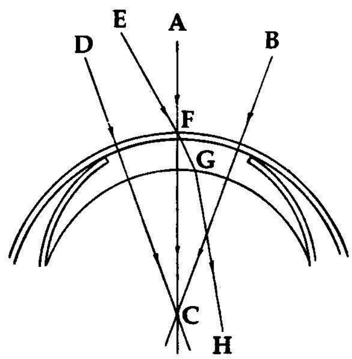


Figura 2.48. Refracção dos raios luminosos na superfície do olho.

Uma vez atravessada a superfície da córnea, o cristalino filtra o caos das impressões que o atingem seleccionando apenas as que formam um cone de radiação, cujo vértice se situa num ponto ao centro do olho; a base é representada pela superfície de radiação e o eixo do cone tem a mesma representação que a de Ptolomeu. Claramente influenciado pelo astrónomo grego, Alhazen atribui um papel essencial ao raio central. Caso este não incida perpendicularmente no olho, a assimilação que o cérebro faz da imagem observada não será totalmente correcta e esclarecedora, o que se ilustra do seguinte modo:

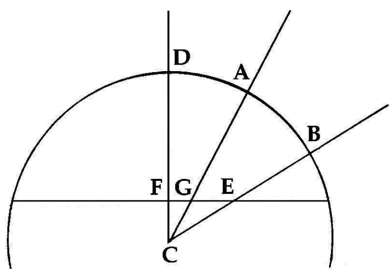


Figura 2.49.

Seja o segmento AGC o eixo do cone visual que, apesar de incidir perpendicularmente na superfície da córnea, atinge obliquamente a fronteira entre o *glacialis* e o humor vítreo, fronteira esta representada na figura pelo segmento FGE. Sejam ainda C o centro do olho, e DFC e BEC os raios que flanqueiam o cone, equidistantes do raio axial. Por conseguinte, os arcos AD e AB são congruentes, embora a sua projecção em FGE resulte nos segmentos FG e GE claramente desiguais. Assim, o génio árabe mostra que não é suficiente a incidência ortogonal na superfície da córnea, sendo necessário que essa ortogonalidade se mantenha até ao humor vítreo.

Matematicamente equivalente ao cone visual de Euclides e de Ptolomeu, o cone luminoso de Alhazen assegura que no olho vai ser representada de uma forma abstracta, uma ilustração ponto por ponto do objecto visível, tomando a forma de um mosaico com as cores e as formas individuais que apresentava na superfície anterior do cristalino.

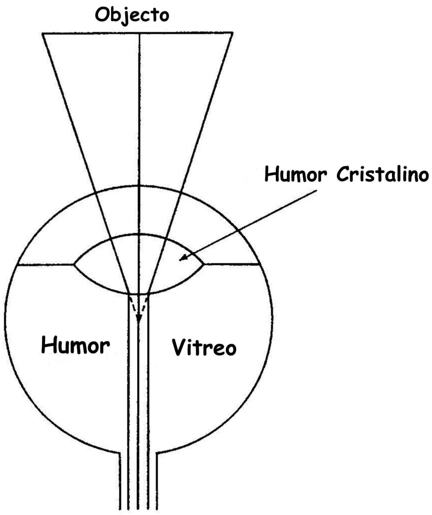


Figura 2.50.

Esta *pintura* final representa o objecto observado. A sua última apreensão ocorre através da transmissão de uma ordem específica entre o olho e o cérebro por meio do nervo óptico.

Alhazen acrescenta ainda um aspecto importante – se os raios forem refractados na córnea, a imagem projectada na superfície do *glacialis* aparecerá invertida:

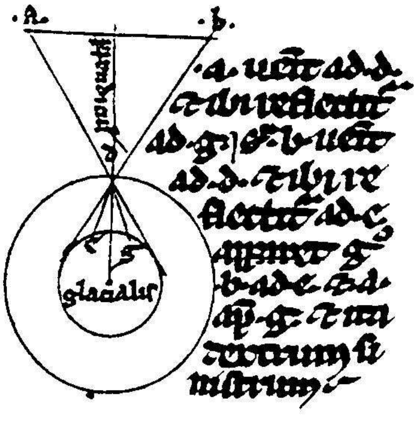


Figura 2.51. A inversão das imagens observadas, de acordo com Alhazen.

Na legenda que acompanha esta figura, Alhazen justifica a inversão da imagem argumentando que *«A atinge D e neste ponto é refractado para G; assim como B incide sobre D sendo refractado em E; consequentemente B aparece em E e A em G; então a mão direita (ponto B aparece na) mão esquerda (lado do glacialis, e vice-versa)»* [78].

O facto de Alhazen se basear nas obras galenas pode tê-lo prejudicado, pois os argumentos aqui apresentados pecam pela sua primitividade, e além disso não são totalmente correctos. Na verdade a imagem projectada no olho inverte-se, mas não no cristalino; teremos pois de esperar até ao século XVII para Johannes Kepler descobrir a verdadeira solução. [79]

Constatamos que toda a teoria em torno destas ideias árabes é, de alguma forma, complexa. Porém, como vimos, o cerne deste problema reside na refracção, cuja formulação matemática tantas dores de cabeça causou aos físicos. Mas encontramos em Alhazen pontos cruciais que muito ajudaram os estudos seguintes, pois para além de toda esta exposição menciona ainda, que os raios refractados jamais atravessam ou coincidem com a normal à superfície:

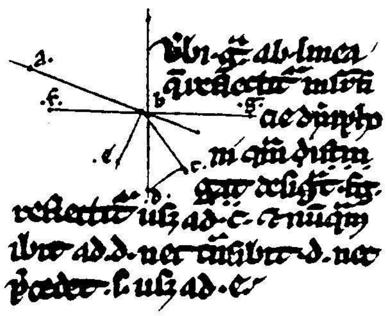


Figura 2.52. A refracção, segundo Alhazen.

Nesta inscrição Alhazen afirma que *«por exemplo a linha AB, a qual é refractada numa superfície transparente designada por FG, é refractada em C e nunca continua para D ou atravessa D ou prossegue para E»* [80].

Toda esta doutrina é digna de elogio, pois encontramos nestas ideias os primeiros passos para a formulação de uma lei da refracção. É surpreendente como o movimento do raio já é decomposto segundo duas componentes, uma paralela e outra perpendicular ao plano de separação dos dois meios – enquanto a velha óptica de Euclides e Ptolomeu gira em torno do raio visual e a imagem obtida é uma espécie de ilusão, perdendo toda a sua razão de ser quando o observador se ausenta.

Com Alhazen a imagem adquire outro estatuto, a sua existência é independente da existência de um observador que a contemple. «Ao inverter o sentido da propagação do raio, a óptica árabe traz respostas novas, mas, mais que isso, suprime antigos problemas e cria novos. Com efeito, para um olho tornado receptor, o problema da emissão já não se põe, nem o da visão conjunta de objectos situados a distâncias muito diferentes. Em contrapartida, o problema da percepção é renovado, ainda que grandemente complicado pelo princípio da composição punctiforme do objecto numa multiplicidade de raios que o olho deve recompor. Esta dificuldade vai colocar o órgão no centro dos problemas e promovê-lo, durante mais de seis séculos, ao primeiro plano das máquinas ópticas.(...) Na obra de al-Haytham cada raio, tornado numa *seta-esfera*, submetida a velocidades extremas, encontra neste modelo a justificação da linearidade da propagação e da igualdade dos ângulos de reflexão.» [81]

3. O triunfo da Igreja

No início do século X a ciência árabe, preparada por um intenso trabalho antecedente e favorecida directamente pelos califas de Bagdad e por outros príncipes de mente alumiada, começa a expandir-se no Oriente de maneira mais intensa. O fim deste século e o começo do seguinte constituíram a *idade de ouro* desta ciência oriental.

«As obras de Aristóteles, Euclides, Ptolomeu, Hipócrates e Galeno seguiram para o Oriente com os cristãos heréticos, monifisistas e nestorianos, e com os judeus perseguidos por Bizâncio foram legadas às bibliotecas e às escolas muçulmanas que as receberam abertamente. Ei-las agora, num périplo de retorno, que desembarcam nas praias da cristandade ocidental. É muito reduzido o papel da franja de estados latinos do Oriente. Essa frente de recontros entre o Ocidente e o Islão é sobretudo uma frente militar, de oposição armada a frentes cruzadas. Troca de golpes, não de ideias nem de livros. Raras são as obras que se infiltram através dessa fronteira de combates. Acolhem os manuscritos orientais duas zonas primordiais de contacto: a Itália e sobretudo a Espanha. Aqui, nem as permanências esporádicas dos muçulmanos na Sicília e Calábria, nem as vagas da Reconquista cristã conseguiram impedir as trocas pacíficas. Os caçadores cristãos de manuscritos gregos e árabes desfraldam as velas até Palermo, onde os reis normandos da Sicília e depois Frederico II com a sua chancelaria trilingue – grega, latina e árabe – animam a primeira corte italiana renascentista; precipitam-se sobre Toledo, reconquistada aos Infiéis em 1087, onde os tradutores cristãos já puseram mãos à obra, sob a protecção do arcebispo Raimundo.»[82]

Recomeça novamente a saga das traduções, agora em latim. Longe de viajarem ao encontro do islão, os operários das letras dirigem-se para as caixas onde ecoam as vozes dos eruditos gregos e árabes, procurando retirar desta cultura o fermento do espírito e os métodos do pensamento que virão a caracterizar o Ocidente: a força intelectual, a clareza de raciocínio e a preocupação com o rigor científico. Mas na verdade Espanha e Itália apenas realizam o tratamento inicial do material greco-árabe, pois a assimilação do seu conteúdo pelos intelectuais efectua-se noutros centros.

Em Paris, a cidade farol e fonte de todo o gozo intelectual, os escolásticos da Sorbonne absorvidos pelas obras aristotélicas e discípulos da antiga concepção da visão, afastam-se do estudo da óptica. Já os sábios da escola de Oxford, e fundamentalmente o seu fundador o bispo de Lincoln, Robert Grosseteste[83], colocam a óptica no centro das suas investigações. Será durante o século XII que se despertará o interesse dos intelectuais pela natureza da luz e pelos fenómenos com ela relacionados, permitindo aos eruditos explicá-los à custa da óptica.

Robert Grosseteste foi sem dúvida o fundador da óptica no Oeste. Nos seus trabalhos, são claras as influências da literatura grega e árabe, nomeadamente as obras de Euclides e de Al-Kindi. Supomos que Grosseteste não teve acesso aos principais tratados ópticos, pois não encontramos vestígios nos seus escritos da óptica de Ptolomeu e de Alhazen. Fazendo uma leitura de Aristóteles diferente da dos escolásticos parisienses, o bispo de Lincoln retoma a concepção da luz como uma graça divina. Toda a realidade material se reduz à natureza da luz e, à semelhança de Herão de Alexandria, defende que *«qualquer operação da natureza realiza-se da maneira mais breve possível»*, ou seja *«a natureza age segundo o caminho mais curto possível»* [84]. O bispo de Lincoln coloca assim, o estudo da luz no centro da concepção do mundo físico, transformando-a no problema central de qualquer conhecimento: *«tudo é uno, proveniente da perfeição de uma luz única e as coisas só são múltiplas graças à multiplicação da própria luz»* [85].

No quadro exibido pelo pensador inglês, a óptica surge como a primeira das ciências, em que a luz é considerada como a forma elementar. Grosseteste casa a óptica com a geometria, uma vez que as causas dos efeitos naturais devem ser explicados matematicamente mediante *lineis, angulis et figuris*.

Este bispo de Lincoln, foi uma importante figura na história do pensamento inglês. Exerceu uma poderosa influência na vida intelectual do século XIII, especialmente em Oxford como franciscano. Esta influência não se deve apenas à posição que ocupava, mas fundamentalmente às suas capacidades intelectuais.

«Na sucessão, porém, dos espíritos eminentes, que deixaram rasto de luz na história da Idade Média, aparecem homens que, saindo para fora do seu século, antecipando as grandes conquistas da moderna ciência experimental, buscaram investigar os segredos da natureza, e difundir, quanto cabia nos recursos e na publicidade daquele tempo, as ideias que se lhe afiguravam mais correctas acerca do universo dos seus fenómenos e das suas leis.»[86] Um destes homens foi Alberto Magno[87], também ilustre fora dos altares cristãos. Possivelmente um dos primeiros filósofos naturais a abrir «as trevas aparentes dos séculos médios, a estrada gloriosa das investigações e dos trabalhos científicos»[88]. Este homem enciclopédico foi mestre de Tomás de Aquino[89] e dominou a ciência na Idade Média. As suas ideias eram fruto da escolástica, defendendo que o saber podia ser obtido através da fé ou da razão. Ambos os géneros de sabedoria procediam de Deus e consequentemente não se podiam contradizer, devendo estarem por isso de acordo.

Contrastando com as ideias escolásticas, estiveram as teorias do monge Roger Bacon. De acordo com Humboldt, Bacon «pode ser considerado como a mais notável aparição da Idade Média, no sentido de haver mais do que ninguém directamente contribuído para acrescentar as ciências naturais, para fundá-las sobre a base matemática, e para provocar os fenómenos pelos processos da experimentação»[90].

Bacon nasceu no seio de uma próspera família inglesa por volta de 1214, estudou filosofia e teologia primeiro em Oxford e mais tarde em Paris. Depois de ler durante vários anos as obras aristotélicas, alargou os seus horizontes em termos da ciência universal. De regresso a Oxford, veste o hábito de S. Francisco e toma conhecimento dos trabalhos realizados por Robert Grosseteste, não se cansando de elogiar o pensador inglês.

A amplitude da sua ciência e a originalidade dos seus conhecimentos valeram-lhe o título de *doctor mirabilis* (“doutor maravilhoso”). O seu papel nas letras e nas ciências foi notável. Não era propriamente um filósofo, mas sim um asceta e um naturalista. Apesar de muito estimar Aristóteles, o ardente doutor de Oxford condena o ensino das teorias aristotélicas, chegando a manifestar, numa carta dirigida ao Papa Clemente IV, o desejo de «queimar todos os livros de Aristóteles, para impedir a propagação dos erros entre os estudantes do seu tempo»[91].

A ânsia de escalar a difícil montanha do conhecimento conduziu-o a estudar com satisfação todos os ramos da ciência, o que inicialmente lhe causou alguns problemas na sua ordem franciscana, já que se dedicava mais às ciências que à religião, mas por expresso desejo do seu amigo Papa Clemente IV, foi-lhe permitido dedicar-se à sua tão estimada actividade científica.

«Era grande e iluminado o espírito aquele que, desde o estreito recesso de uma cela monástica na torre de Oxford, entre os pergaminhos escolásticos e as retortas onde prosseguia a transmutação dos metais, dilatava as vistas proféticas até aos horizontes mais esplêndidos da ciência moderna, e aos prodígios admiráveis da indústria dos nossos dias.»[92] Foi neste ambiente que Bacon compôs a *Opus Majus*, considerada por muitos como a obra de maior valor científico de toda a Idade Média, em que apresenta um conjunto de peregrinas experiências e observações demonstrando também, o seu espírito visionário[93]. Um dos capítulos desta obra intitula-se *Perspectiva*, onde Bacon expõe metodicamente algumas ideias de Robert Grossesteste, enriquecendo-as com os conhecimentos das literaturas grega e árabe sobre as ciências matemáticas.

O essencial da sua teoria sobre a visão é inspirada naqueles que mais contribuíram para o desenvolvimento da óptica geométrica, Ptolomeu e Alhazen. Despertando-o para o poder da matemática e a sua aplicação à física, perfila a matemática como uma entrada para o conhecimento, a chave do mistério de todas as ciências, o que é claramente mencionado na *Opus Tertium*: *«é a primeira de todas as ciências, sem a qual as outras não podem ser percebidas»*, acrescentando ainda que *«a causa natural das coisas não pode ser dada, excepto por meio da geometria»*[94]. Este ramo da matemática é fundamental para Bacon, permitindo analisar a propagação e a trajectória da radiação luminosa, bem como os fenómenos de reflexão e de refracção.

À semelhança de Alhazen, para o "Doutor Admirável" os raios ou espécies, como os designa, são emitidos em todas as direcções a partir de todos os pontos do objecto visível até à superfície do olho, estabelecendo-se uma correspondência entre os pontos do campo visual e os da superfície do olho, e sendo por isso necessário um mecanismo para os organizar:

«Embora em todos os pontos do olho e da córnea se formem vértices de uma pirâmide proveniente do objecto, e as espécies de todos esses pontos se misturem no olho, ou na córnea, ou na abertura da pupila, chega uma espécie perpendicular a partir de um único ponto do objecto visível, porém esse mesmo ponto é atingido por uma infinidade de espécies segundo diferentes ângulos. Por conseguinte desde que o corpo do olho seja mais denso que o ar, é necessário, de acordo com as leis da refracção, que todas as linhas oblíquas sejam refractadas na superfície da córnea. Desde que a incidência seja obliqua as espécies enfraquecem, e por conseguinte refractam-se. Como a incidência perpendicular é forte, a espécie perpendicular oculta as obliquas, do mesmo modo que luz clara e forte oculta as luzes fracas.» [95]

Esta teoria conduziu-o a um profundo estudo anatómico do órgão da visão. Baseando-se nos esquemas realizados pelo génio árabe, verificou que as túnicas e os humores do olho são todos esféricos ou porções de esferas, com centros situados num segmento de recta – o eixo do olho, o qual parte do centro da pupila e termina no nervo óptico. A córnea e a superfície anterior do cristalino são concêntricas, portanto os raios que são perpendiculares a uma também são perpendiculares à outra.

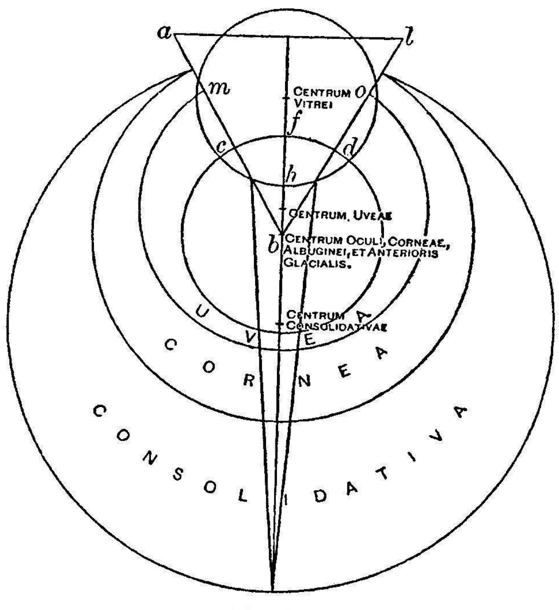


Figura 2.53. Anatomia ocular e formação da pirâmide de radiação, de acordo com Bacon.

Como resultado, estes raios passam através da córnea para o humor cristalino sem sofrerem refracção. A superfície posterior do cristalino (interface entre o cristalino e o humor vítreo) é esférica, com a curvatura precisamente requerida para projectar os raios através do humor vítreo para o nervo óptico, o que os conduz para o último poder sensitivo localizado no nervo comum, onde se dá a união entre os nervos ópticos dos dois olhos. Bacon ilustra esta concepção do processo visual através da seguinte figura:

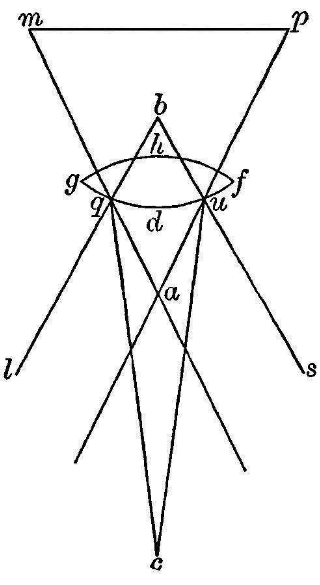


Figura 2.54. Refracção dos raios luminosos no cristalino, segundo Bacon.

Os raios partem do objecto, representado pelo segmento de recta MP, e incidem perpendicularmente na superfície anterior do cristalino GF, atravessam-no sem sofrerem refracção e dirigem-se para o centro do olho, representado por A. Porém, antes de o atingirem, como passam do humor cristalino para o humor vítreo e estes apresentam diferentes densidades, refractam-se em Q e V, pontos situados na fronteira dos dois humores. De seguida propagam-se no humor vítreo e no nervo óptico intersectando-se no ponto C, situado no nervo comum.

A pirâmide ou cone visual é assim formada, tendo como base o objecto visível e o vértice no centro da córnea. A visão ocorre quando esta pirâmide de radiação penetra no olho do observador e os raios se organizam na superfície do humor glacial (cristalino). O objecto só é percebido distintamente através desta pirâmide em que existem tantas linhas como partes ou pontos no corpo visível, e ao longo das quais chegam as espécies individuais do objecto prolongadas até ao humor glacial. Posteriormente, estas são organizadas na superfície do órgão sensível exactamente como se encontram no objecto observado.[96]

Introduzido o mecanismo da visão, o "Doutor Maravilhoso" analisa, nos capítulos seguintes, a percepção dos objectos propriamente dita – por outras palavras, ele procura apresentar justificações para as ilusões que por vezes ocorrem como fruto de factores vários. Um deles é, sem dúvida, a distância entre o objecto e o observador. Conhecedor da óptica euclidiana, refere que:

«O autor do Livro da Visão (Euclides) e muitos outros julgavam que as magnitudes são compreendidas pela amplitude do ângulo formado no olho do observador. Uma vez que no início desse livro é postulado que as coisas vistas "sob ângulo maiores parecem maiores, sob ângulos menores parecem menores e sob ângulos iguais parecem iguais". Mas isto não é suficiente, tal como Alhazen ensinou por meio dos seguintes exemplos:

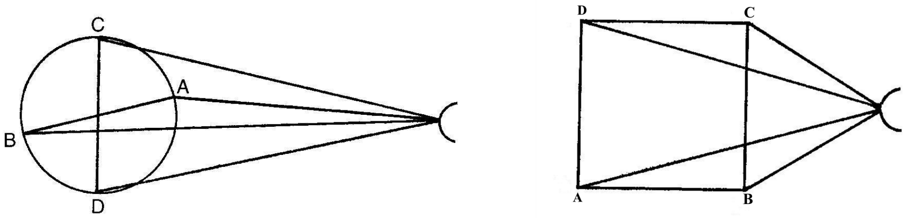


Figura 2.55.

Para diferentes diâmetros AB e CD desenhados no círculo, é evidente que AB é visto sob um ângulo muito menor embora os dois diâmetros sejam iguais. De forma análoga para os lados de um quadrado, o lado AB é visto de ângulo menor que BC, porém apresenta igual comprimento. E a visão julga tais lados como iguais, assim como os diâmetros do círculo quando observados a distâncias moderadas. Portanto a amplitude do ângulo é insuficiente para a percepção visual.» [97]

Bacon acrescenta que a distância entre o objecto e o olho é avaliada com base nas grandezas que nos são empiricamente familiares do objecto em questão. Esta explicação adequa-se se o objecto observado for conhecido, pois caso estejamos perante algo que nos é desconhecido e este se encontre a uma distância considerável que não nos permita ter a certeza de o estarmos a avaliar correctamente, corremos o risco de ao nos aproximarmos alterarmos a imagem que dele criámos. Uma situação em que tal pode ocorrer é o caso das formas rectangulares parecerem circulares. Esta questão também abordada por Euclides, merece a seguinte justificação de Bacon:

«(...) Um polígono equilátero directamente oposto ao olho parece circular, um círculo parece ser uma linha recta e uma esfera é percebida como uma figura plana. Os ângulos de uma figura, são percebidos em relação ao corpo inteiro a uma distância

apropriada, mas são imperceptíveis quando a distância for imoderada; por conseguinte as coisas angulares são julgadas como circulares.(...) Os ângulos desaparecem gradualmente, desde que sejam insignificantes em comparação ao seu afastamento imoderado; nem a aproximação dos ângulos ao olho excede a perceptibilidade da parte do círculo ou da esfera inscritos na figura, pois a amplitude dos ângulos é modesta ou insensível comparada com a distância. Não é apenas Alhazen no Livro 3, o único a defender este ponto de vista, também o autor do "Livro da Visão" refere o mesmo: "Figuras rectangulares vistas à distância parecem oblongas". Desde que a figura rectangular conheça estas condições deve ser equilátera, a outra tradução (do mesmo tratado) acrescenta: "quadrados parecem redondos com a distância"; isto é verdade não apenas para os quadrados, mas também para todas as figuras equiláteras (...) O mesmo não acontece para outros polígonos nos quais o círculo e a esfera não podem ser inscritos, desde que a aproximação do ângulo ao olho possa ser percebida mesmo a uma grande distância. Eu próprio já assisti a este desaparecimento. Os ângulos de um corpo equilátero desaparecem gradualmente até que todo o corpo pareça redondo e um corpo redondo como não tem ângulos desaparece abruptamente no seu todo quando observado a longa distância, transformando-se num plano.» [98]

Mas o contributo de Roger Bacon para a óptica não ficou por aqui, a ele se atribuem os primeiros estudos para a invenção do microscópio e do telescópio, sendo considerado por muitos um precursor de Galileu e de Newton pelas curiosas interpretações que efectuou acerca da propagação, reflexão e refracção da luz. O Doutor de Oxford «levantando o grito da insurreição contra a doutrina de Aristóteles, traçou o caminho à inteligência no descobrimento das verdades experimentais. (...) Se Abelardo, pelas tendências ousadamente inovadoras da sua teologia, foi, apesar das suas intenções piedosas e ortodoxas, o percursor de Lutero, Roger Bacon adivinha Galileu, e ambos recebem antecipadamente o clarão indeciso da mesma luz esplêndida que mais tarde iluminou o génio de Descartes, e deixou ler, em toda a sua evidência regeneradora, a carta magna onde estava escrita a emancipação do pensamento.» [99]

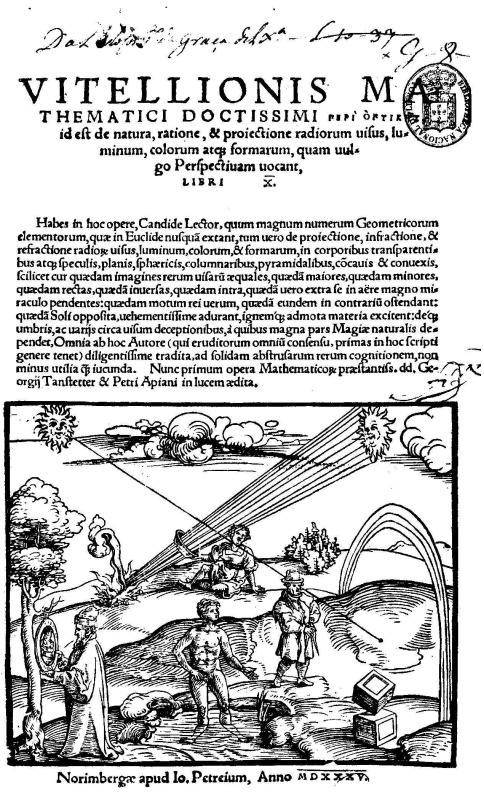
Em meados de 1267, Roger Bacon enviou *Opus Majus* [100] (contendo *Perspectiva*), *Opus Minus* e *De Multiplicatione Specierum* para a corte papal, então localizada em Viterbo.

Ainda nesta época, surge um novo tratado de óptica apresentando sinais de influência baconiana. Este novo trabalho intitula-se *Perspectiva* e é atribuído a Vitélio[101], um filósofo e matemático polaco associado à corte papal na década de setenta. Nesta casa de discípulos de Cristo, Vitélio estabelece amizade com o confessor papal William Moerbeke, quem possivelmente lhe dá a conhecer a obra do "Doutor Admirável", encorajando-o a dedicar-se aos estudos ópticos.

A *Perspectiva* de Vitélio teve uma importância fundamental para a moderna teoria da percepção, tendo sido muito apreciada por Pedro Nunes e Johannes Kepler.

Vitélio segue de uma forma geral as fontes ópticas disponíveis no século XIII. O físico silesiano tem muito em comum com Bacon e Grosseteste quanto à sua metafísica da luz, colocando em Deus o manancial primeiro da luz de onde irradiam as formas espirituais, as quais, ao reflectirem-se em matéria, teriam originado as formas sensíveis. Bebe ainda nas fontes dos grandes clássicos – *Elementos* e *Óptica* de Euclides, Ptolomeu e Alhazen, *Cónica*s de Apolónio de Perga, *Catóptrica* de Herão de Alexandria, Menelau, Teodoro e Papus.

A partir da sua própria experiência e observação, aborda neste tratado aspectos físicos da óptica, fenómenos de reflexão e refracção como o arco-íris, questões fisiológicas e psicológicas da visão, analisando ainda os raios solares, as lentes e os espelhos parabólicos. A imagem que figura no frontispício deste manuscrito é toda ela um resumo do conteúdo que acabámos de referir.


VITELLIONIS MATHEMATICI DOCTISSIMI περὶ ὀπτικ
id est de natura, ratione, & proiectione radiorum uisus, luminum, colorum atque formarum, quam uulgo Perspectiuam uocant,
LIBRI X.

Habes in hoc opere, Candide Lector, quum magnum numerum Geometricorum elementorum, quæ in Euclide nusquã extant, tum uero de proiectione, infractione, & refractione radiorum uisus, luminum, colorum, & formarum, in corporibus transparentibus atque speculis, planis, sphæricis, columnaribus, pyramidalibus, cõcauis & conuexis, scilicet cur quædam imagines rerum uisarũ æquales, quædã maiores, quædam minores, quædam rectas, quædã inuersas, quædam intra, quædã uero extra se in aëre magno miraculo pendentes: quædam motum rei uerum, quædã eundem in contrariũ ostendant: quædã Soli opposita, uehementissime adurant, ignemque admota materia excitent: deque umbris, ac uarijs circa uisum deceptionibus, à quibus magna pars Magiæ naturalis dependet, Omnia ab hoc Autore (qui eruditorum omniũ consensu, primas in hoc scripti genere tenet) diligentissime tradita, ad solidam abstrusarum rerum cognitionem, non minus utilia quam iucunda. Nunc primum opera Mathematicorum præstantiss. dd. Georgij Tanstetter & Petri Apiani in lucem ædita.

Norimbergæ apud Io. Petreium, Anno MDXXXV.

Figura. 2.56. A *Perspectiva* de Vitélio. [102]

Também Vitélio teceu algumas críticas à óptica euclidiana, condenando o facto desta se basear no axioma do ângulo:

«Tudo aquilo que vemos de um ângulo maior, parece maior e tudo o que vemos de um ângulo menor, se nos afigura menor. Quanto à aparência, uma coisa que seja vista de um ângulo maior, parece maior do que se for vista de um ângulo menor. Em geral, a proporção do tamanho de uma coisa está directamente de acordo com a proporção do ângulo ou no mesmo ângulo de visão(...) porém quando se trata de coisas vistas de lado ou de uma coisa vista de lado e outra a direito, isto já não é assim.» [103]

Ilustramos de seguida o que Vitélio pretende explicar:

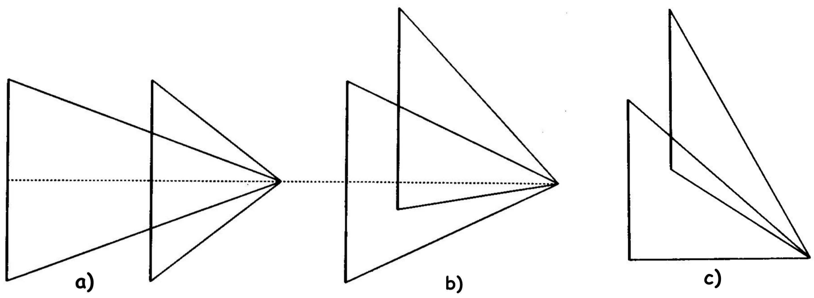


Figura 2.57.

De facto, em a) os tamanhos aparentes são proporcionais aos ângulos de visão, o que não acontece em b) e c).

Todavia, a influência do *admirável doutor* de Oxford não se ficou por aqui, pois exerceu outrossim uma poderosa ascendência sobre o seu compatriota John Pecham[104], autor de dois textos sobre óptica largamente divulgados e lidos. No início de 1260 ambos habitavam o convento franciscano de Paris, período durante o qual Bacon estudou óptica mais intensamente, havendo por isso oportunidade para ambos discutirem os assuntos ópticos, ou eventualmente Pecham ler os manuscritos de Bacon. Ambas as situações são possíveis, embora encontremos num passo de *Opus Minus* as seguintes palavras:

«Os meus superiores e irmãos, disciplinaram-me mantendo-me fechado, não permitindo que ninguém viesse até mim, com receio que os meus trabalhos pudessem ser divulgados por outros.» [105]

Imaginemos – John Pecham está sentado comodamente no seu quarto conventual e as discussões com o irmão Roger afloram-lhe à memória; à sua frente encontram-se os clássicos gregos e árabes e várias folhas de pergaminho ainda em branco. Molha a pena no tinteiro – nada há mais difícil do que estar perante uma folha em branco, as primeiras palavras saiem com dificuldade... Mas rapidamente a pena ganha ritmo – tem tanto para escrever! Primeiro, a abordagem filosófica evocando principalmente os nomes de Aristóteles, Al-Kindi e Avicena. E eis a composição de um pequeno volume de quarenta e cinco páginas. O título devia ser sugestivo, a singela *Perspectiva* não o satisfaz, decide-se por *Tractatus de Perspectiva*.[106]

Porém muito ficou por dizer, mas ainda há tempo para aperfeiçoar e conferir alguma originalidade. Na história que se segue os matemáticos são os protagonistas. Euclides, esse sinónimo dos *Elementos*, assume um papel preponderante; para além de o referir incessantemente, todo o texto é escrito ao jeito da sua axiomática. Dando conta dos equívocos euclidianos, entra em cena Alhazen, o prodígio árabe. Começa assim, a viagem dos *apóstolos da luz* até ao órgão da visão:

«Cada corpo natural, visível ou invisível, difunde o seu poder radiante nos outros corpos. A prova disto deve-se a uma causa natural, um corpo natural actua exteriormente a si próprio através da multiplicação da sua forma. Consequentemente estes actos tornam-no mais nobre e permitem-no agir fortemente. E desde que a acção seja em linha recta é mais fácil e mais forte para a natureza, cada corpo natural, visível ou não, deve multiplicar a sua espécie numa linha recta contínua; e isto é irradiar.» [107]

Tal como Darwin se refere à selecção natural, em que sobrevivem os seres mais fortes, também os raios perpendiculares à superfície do olho prevalecem em relação aos restantes, formando a já tão falada pirâmide visual. Podíamos introduzir aqui algo de novo, pensa o irmão John, visto a dita pirâmide apresentar o vértice no centro do olho mostremos então que todos os raios convergem para esse ponto. Consciente da definição matemática de ponto, a demonstração que se segue procura alcançar um absurdo:

«Se o vértice da pirâmide for divisível, deve ter comprimento. Dividamos esse comprimento em três partes, a primeira designemos por AB, a segunda por BC e a terceira por CD.

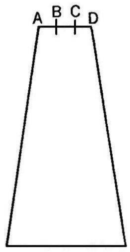


Figura 2.58. Ilustração da Proposição I.20.

Por conseguinte o raio que termina em AB não intersecta o raio que termina em CD, o que é falso de acordo com a definição de vértice. Consequentemente é necessário que a intersecção final de tais raios ocorra num ponto matemático.» [108]

Estamos perante uma teoria intromissionista da visão, sendo portanto necessário estudar questões de natureza anatómica e fisiológica. Os esquemas do olho elaborados por Alhazen e Bacon estão correctos para Pecham.

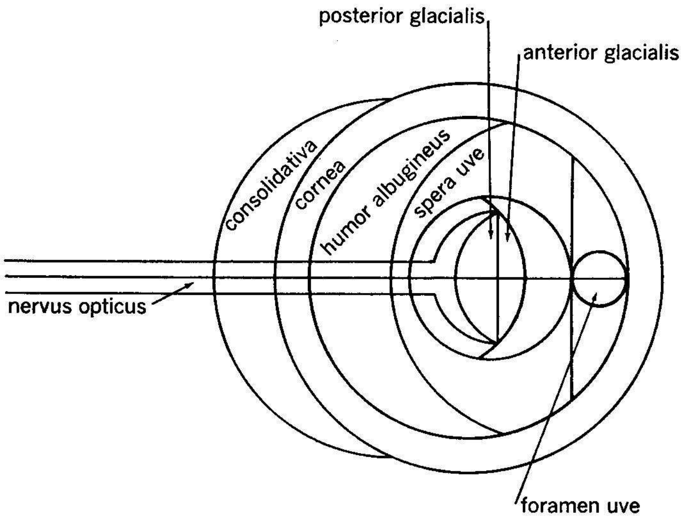


Figura 2.59. Anatomia ocular, segundo John Pecham.

Recomeça agora, a dança dos raios luminosos pelo interior do principal órgão sensitivo, a troca de passo ocorre junto de um novo humor ou de uma nova túnica. Pecham continua a sua exposição, recorrendo a argumentos geométricos que justifiquem matematicamente esta coreografia.

Atravessando esferas concêntricas e excêntricas, as estruturas da luz seguem as leis da transparência[109] enveredando por um caminho tortuoso até alcançarem o nervo óptico, onde as espécies provenientes dos dois olhos se unem. Contudo, há que atingir a meta e alcançar o *local do julgamento* na região anterior do cérebro, onde o processo de visão é concluído.

À semelhança das obras anteriores, Pecham sublinha que os corpos só são percebidos por meio do poliedro luminoso, sendo a percepção certificada pelo seu eixo:

«A pirâmide visual imprimida no olho pelo objecto visível manifesta esse objecto no olho, embora o objecto seja certificado por um movimento do olho sobre ele, transformando-se mais tarde na base da pirâmide. Para além disso toda a pirâmide é perpendicular ao centro do olho, ou seja ao humor glacial anterior, não sendo perpendicular a todo o olho. Por conseguinte o único raio perpendicular é chamado,

eixo, o qual não é refractado, manifestando o objecto eficazmente; os outros raios são correspondentemente fortes e abeis para manifestar o objecto, caso estejam junto deste eixo. O autor do livro De visu (Euclides), tendo em conta a certificação, refere que nenhuma coisa visível é vista completamente de uma só vez, mas de preferência pela alteração da pirâmide (óptica de Euclides, proposição 1). Por outras palavras é dito que todo o objecto visível é observado sob um ângulo ou uma figura triangular.» [110]

Seguindo o mesmo raciocínio, conclui que os objectos não são vistos por meio de qualquer ângulo:

«Não existe visão sob o mais agudo dos ângulos, isto é, um ângulo tangencial, porque este ângulo, como prova Euclides, é individual. O ângulo que subentende o objecto é dividido pelo eixo, através do qual a visão é completada. Para além disso, a magnitude deste ângulo é limitada pelo diâmetro da abertura da uvea, o qual é aproximadamente igual ao diâmetro do lado do quadrado inscrito na esfera desta, como é ensinado anatomicamente. Por conseguinte as linhas são desenhadas a partir das extremidades desta abertura até ao centro (da esfera da uvea), formando aí um ângulo recto.» [111]

Como ilustra a figura seguinte:

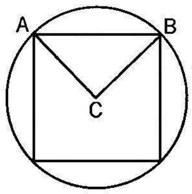


Figura 2.60. Imagem que acompanha a interpretação da Proposição 39.

O círculo de centro em C representa a esfera da uvea e AB corresponde à sua abertura. Se AB for o lado do quadrado que pode ser inscrito na esfera da úvea, então o ângulo ACB é obviamente recto:

«Tudo isto é óbvio, para as linhas que se intersectam perpendicularmente sendo desenhadas a partir dos ângulos do quadrado. Consequentemente, se o poder da visão estiver localizado no centro da uvea e o diâmetro da abertura for precisamente o lado do quadrado referido, o objecto seria percebido sob um ângulo recto. Mas pelo contrário, o centro do olho (humor glacial anterior) está atrás do centro da uvea, porque esta é mais pequena que a córnea; a uvea intersecta a córnea desde que a sua abertura esteja em contacto com esta. Assim o maior ângulo de visão é menor que um ângulo recto, a menos que a abertura da uvea seja ligeiramente mais larga que o referido tamanho.» [112]

E assim aludimos ao que mais se destacou da primeira parte da *Perspectiva Communis* [113], possivelmente a obra que imortalizou John Pecham.

Vitélio e Pecham foram de facto dois expoentes máximos da óptica na Idade Média. Um dos eventos mais significativos da história desta ciência, diz respeito à incorporação dos estudos realizados por estes sacros discípulos no *curriculum* universitário. A *Perspectiva Communis* de Pecham foi incluída num elementar livro de texto, servindo possivelmente como manual escolar. Antes de 1338 já se encontrava na livraria universitária da Sorbonne, em meados de 1390, e continuando durante os seis anos seguintes, servia de base para as lições científicas da Universidade de Viena. Já a obra de Vitélio, publicada conjuntamente com a do sábio Alhazen, teve menos sorte, pois somente em 1431 foi introduzida no *curriculum* da Universidade de Oxford e quarenta anos depois a ser estudada em Cambridge.

Um olhar pela história da teoria visual durante o século XIV revela que os eruditos, absorvidos que estavam pelas obras publicadas até à data, se preocupavam mais em divulgá-las e comentá-las do que propriamente em compor novas. Razão pela qual, durante este período não são dignos de registo progressos adicionais. De salientar apenas, a publicação de três novos tratados com o mesmo título – *Questiones Super Perspectivam*. O primeiro é atribuído a Dominicus de Clavasio, apresentando evidentes semelhanças ao *De Aspectibus* de Alhazen; o segundo teve como autor Henry de Langenstein, aproximando-se consideravelmente à *Perspectiva Communis* de Pecham; finalmente o terceiro, deve-se a Blasius de Parma seguindo similarmente de forma evidente, a obra daquele que foi arcebispo de Canterbury.

Assim a óptica medieval mantém «uma concepção escolástica do mundo, na qual a luz, meio comum aos mundos celeste e sublunar, forma superior de qualquer comunicação, não reconhece qualquer perturbação, qualquer intermediário. Trata-se de uma relação directa com Deus e, nesta perspectiva, a vista é o sentido por excelência.»[114]

4. A luz por entre as sombras

A dicotomia entre Deus e a fonte luminosa já tinha merecido em séculos anteriores, uma expressão artística, fruto de uma visão do mundo incutida por Bizâncio, revolucionando os princípios instaurados pela cultura grega. Transformou tudo em «luz, paz e serenidade»[115]. Este novo estilo é essencialmente sagrado – predominando a hierarquia em relação às proporções, o tamanho de uma personagem depende fundamentalmente do seu estatuto na ordem sacra, ou na pirâmide social e não da sua posição relativamente aos outros elementos representados.

Figura 2.61. Mosaico bizantino que se encontra na Mesquita de Santa Sofia em Istambul, onde Cristo aparece ladeado pelo imperador Constantino IX e pela sua esposa, a imperatriz Zoe.

As figuras «são projectadas sobre um fundo de ouro cintilante e vazio, verdadeira cortina de luz. O ouro é uma cor compacta, fortemente unida e que não possui variações de intensidade. Logo aplica-se no fundo sobre o qual deve fazer sobressair as personagens, as que se encontram isoladas do mundo exterior, emergidas da luz e totalmente independentes das noções de espaço e tempo. O fundo a ouro acaba essas categorias do nosso entendimento e, por ele mesmo, situa as personagens sagradas num mundo supraterrestre e transcendental. Com efeito, no mundo divino feito de luz e de essências imateriais não é admitido conhecer as medidas espaço-temporais, pois aí tudo é sob o selo da eternidade. Na arte bizantina, o fundo a ouro é uma imagem da luz absoluta e da irradiação divina.» [116]

Substituindo os efeitos ilusionistas da pintura greco-romana, o bizantino abdica do espaço e cria um mundo sem volume, sem profundidade e sem perspectiva. As suas preocupações incidem na transmissão dos episódios da sagrada escritura aos seus irmãos na fé. O diálogo bíblico exerce um significado profundo, o que justifica a ausência de pormenores artísticos que possam desviar a atenção do acontecimento que se pretende retratar. Apresentamos de seguida uma bizarra miniatura de um códice sírio do século XII, em que são evidentes as características que acabámos de referir.

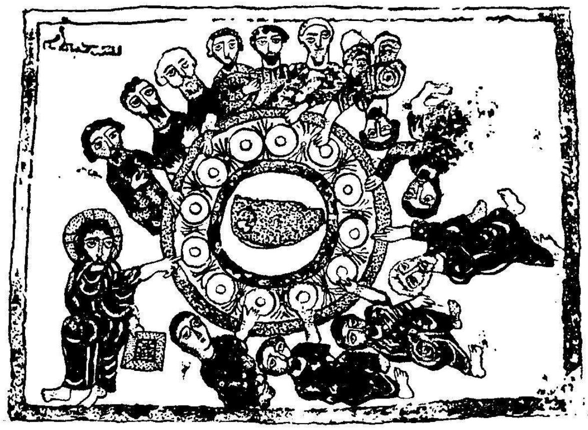


Figura 2.62. A última ceia, segundo um artista sírio do século XII.

É clara a dificuldade que o artista enfrentou ao colocar treze personagens em torno de uma mesa redonda. Porém, isso não passa de um pequeno pormenor, afinal conseguiu que os doze apóstolos se sentassem à mesma mesa que Cristo, e se alguns deles estão completamente tortos ou de cabeça para baixo, não tem qualquer importância comparado com as bonitas palavras que Cristo estaria a proclamar na altura. Devemos salientar ainda a total ausência de profundidade, as personagens estão todas no mesmo plano e apresentam uma semelhança exagerada nos seus rostos.

Aproximadamente, no século XIII o estilo adoptado pelos artistas começou a modificar e os pedidos de pintura diversificaram-se. Às tradicionais figuras representadas nos desenhos das igrejas juntaram-se os laicos, os nobres e os burgueses letrados. O aumento da procura da pintura ilustrativa conduziu, tanto em Itália como nos países do norte da Europa, à concepção de quadros ou frescos como uma espécie de cena (teatro) na qual a história se desenrola numa decoração realista. Os fundos dourados que simbolizavam o sagrado, dão lugar aos céus e às paisagens que se estendem até ao horizonte. Esta mudança chocou em particular com os princípios do estilo internacional do final da Idade Média, chamada desde então gótico. Estes tinham uma pintura que mostrava mais substância do que a extensão, e atribuíam mais valor à hierarquia religiosa ou social do que à posição espacial relativa. Esta tentativa de abandonar o estilo existente teve o contributo de Bacon, Pecham, Vitélio e, também Robert Grosseteste, conhecidos como os autores do *Alto Gótico*. Para além de rejeitarem as teorias aristotélicas, estabeleceram uma curiosa dicotomia entre a teoria da óptica e a prática artística; e quando quiseram latinizar o termo grego, o mais equivalente que encontraram foi *perspectiva*. Porém, esta perspectiva medieval manteve sempre uma teoria matemática da visão, intimamente relacionada com a astronomia mas inteiramente divorciada dos problemas da representação gráfica.[117]

Enquanto os intelectuais da Idade Média se ocupavam com as teorias filosóficas emergidas das obras aristotélicas, a brisa fresca da Renascença, ainda no século XIV, começa a transformar o clima europeu.

Por volta de 1303, pouco mais de uma década após a morte de Roger Bacon e John Pecham, Giotto di Bondone[118] começa a trabalhar nos frescos da Capela de Arena em Pádua. Este pintor italiano viria a tornar-se um génio «duma tal excelência que nada existia (de produzido) pela natureza, mãe e operadora de todas as coisas, no decurso do perpétuo movimento dos céus, que ele não fosse capaz de representar por meio do estilete, da pena ou do pincel com uma tal verdade que o resultado mais parecia uma obra da natureza que uma sua imitação. Pelo que o sentido humano da vista facilmente se deixa enganar pelas suas obras, tomando por realidade o que era apenas pintura. E assim fez ele regressar à luz esta arte que durante tantos séculos estivera sepultada sob os erros de alguns que pintavam para agradarem aos olhos do ignorante e não para satisfazerem a inteligência dos sábios, devendo ser justamente considerado como uma das luzes da glória florentina (...)»[119].

A pintura nas gerações seguintes, será vista como a primeira sentença de uma nova compreensão da relação existente entre o espaço visual e a sua representação numa superfície bidimensional. O que Giotto fez foi eliminar grande parte do que era plano, característico da pintura medieval, transformando-a por meio de elementos tridimensionais, invocando o espaço e introduzindo vistas oblíquas às representações arquitecturais, e criando deste modo, a sensibilidade de profundidade e a aparente convergência das linhas que a concebem.

Figura 2.63. *Confirmação das Regras de S. Francisco*, Giotto, 1325, Florença.

As obras deste pintor italiano, quer sejam fruto das suas belas mãos ou de um estudo verdadeiramente meticuloso, dão-nos uma impressão de coerência e tranquilidade. Os interiores, como ilustra a figura anterior, são perfeitamente consistentes, com tectos e pavimentos em perfeita harmonia, transmitindo a sensação que se estendem para além da superfície pictórica e criando deste modo, um espaço onde já é visível uma certa continuidade e infinidade. Na *Confirmação das Regras de S. Francisco*, a construção do tecto recorda-nos os conselhos de Euclides de que as linhas situadas por cima do nível do olho deviam ter uma inclinação descendente de forma a darem ao espectador a noção de movimento; as linhas abaixo do nível do olho obedecem a uma inclinação ascendente, as da esquerda tomam a direcção do interior para o lado direito e as do lado direito para o lado esquerdo. Também as personagens que figuram nestes frescos são dignas de admiração, «abandonaram o olhar terrível e penetrante das figuras bizantinas e, com o seu ar benevolente e tranquilo, envolvem o sujeito num clima de confiança e serenidade»[120]. Deste modo, a superfície pictórica perdeu a materialidade que apresentava na Alta Idade Média, onde o opaco e o impenetrável são substituídos pela transparência e a acessibilidade transformando-a numa janela através da qual podemos contemplar o mundo visível.

«Os pintores deviam saber», afirma Alberti, *«que percorrem uma superfície plana com as linhas e que, ao preencherem as áreas assim definidas com as cores, a única coisa que procuram conseguir é que as formas das coisas vistas surjam sobre esta superfície plana como se fossem feitas de vidro transparente».*[121]

Em plena Idade Média, este *vetro tralucente* criou condições tanto para o abandono do axioma do ângulo da óptica clássica, como das teorias aristotélicas quanto à inexistência de infinito, responsabilizando-se Giotto pelos abalos aos «fundamentos do pensamento da Alta Idade Média ao conceder existência "real" unicamente às coisas exteriores que conhecemos directamente através da percepção sensorial e aos actos ou estados interiores directamente conhecidos por intermédio da experiência psicológica. Já ninguém julga, pois, que o pintor actue "a partir da imagem ideal presente na sua alma", como Aristóteles afirmara e Tomás de Aquino e Mestre Eckhart corroboraram, mas sim a partir de uma imagem óptica presente nos seus olhos»[122].

Este foi o início de um longo caminho em busca da verdade visual, um esforço para imitar a natureza; a geração de artistas que se seguiram – os irmãos Limbourg[123], Jan van Eyck[124], originário da Flandres, e os irmãos Lorenzetti[125] – ilustram na Itália do *Trecento*, um período de investigação que procura mais realismo. Este leque de artistas, conhecidos como os progressistas, desenvolveram com ardor uma variedade de regras para invocar, de uma maneira mais ou menos convincente, o espaço e a pintura de formas sólidas. Procuraram aperfeiçoar a técnica de representação atribuindo à pintura mais rigor e realismo. Encontramos os primeiros esforços na *Apresentação de Cristo no Templo*, de Ambrogio Lorenzetti:

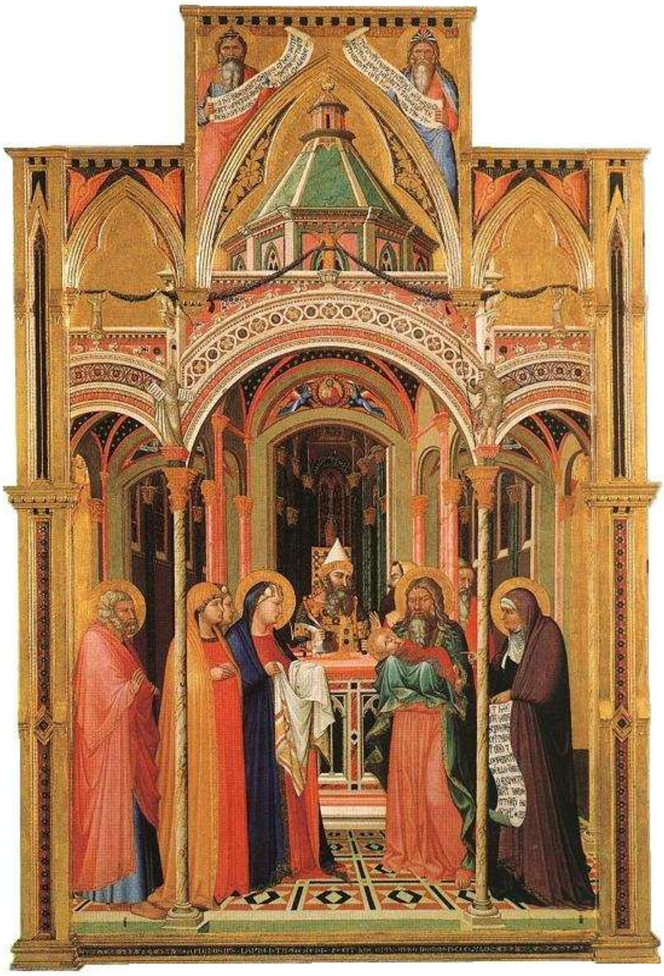


Figura 2.64. *Apresentação de Cristo no Templo* de Ambrogio Lorenzetti, Florença, 1342.

Este quadro constitui um bom exemplo de uma perspectiva ainda incompleta. Se prolongarmos as ortogonais ao plano do quadro que partem das margens, verificamos que se intersectam num ponto distinto do das restantes ortogonais que constituem o pavimento. Não existinto ainda um único ponto para o qual convergem todas as ortogonais ao plano pictórico. Dois anos mais tarde, o mesmo Lorenzeti brinda-nos com a *Anunciação*, apresentada anteriormente, onde corrige este aspecto – as ortogonais ao plano do quadro já convergem num único ponto – embora as transversais, ainda sejam obtidas incorrectamente através da mencionada *regra dos dois terços*.

5. *Rinascitta*

Na aurora do século XV emerge do mundo eclesiástico uma personagem, que perfilando o espaço como um *quantum continuum*, antecipa o actual conceito de *infinito*. Trata-se de Nicolas de Cusa[126], que apesar de ser filho de humildes pescadores alcançou na Igreja o título de cardeal.

Impulsionador de novas ideias, Nicolas foi o primeiro filósofo desta época a rejeitar a concepção medieval do cosmos, chegando mesmo alguns historiadores a atribuir-lhe a afirmação de que o universo seria infinito. Este facto não passou despercebido a muitos dos filósofos e matemáticos posteriores; uma carta escrita por Descartes ao seu amigo Chanut, refere que *«o cardeal de Cusa e vários doutores supuseram o mundo infinito, sem que alguma vez tenham sido condenados pela Igreja a esse respeito; pelo contrário, crê-se que é honrar Deus o fazer-se conceber as suas obras muito grandes»*[127].

A concepção do mundo formulada por este matemático eclesiástico consta na *Douta Ignorância*, uma obra escrita em 1440. A sua tese é sustentada na noção de coincidência dos opostos no absoluto que os absorve e os ultrapassa. Consciente da originalidade do seu trabalho, inicia-o com um alerta:

«É possível que aqueles que vão ler coisas nunca ouvidas até aqui e de ora em diante estabelecidas pela Douta Ignorância se surpreendam com elas.»[128]

Podemos perceber facilmente esta teoria por meio de um exemplo apresentado por Alexandre Koyré. Este autor baseando-se na geometria, refere que neste ramo da matemática «nada é mais oposto do que "recto" e o "curvo" e, no entanto, no círculo infinitamente grande a circunferência coincide com a tangente e no círculo infinitamente pequeno coincide com o diâmetro. Além disso, em ambos os casos, o centro perde a sua posição determinante, única; coincide com a circunferência; não está em lado algum; ou em todo o lado. Mas "grande" e "pequeno" são eles próprios um par de conceitos opostos, que apenas são válidos e plenos de sentido no domínio da quantidade finita, o domínio do ser relativo onde não existem objectos "maiores" ou "menores", e onde, por conseguinte, não existe nem "o maior" nem "o menor". Comparado ao infinito, não há nada que seja maior ou menor que qualquer outra coisa. O máximo absoluto e infinito, tal como o mínimo absoluto e infinito, não podem pertencer à serie do grande e do pequeno. São exteriores a ela e é por isso que coincidem, como conclui de modo ousado Nicolas de Cusa.»[129]

O mundo deste cardeal já não é o cosmos medieval, e ainda está longe do universo infinito dos nossos tempos. Mas um novo espírito sopra desta obra, é o espírito do Renascimento. Esta palavra traz à mente inevitavelmente, «os tesouros literários, artísticos e científicos italianos, pois o renovado interesse pela arte e pela cultura tornou-se aparente mais cedo na Itália do que em outras partes da Europa. Lá, num confuso conflito de ideias, os homens aprenderam a confiar mais em observações independentes da natureza e em juizes da mente.»[130]

É neste ambiente que surge uma transformação da concepção, dos modos e da função da arte tão radical, como aquela que tinha acontecido há um século atrás com Giotto. Um dos primeiros protagonistas deste movimento foi Filippo Brunelleschi[131], um arquitecto florentino que começou a sua carreira artística como ourives.

Segundo o seu biógrafo António Manetti [132], Brunelleschi efectuou um apurado estudo sobre as leis da visão, o qual culminou com uma conhecida experiência realizada na Piazza San Giovani, em Florença, possivelmente antes de 1413 [133], valendo-lhe o título de inventor das leis perspécticas. A encenação exigia que a praça escolhida fosse a principal de Florença, onde se localizam a catedral e o baptistério.

Brunelleschi começou por pintar numa placa de madeira, com cerca de 30 cm de lado, a vista que um observador tinha do baptistério quando se encontrava à entrada da catedral.

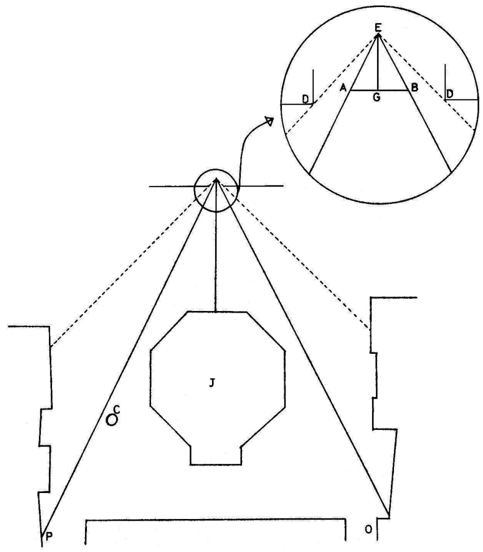


Figura 2.66. Planta da Piazza San Giovanni em Florença.
AB- painel com a pintura; C- coluna de S. Zenóbio; D/D- entrada da catedral; E- observador; G- eixo de visão.

Todavia tal pintura requeria precisão e minúcia na colocação das cores brancas e negras dos mármores que revestem o original. Para conseguir transmitir uma atmosfera mais realista, colocou sobre a pintura prata brunida. Contemplado o efeito final, terminou fazendo um furo na placa, representado pelo ponto O na figura seguinte.

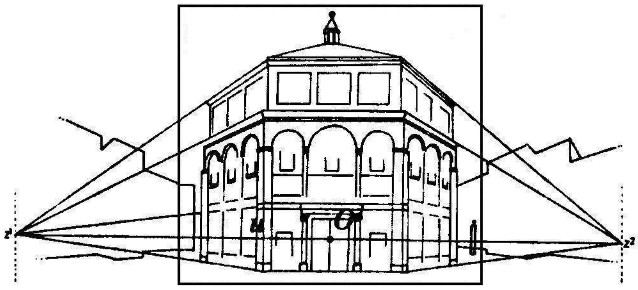


Figura 2.67. Possível representação do baptistério realizada por Brunelleschi.

Colocando um espelho, esse instrumento repleto de ilusão, numa posição adequada, iniciou a experiência e, provavelmente como todos os ilusionistas fazem, recorreu a um espectador do público, o qual teria apenas de espreitar pelo furo efectuado.

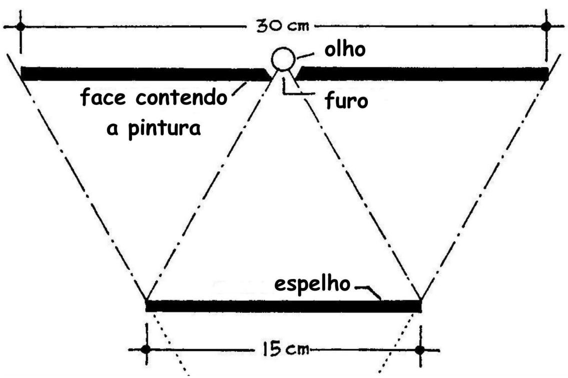


Figura 2.68. Colocação adequada do espelho por parte de Brunelleschi.

E por um gesto de magia, eis que surge o baptistério!

Quer tenha sido ou não Brunelleschi o inventor da *perspectiva artificialis,* é importante salientar que o êxito desta experiência se deve essencialmente à adequada dimensão e colocação do espelho. O facto deste apresentar metade do comprimento da placa é fundamental para garantir a igualdade entre os ângulos de incidência e de reflexão, o que revela um estudo apurado ou a realização sistemática da mesma experiência até alcançar o que ambicionava.

O facto de Brunelleschi não nos ter deixado nenhum documento escrito descrevendo a sua experiência e o que pretendia com ela mostrar, tem conduzido alguns autores a duvidarem que o testemunho do seu biógrafo não seja verosímil quanto à atribuição do título de inventor da perspectiva linear devido à encenação realizada. Apontamos de seguida algumas questões que têm vindo a ser colocadas.

Em primeiro lugar, a existência de outros edifícios na referida praça que podem ser contemplados da entrada da catedral, e portanto se Brunelleschi pintou o seu painel desse local então também deveriam figurar na sua representação. Em segundo lugar, se este arquitecto florentino aplicou o método projectivo na sua pintura, com certeza que deveria ter estudado com algum cuidado as medidas em planta e em alçado, não apenas do baptistério como também dos outros edifícios irregulares que rodeiam a Piazza San Giovanni, devendo possivelmente existir testemunhos desse levantamento. Em terceiro lugar, caso Brunelleschi fosse, efectivamente, o criador da *perspectiva artificialis* saberia que esta é caracterizada pela convergência de linhas paralelas num único ponto visível no quadro e no entanto, os dois pontos de fuga que auxiliaram a sua representação não figuram na superfície pictórica.[134] Estes são alguns motivos que conduziram Susanne Lang a afirmar que os painéis brunelleschianos «parecem singularmente inadequados para o propósito em causa, se o propósito foi demonstrar a perspectiva». [135]

Assim, este cículo de autores que procura repor a verdade quanto à criação da perspectiva linear, defende que Brunelleschi «criou apenas um instrumento» [136] para representar a realidade, concedendo os "louros" a Alberti pela exposição teórica de um método que permita desenhar com grande veracidade o que o olho capta do real.

Mas o prestígio de Brunelleschi como arquitecto foi alcançado com a construção da cúpula da catedral de Florença, a qual lhe foi confiada em 1420. A obra foi realizada segundo uma nova técnica imposta pela ausência duma mestria capaz de realizar o acto de abobadá-la – uma técnica de maçonaria, permitindo à cúpula elevar-se e auto sustentar-se em todos os níveis da sua elevação até à lanterna concebida, como se se tratasse de ponto de união das fortes nervuras que singularizam esta construção, concebendo-a como um novo modelo geométrico, uma espécie de corpo platónico com arestas curvas, com faces em forma de triângulos curvilíneos, os quais se suspeitam terem sido inspirados em Nicolas de Cusa – uma vez que na sua doutrina filosófica sobre a «*concordância dos contrários*»[137], ao estabelecer uma relação entre máximos e mínimos, coloca a hipótese de o círculo e o triângulo serem reconciliáveis. O primeiro, considerado como o polígono que apresenta possivelmente o maior número de lados opunha-se ao segundo, por ser o polígono com menor número de lados. Na geometria esférica os triângulos constituem um contra exemplo ao enunciado euclidiano, visto a adição das amplitudes dos ângulos internos ser superior a 180º.

A estrutura vertical assim erguida, tão diferente da cúpula hemisférica, cujo infinito simétrico acaba por dissolver a própria ideia de simetria e de direcção axial, permitiu completar o triedro da geometria do espaço numa fulgurante antecipação.

Enquanto Brunelleschi se entretinha com a construção da cúpula que o imortalizou, Lorenzo Ghiberti esculpia, encantadoramente, as portas do baptistério de San Giovanni e Masaccio pintava a admirável *Trindade*, deixando transparecer o conhecimento das regras da perspectiva linear pela organização espacial e profundidade concebidas.

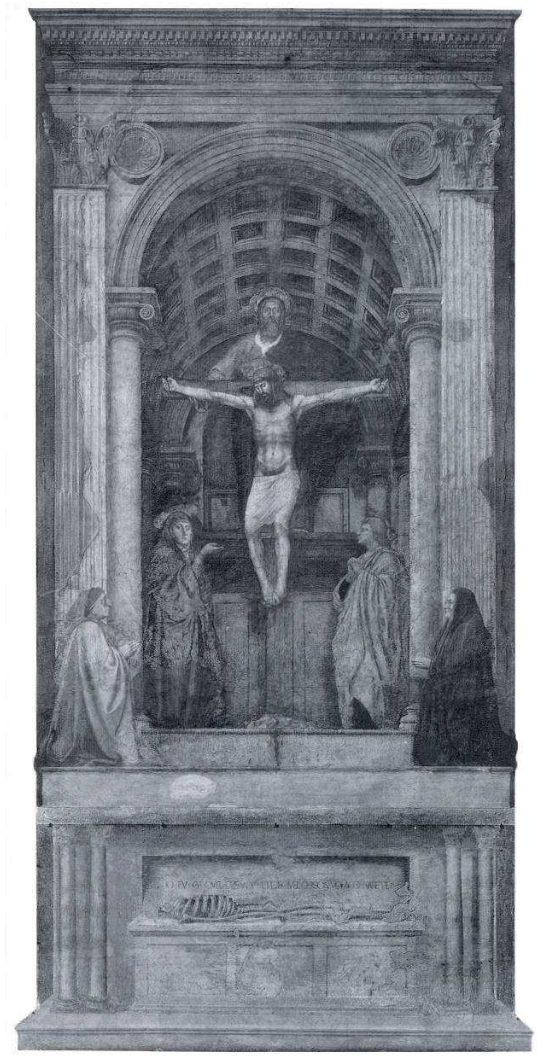


Figura 2.69. A *Trindade* de Masaccio, 1426. Santa Maria Novella, Florença.

Foi este o cenário que Leon Battista Alberti encontrou, quando em 1434 regressou à sua cidade natal. Fascinado com o fenómeno artístico que decorria em Florença, redige em 1435 um singelo tratado dedicado aos protagonistas deste movimento que embelezava a cidade florentina.

Della Pittura, como vimos, é uma obra de carácter teórico que contrasta com as tendências práticas de Brunelleschi. A publicação deste pequeno tratado, em particular o primeiro livro, constitui o clímax alcançado pela representação de um espaço tridimensional numa superfície plana, nascendo assim a verdadeira e genuína *construzione legittima*.

«A infinidade é implicada – ou, antes, visualmente simbolizada – pelo facto, de qualquer conjunto de linhas objectivamente paralelas, independentemente da situação e direcção, convergir para um único “ponto de fuga”, que assim se representa, no sentido mais literal do termo, um ponto onde as paralelas se encontram, quer dizer, um ponto situado no infinito; o que se refere, grosso modo, como “o ponto de fuga” dum quadro é privilegiado somente na medida em que está directamente em frente da vista e assim constitui o foco apenas das paralelas objectivamente perpendiculares ao plano do quadro, afirmando o próprio Alberti, explicitamente, que a convergência destas “ortogonais” indica a sucessão e a alteração de quantidades “*quasi persino in infinito*”.

Por outro lado, a continuidade é implicada – ou antes, visualmente simbolizada – pelo facto de cada ponto na imagem em perspectiva ser, como no *corpus generaliter sumptum* cartesiano, unicamente determinado por três coordenadas; e pelo facto de, enquanto uma série de grandezas objectivamente iguais e equidistantes, se se sucederem uma à outra em profundidade, se transforma numa série de grandezas separadas por intervalos igualmente decrescentes.» [138]

De toda a exposição realizada constatamos que Alberti conheceria a *Óptica* de Euclides, talvez a de Ptolomeu e os trabalhos de Galeno, já os de Alhazen mesmo que não possuísse uma versão do original, poderia ter tido acesso a um dos tratados da Idade Média, o de Bacon, Vitélio ou Pecham. De facto, é por esta última hipótese que opta Alessandro Parronchi. Segundo este autor, um amigo de Brunelleschi, Paolo Toscanelli, vindo de Pádua em 1424, terá comprado em Florença uma cópia das *Questiones Super Perspectivam* de Blasius de Parma, e assim Brunelleschi terá tido acesso às teorias de Alhazen, Bacon e Pecham, e seria ele mesmo quem o faria chegar a Alberti. O mesmo autor acrescenta que estas teorias foram fundamentais para a demonstração realizada pelo arquitecto florentino. Esta sugestão parece-nos contraditória, uma vez que a experiência brunelleschiana foi realizada, como referimos, antes de 1413 e portanto se Brunelleschi se dedicou ao estudo da óptica medieval para realizar a sua ilusão, teve que o fazer antes. No entanto, Prager e Scaglia referem ser pouco provável que Brunelleschi tivesse estudado questões ópticas e matemáticas para a realização dos seus painéis, uma vez que os seus biógrafos não fazem qualquer referência a possíveis conhecimentos que Brunelleschi possuísse nestas áreas. Deste modo o arquitecto florentino não teria seguido estudos de cariz matemático e geométrico, mas teria procurado criar um engenho que conferisse um realismo pictórico.[139] Portanto estamos em crer que Toscanelli, por ser demasiado jovem na altura da encenação, não terá auxiliado Brunelleschi na elaboração da sua *tavoletta*, mas parecem existir fortes evidências desse auxilio no que diz respeito à construção da cúpula da catedral, dado o método utilizado envolver cálculos matemáticos desconhecidos para Brunelleschi.

Assim, também não seria por intermédio do arquitecto florentino que Alberti acederia aos tratados ópticos medievais. Porém, dada a popularidade alcançada pelo tratado de Pecham, não temos dúvidas que Alberti o devia conhecer. Apurámos que existem hoje em Itália, doze exemplares da *Perspectiva Communis*, o que evidencia a divulgação atingida por esta obra. Destes doze exemplares, quatro encontram-se em bibliotecas de Florença, um na Biblioteca Ambrosina de Milão e os restantes pertencem à Biblioteca Apostólica do Vaticano.

Notas

[1] Brusatin, *Desenho/Projecto*, Criatividade-Visão in Enciclopédia Einaudi, volume 25, tradução de Maria Bragança, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1992, p. 303.

[2] Serres, *As origens da Geometria*, Terramar, 1997, p. 201.

[3] Plural de *akis.*

[4] Plural de *opis.*

[5] Mugler, *Dictionnaire historique de la terminologie optique grecque*, Paris, Klincksiek, 1964, p. 8 e 10.

[6] Authier, *A refracção e o "esquecimento" cartesiano* in Elementos para uma História das Ciências, vol. II: Do fim da Idade Média a Lavoisier, tradução de Rui Pacheco, Magda Figueiredo, Ana Paula Costa e Ana Simões, Terramar, 1995-1996, p. 69.

[7] Dante, *Convívio***,** tradução de Carlos Eduardo de Soveral, Guimarães Editores, 1992, p. 136.

[8] Platão, *Timeu*, 45B-46A in *Plato´s Cosmology: The Timaeus of Plato translated with running commentary*, London: Routledge & Kegan Paul, 1956, p. 151.

[9] Lucrécio, *De la nature*, versão francesa de Henri Clouard, Flammarion, 1964, p .124.

[10] Platão, *República*, Livro VI, 507e-508d. Na versão de Maria Helena Pereira publicada pela Fundação Calouste Gulbenkian em 2001 encontra-se nas páginas 306 e 307.

[11] Authier, *op. cit*., p. 72.

[12] Platão, *Timeu*, 45C e 45D em *op. cit*., pp. 152 e 153.

[13] Aristóteles, *De anima*, versão francesa de J. Tricot, Paris: Librairie Philosofique J. Vrin, 1947, II, 6-11.

[14] Authier, *op. cit*., p. 73.

[15] Serres, *op. cit*., p. 265.

[16] Giuseppe Ovio, *L'ottica di Euclides*. Excerto reproduzido por Carlos del Negro em *Considerações sobre a Perspectiva de Euclides e a Perspectiva Linear*, Rio de Janeiro: Universidade do Brasil, 1953, p. 7.

[17] Citado por Eecke, *Euclide: L'optique et la catoptrique*, Desclée de Brouwer et C[ie], 1938, p.XV.

[18] (3000-2270 a.C.)

[19] Foi autor de uma tradução francesa da *Óptica* de Euclides, intitulando o seu trabalho como: *A Perspectiva de Euclides, traduzida em francês a partir do texto grego de Euclides, e demonstrado por Rol. Fréart de Chantelou Senhor de Chambray. Em Mans, imprimido por Jacques Ysambart. MDCLXIII.*

[20] Citado por Eecke, *op. cit.*, p. XVIII.

[21] Negro, *op. cit*., p. 11.

[22] Antigos habitantes da Roménia.

[23] Este assunto será desenvolvido no apêndice que se encontra no fim da dissertação.

[24] Platão, *Sofista*, citado por Gombrich em *Arte e Ilusão: um estudo da psicologia da representação pictórica*, traduzido por Raul Sá Barbosa, São Paulo: Martins Fonseca, 1995, p.202.

[25] Franciscus Junius, *A pintura dos antigos*, excerto reproduzido por Gombrich em *op. cit.*, p.203.

[26] Platão, *Sofista*, em *op. cit*., p. 202.

[27] Damiano, *Auszüge aus Geminos* in *Schrift über Optik*, p. 28. Citação reproduzida por Panofsky em *A Perspectiva como forma simbólica*, tradução de Elisabete Antunes, Edições 70, 1999, p. 86 e 87.

[28] Viveu no séc. I a.C., falaremos mais adiante, com algum pormenor desta personagem da História da Arte.

[29] Vitrúvio, *Os dez livros de Arquitectura*, traduzido por H. Rua, Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico, 1998, Prefácio do Livro 7, p. 232.

[30] A décima proposição euclidiana, acompanhada pela mesma figura, é referida por Vitélio no quarto livro da sua *Perspectiva* correspondendo ao teorema 37.

[31] Consultar apêndice no final da dissertação.

[32] Euclides utiliza o termo *enalláx*, para se referir a permutação, o qual é definido no quinto livro dos *Elementos* pela definição 12: *razão enalláx é a razão do antecedente ao antecedente e do consequente ao consequente*.

[33] Euclides define-a também no quinto livro dos *Elementos*, correspondendo ao décimo quarto enunciado: *A composição de uma razão consiste em tomar o antecedente e o consequente como um em relação com o consequente*.

[34] Panofsky, *A perspectiva como forma simbólica*, p. 37.

[35] Panofsky, *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental*, tradução de Fernando Neves, Editorial Presença, 1960, p. 178.

[36] Dos dez livros que o compõem, os sete primeiros tratam de arquitectura, o oitavo de hidráulica, o nono de gnomónica e o décimo de mecânica. Foi impresso pela primeira vez, em Roma, no ano de 1486, tendo-se tornado uma obra elementar para os arquitectos do Renascimento.

[37] O vocábulo grego *Ichnos* traduz o vestígio ou a impressão que uma coisa deixa sobre a terra onde foi colocada. Tratando-se de uma projecção horizontal, hoje a Iconografia corresponde ao que designamos por planta.

[38] Este termo deriva de *Orthos* significando, direito. Assim a Ortografia é a designação grega atribuída à representação de um edifício através de linhas horizontais, sendo nos nossos dias conhecida por alçado.

[39] Vitrúvio, *op. cit.*, Livro I, Capítulo II, p. 10.

[40] *"(...) descrevo um rectângulo do tamanho que me aprouver, e imagino-o como uma janela aberta através da qual observo o que quer que deva ser ali representado." Della Pittura*, Livro I, na versão de Cecil Grayson publicado pela Penguin Classics em 1991, p. 54.

[41] Panofsky, *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental*, p. 169.

[42] Panofsky, *A perspectiva como forma simbólica*, p. 43.

[43] Panofsky, *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental*, p. 171.

[44] (127-148 d.C)

[45] Designação também atribuída à concepção que defende a propagação dos raios visuais a partir do olho até ao objecto visível. Em oposição, é frequente denominar-se por intromissionista a teoria que propõe este deslocamento em sentido contrário.

[46] Lejeune, *Euclide et Ptolémée: deux stades de l´optique géométrique grecque*, Louvain: Blibliothèque de l´Université, 1948, p. 37.

[47] Lindberg, *Theories of vision from Al-Kindi to Kepler*, The University of Chicago Press, 1976, p. 15.

[48] Aristóteles, *op. cit.*, 2.7. 418 b8 – 9.

[49] Lejeune, *op. cit.*, p. 35 e 36.

[50] Smith, *Alhacen's Theory of Visual Perception*, vol. I, American Philosophical Society, 2001, p. xxxiii.

[51] Esta figura ilustra o teorema 36 e assemelha-se ao corte de um olho.

[52] Lejeune, *op. cit.*, p. 57.

[53] O paralelo de Siene é também conhecido por trópico de Cancer.

[54] Médico grego nascido na Calcedónia em 335 a.C.. Foi mestre na escola ptolemaica de Alexandria, devendo-lhe a anatomia inúmeras contribuições. Apesar de não conhecermos as suas obras, a tradição cientifica aponta-o como tendo dado o nome à retina e a outras estruturas oculares. Morreu em 280 a.C..

[55] Galeno, *De Usu Partium*, X, 12, 815-817. Citação reproduzida por Lejeune em *op. cit*., p.18 e 19.

[56] Authier, *op. cit*., p.75.

[57] (570-632)

[58] O seu período de califado foi entre 809 e 833.

[59] Boyer, *História da Matemática*, tradução de Elza Gomide, S. Paulo, Edgard Blücher, 1974, p.166.

[60] Citação reproduzida por Lindberg em *op. cit.*, p. 18.

[61] Al-Kindi segue alguns princípios aristotélicos, esta transformação do ar recorda-nos a teoria exposta pelo do filósofo grego quando este aborda a visão.

[62] Lindberg, *op. cit*., p. 19.

[63] Martinez, *Del ojo: ciencia e representação*, Ciencias 66, Abril-Junho, 2002, p. 54.

[64] Citação reproduzida por Lindberg em *op. cit*., p. 25.

[65] *Ibidem*, p. 28.

[66] *Ibidem*, pp. 28 e 29.

[67] Avicena, *De sensu* 2. 438 a 26-27, citado por *Ibidem*, p. 45.

[68] *Ibidem*, p. 49.

[69] *Ibidem*, p. 50.

[70] Viveram cerca de dois séculos depois de al-Haytham.

[71] Encontrámos algumas referências em que este título, devido à tradução latina, por vezes aparece como *Perspectiva*.

[72] O seu nome sofreu várias metamorfoses desde, “Hacen”, “Alacen”, “Achen”, “Alhacen” até “Alhazen”, que se deve a uma transliteração de “al-Hasan”.

[73] Smith, *op. cit.*, vol. II, Livro I, cap. 5, p. 347.

[74] *Ibidem*.

[75] *Ibidem.*

[76] *Ibidem.*

[77] Alhazen generaliza referindo-se ao campo visual, não necessariamente a objectos.

[78] Smith, *op. cit*., vol. II, p. 406.

[79] Consultar apêndice no final da dissertação.

[80] Smith, *op. cit.*, vol. II, p. 406.

[81] Authier, *op. cit*., p. 77.

[82] Goff, *Os intelectuais na Idade Média*, traduzido por Margarida Sérvulo Correia, Gradiva, 1984, p. 33.

[83] Pouco sabemos da sua vida. Nasceu em 1168, tendo sido possivelmente educado em Oxford e Paris. Em 1214 foi eleito chanceler da Universidade de Oxford e em 1235 tornou-se bispo de Lincoln, posto onde permaneceu até à morte, decorria o ano de 1253.

[84] Authier, *op. cit.*, p. 79.

[85] *Ibidem.*

[86] Latino Coelho, *A Ciência na Idade Média e as Enciclopédias desse tempo*, Colecção Filosofia & Ensaios; Guimarães Editores, Lisboa, 1988, p. 17.

[87] (1193-1280)

[88] *Ibidem*, p. 19.

[89] (1225-1274)

[90] *Ibidem*, p. 24.

[91] *Ibidem*, p. 27.

[92] Latino Coelho, *op. cit.*, p.28.

[93] A citação seguinte é apenas um pequeno excerto do longo texto que elucida claramente o espírito adivinho do "Doutor Admirável":*"(...)Haverá carros que, sem cavalos, correrão com rapidez impossível de imaginar. Hão-de construir-se aparelhos para voar, e no meio deles, indo o homem sentado, movendo um certo mecanismo, despregará as suas asas fictícias, e cortará os ares, como o fazem as aves com as suas asas naturais.(...)"*. Reproduzido por Latino Coelho em *op. cit.*, pp. 28 e 29.

[94] Lindberg, *Roger Bacon and the origins of Perspectiva in the middle ages*, Clarendon Press, Oxford, 1996, p. 55.

[95] *Ibidem*, Parte I, dist.6, cap.2, p. 75.

[96] Esta questão é desenvolvida em *Ibidem*, Parte I, dist. 6, cap. 1, pp. 69 e segs.

[97] *Ibidem*, Parte II, dist. 3, cap.5, p. 223.

[98] *Ibidem*, Parte II, dist. 3, cap.4 e 5, pp. 221 e 223.

[99] Latino Coelho, *op. cit.*, p. 26.

[100] Consultar Burke, *The Opus majus of Roger Bacon*, University of Pennsylvania Press, 1928.

[101] Escassas são as suas referências biográficas, sabemos apenas que nasceu na década de 1230 em Silésia, pertencente então à Polónia. Estudou artes em Paris e direito canónico em Pádua. Morreu por volta de 1275.

[102] Existe na Biblioteca Nacional de Lisboa um exemplar deste tratado com a cota BN B.A. 151V.

[103] Citado por Panofsky, *A perspectiva como forma simbólica*, p. 84.

[104] Supõe-se que terá nascido por volta de 1230 em Inglaterra tendo estudado artes em Oxford e Paris, onde obteve em 1269 o doutoramento em Teologia. Permitindo-lhe leccionar na capital

francesa, em Oxford e na Universidade Papal de Vitérbo e de Roma. Em 1279 consagra-se arcebispo de Canterbury, falecendo treze anos mais tarde.

Pecham foi uma figura importante no movimento cientifico do século XIII e deve ser visto como um membro de uma tradição que se prolonga desde Robert Grosseteste até Roger Bacon. O seu interesse pela ciência levou-o a redigir três obras, para além das duas sobre óptica que havemos de referir adiante: *Tractatus de sphera*, *Theorica planetarum* e *Tractatus de numeris*.

[105] Lindberg, *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*, p. 255.

[106] Supõe-se que terá sido composto entre 1275 e 1277.

[107] Proposição I.27 e II.5. A doutrina das espécies foi desenvolvida por Grosseteste a partir do conceito neoplatônico referente à emanação. Posteriormente, este ponto de vista foi assimilado tanto por Bacon como por Pecham.

[108] Lindberg, *John Pecham and the Science of Optics*, The University of Wisconsin Press, 1970, Proposição 20, Parte I, p. 97.

[109] Propagação rectilínea, reflexão e refracção.

[110] Lindberg, *John Pecham and the Science of Optics*, Proposição 38, Parte I, p. 121.

[111] *Ibidem*, Proposição 39, Parte I, p. 123.

[112] *Ibidem*.

[113] Segundo David Lindberg este tratado terá sido redigido entre 1277 e 1279. É composto por três partes na primeira, como vimos, analisa o mecanismo da visão, na segunda aborda a reflexão e na terceira a refracção.

[114] Authier, *op. cit*., p. 82.

[115] Tânia Velmans, *L'embarquement pour Byzance*, p. 20. Citação reproduzida por Vítor Murtinho em *Perspectivas: O Espelho Maior ou o Espaço do Espanto*, Edições do departamento de Arquitectura da FCTUC, 2000, p. 46.

[116] *Ibidem.*

[117] Panofsky, *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental*, p. 190.

[118] Nasceu em 1226 nas proximidades de Florença, mais especificamente em Colle do Vespignano, e faleceu em 1337.

[119] Giovanni Boccaccio, *Decameron*, reproduzido por Panofsky em *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental*, p. 32.

[120] Murtinho, *op.cit*., p. 97.

[121] Alberti, *Della Pittura*, Livro I, p. 48, na versão de Cecil Grayson.

[122] Panofsky, *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental*, p. 169.

[123] Jean, Paul e Hermann Limbourg nasceram entre 1370 e 1380 e morreram no mesmo ano, 1416.

[124] (1390?-1441)

[125] Pietro e Ambrogio Lorenzetti nasceram, respectivamente, nos anos 1280 e 1290 e faleceram ambos no mesmo ano, 1348, vítimas da *Peste Negra*.

[126] Nasceu no ano 1401 em Cusa, designação latina atribuída a uma cidade sobre o Mosela. Estudou Direito e Matemática em Pádua e Teologia em Colónia. Em 1437 foi enviado a Constantinopla para tentar unir as Igrejas do Oriente e Ocidente. Cerca de onze anos mais tarde, o Papa Nicolas V concedeu-lhe o título de cardeal. Morreu no ano 1464.

[127] Descartes, *Lettre à Chanut*, 6 de junho de 1647, *Oeuvres*, ed. Adam-Tannery, vol.V, p.50 e segs., Paris, 1903. Citação reproduzida também por Alexandre Koyré em *Do Mundo fechado ao Universo Infinito*, traduzido por Jorge Pires, Gradiva, 2001, p. 13.

[128] Nicolas de Cusa, *De docta ignorantia*, livro II, cap. II. Reproduzido por Alexandre Koyré em *op. cit*., p. 16.

[129] Koyré, *op. cit.*, p. 15.

[130] Boyer, *op. cit*., p. 205.

[131] (1377-1446)

[132] Manetti foi um contemporâneo de Brunelleschi, tinha apenas 23 anos quando o arquitecto florentino faleceu. Possivelmente foi a sua admiração por Brunelleschi que o levou a escrever sobre o criador da imponente cúpula da catedral de Florença. Sobre a experiência realizada na Piazza San Giovanni consultar Manetti, *The life of Brunelleschi*, versão inglesa de Catherine Enggass, Pennsylvania States University Press, 1970, p. 42-44.

[133] Alguns autores mencionam 1413 como o ano em que decorreu a encenação de Brunelleschi. No entanto numa carta redigida, neste mesmo ano, por Dominico Prato a Michel di Ghino Rondinelli já é referida a experiência realizada pelo arquitecto florentino, havendo portanto a possibilidade de que tenha sido realizada em anos anteriores. Para mais detalhes consultar Tanturli, *Rapporti del Brunelleschi com gli ambienti letterai* in *Filippo Brunelleschi*. *La sua opere e il suo tempo.*Volume I, Florença, 1980. Referido por Murtinho in *"La Piú Grassa Minerva". A Representação do Lugar*, tese de doutoramento, Universidade de Coimbra, 2001, p. 267.

[134] Consultar Murtinho em *Ibidem*, pp. 240-250.

[135] Lang, *Brunelleschi's panels*. *La Prospettiva Rinascimentale*. Codificazioni e Trasgressioni, volume I, a cura di Marisa Dalai Emiliani, Centro Di, Milão, 1980, p. 64. Citado por Murtinho em *Ibidem*, p. 241.

[136] Murtinho, *"La Piú Grassa Minerva". A Representação do Lugar*, p. 256.

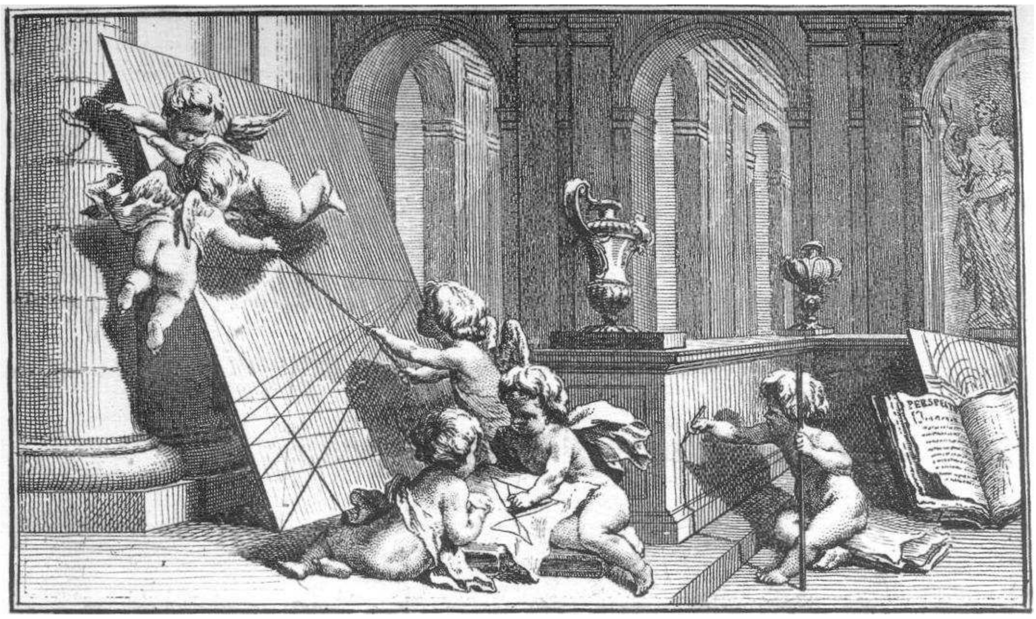
[137] Boyer, *op. cit*., p. 199.

[138] Panofsky, *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental*, p. 175.

[139] Prager e Scaglia, *Brunellesci Studies of his tecnology and inventions*, Mit Press, Cambridge, 1970, p. 62. Referido por Murtinho em *op. cit*., p. 267.

Capítulo 3

“A captura do infinito”



Iniciamos esta nova viagem com um dos maiores teóricos da perspectiva, Piero della Francesca[1]. Encontramos nesta figura do Renascimento a vertente artística e matemática combinadas harmoniosamente. É autor de uma magnífica obra, *Prospectiva Pingendi* [2] datada de 1475, sugerindo-nos um livro de matemática. Escrito com o rigor próprio e seguindo a axiomática de Euclides, apresenta um conjunto de proposições demonstradas à custa dos teoremas enunciados pelo geómetra alexandrino. Este tratado revestiu-se de um tal interesse que a sua primeira publicação somente ocorreu em 1841, provavelmente devido a Frederico de Montefeltro fazer questão de o manter no seio de um pequeno círculo de intelectuais.

A *perspectiva artificialis*, criada por Alberti, exprime-se em toda a sua lucidez formal em Piero della Francesca. Vasari atribui a concordância dos seus métodos perspécticos a um profundo estudo dos *Elementos*. O recurso a esta obra foi fundamental para explicar um vaivém de *razões geométricas*, onde «as grandezas são definidas por abstracção e as superfícies equivalem àquele espaço plano e dominável fixado no desenho dos polígonos construídos com régua e compasso; com os sucessivos teoremas, explicados para aqueles “que duvidam que a perspectiva não é a verdadeira ciência”»[3].

Do leque de teoremas que compõem *Prospectiva Pingendi*, destaca-se aquele que comprova a construção perspectiva – o oitavo enunciado que figura no primeiro livro. Piero mostra que se uma linha recta for dividida num certo número de segmentos por um feixe de rectas concorrentes, então esse mesmo feixe de rectas dividirá qualquer recta paralela à primeira na mesma proporção. Para a sua demonstração utiliza triângulos semelhantes, aliás uma prática corrente na época visto proporcionar demonstrações curtas e envolver noções muito elementares. Vejamos os seus argumentos:

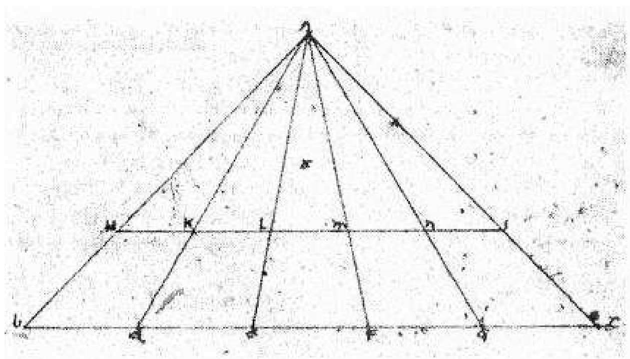


Figura 3.1. Ilustração da oitava proposição do Livro I de *Prospectiva Pingendi*.

Sejam BC um segmento de recta dividido em partes iguais e os pontos D, E, F e G as extremidades dos segmentos obtidos. Tracemos um outro segmento HI paralelo ao primeiro. Dos referidos pontos partem semi-rectas concorrentes no ponto A, obtendo assim os segmentos AB, AD, AE, AF, AG e AC, os quais dividem HI nos pontos K, L, M e N. Piero refere que esta última divisão é feita na mesma proporção que no segmento inicial, assim os triângulos menores são proporcionais aos maiores e por conseguinte são semelhantes. Como podemos exemplificar:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{KL}} \quad , \quad \frac{\overline{EF}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{LM}}{\overline{MN}} \quad , \quad \frac{\overline{FG}}{\overline{GC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{NI}}$$

o que está de acordo com a proposição 21 do sexto livro dos *Elementos*: *as figuras semelhantes a uma mesma figura rectilínea são também semelhantes*.

Importa salientar que este raciocínio ainda é válido para uma construção perspectiva que não seja central, como ilustra a figura que se segue:

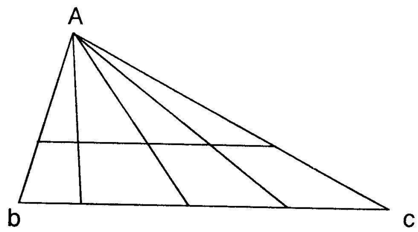


Figura 3.2.

Piero della Francesca dedica-se apenas a analisar matematicamente a construção albertiana, demonstrando a sua exactidão. Não encontramos na sua obra interpretações sobre o ponto fundamental da construção, no qual convergem as ortogonais ao plano do quadro, por outras palavras, não estuda pormenorizadamente o que hoje designamos por ponto e linha de fuga. Se por um lado a sua fonte inspiradora foi a geometria euclidiana, a qual defende que as paralelas mantêm sempre a mesma distância entre si, por outro era também conhecedor da *Óptica* de Euclides, mencionando-a em algumas proposições deste tratado. Mas apesar do geómetra alexandrino chamar à atenção para o facto das paralelas parecerem convergir, Piero não se debruça matematicamente sobre este princípio, embora o siga nas suas obras pictóricas, como podemos constatar pela célebre *Flagelação de Cristo* datada de 1460.

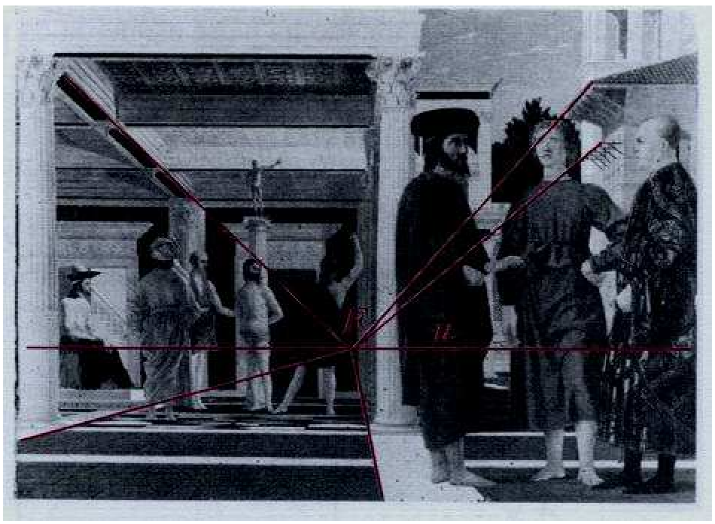


Figura 3.3. Esquema perspéctico da *Flagelação de Cristo*.

Devemos realçar o rigor alcançado neste quadro – as perpendiculares ao plano pictórico convergem para o ponto de fuga *F*, situado na linha do horizonte representada por *u*, o que denota uma preocupação em apresentar construções elaboradas correctamente em termos matemáticos, e provavelmente sujeitas a meticulosos estudos geométricos. Lamentamos que nunca tenha ocorrido a Piero a localização exacta daquele *ponto* fenomenal, pois seria curioso estudarmos a interpretação que dele faria.

Foi a partir desta «procura por métodos mais expeditos que os pintores elaboraram, dois séculos antes dos matemáticos estabelecerem a sua teoria sobre esta questão, construções geométricas que tomam em consideração aquilo que escapa a qualquer medida: o infinito. Eles equacionam pela primeira vez na história da pintura, noções de "linha do horizonte" e de "ponto de fuga" uma vez que, em perspectiva central, rectas paralelas convergem no infinito num ponto do quadro. É necessário imaginar a audácia que ele teve ao desenhar o infinito dando-lhe sobre um quadro um traço tão real como o de qualquer outro do espaço, e em construir a imagem de um mundo mensurável a partir de pontos verdadeiramente inacessíveis.»[4] Todavia, muitos serão os degraus a subir nesta longa escadaria que nos conduzirá a estes pontos inacessíveis. Tremendo paradoxo!

Na alvorada do século XVI é publicado em Toul o primeiro tratado impresso, *De Artificiali Perspectiva*, atribuído a Jean Pérelin [5] mais conhecido por Viator, dada a sua faceta de viajante. O pequeno tratado deste sacerdote, «elaborado num tom leve e despreocupado»[6], contrasta com a axiomática de Piero della Francesca. Trata-se de uma obra de fácil leitura e destinada a esclarecer os difíceis conceitos até então conhecidos, o que justifica os escassos aprofundamentos teóricos e as inovações apresentadas. Esta obra pode ser entendida como intermediária entre os séculos XIV e XV, uma espécie de síntese da sabedoria alcançada durante o período áureo do *Quatrocento*. Contudo, vislumbrava-se no horizonte o progresso triunfal que a perspectiva viria sentir no desenrolar deste século.

Um dos protagonistas deste triunfo foi o alemão Albrecht Dürer [7]. Filho de um ourives húngaro, Dürer rapidamente deu nas vistas pelas suas aptidões excepcionais para o desenho e pintura, mas foram as longas estadias em Itália que lhe permitiram amadurecer a técnica, nomeadamente o convívio com Giovanni Bellini. Os artistas italianos exerciam uma enorme influência sobre a comunidade artística europeia, dada a admiração que as suas obras provocavam e também a sua formação clássica e matemática. Absorvendo as lições do mestre Bellini e entusiasmado com o ambiente que se vivia no país transalpino, Dürer regressa a casa com a mente alumiada. Ansioso por dar a conhecer as suas descobertas, compõe por volta de 1525 o seu primeiro tratado sobre geometria para artistas, intitulado *Underweissung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnen, ung Gantzen Corporen* (Tratado das medidas com régua e compasso, das linhas, superfícies e corpos inteiros). A sua maior contribuição para a matemática encontra-se logo no primeiro livro, onde analisa as secções cónicas com base no tratado de Apolónio, obtendo-as através de um método designado por projecção ortográfica. Em relação à perspectiva, esta é aplicada em muitas das suas obras pictóricas, porém não merece grande destaque nos seus tratados escritos.

Ainda durante este século foram publicados trabalhos em que a perspectiva é abordada de modo científico. Johann Werner [8], astrónomo alemão, publicou uma obra intitulada *Libellus super virginti duobus elementis conicis* (Nuremberga, 1522). Considerado como o primeiro tratado de Geometria Projectiva, o autor trata as cónicas como perspectivas de circunferências. O siciliano Francesco Maurolyco [9], discípulo de Werner, publica no seu terceiro livro, *Opuscula Mathematica* (Veneza, 1557), uma abordagem das cónicas semelhante à de Werner. No que diz respeito à *construzione* *legittima*, a obra com maior destaque do *Cinquecento*, deve-se a uma dupla de sucesso formada pelo arquitecto Jacopo Barrozzi, mais conhecido por Vingola, e pelo matemático e Reverendo Egnazio Danti, apresentada ao público em 1583 sob o título *La due regole della prospettiva pratica*.

Tal como o título sugere, neste trabalho são desenvolvidas duas regras, isto é, duas construções perspécticas, a conhecida construção legítima e a principiante construção com o ponto de distância. A principal diferença entre as duas está no modo como são determinadas as transversais de um pavimento, deixando de ser necessárias as projecções ortogonais auxiliares. Porém, a precisão através da qual estas são traçadas continua a ser obtida à custa da diagonal. Enquanto Alberti usa esta recta apenas para certificar se o método foi correctamente aplicado, este duo Vingola-Danti vai mais longe e utilizam-na como meio directo de representação, prolongando-a até à linha do horizonte. Deste modo, verificam que o ponto de intersecção entre estas duas rectas (diagonal e linha do horizonte) é fixado no horizonte à distância a que o olho está do plano do quadro a partir do ponto de fuga. Por outras palavras, a distância entre o ponto de fuga e o ponto de distância é igual à distância a que o olho está do quadro pictórico. Provamos esta afirmação recorrendo à figura seguinte:

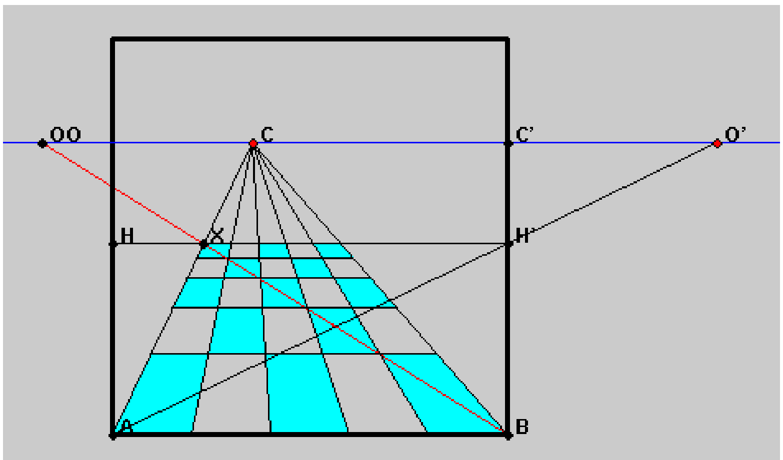


Figura 3.4. Reprodução do método de Alberti utilizando o Sketchpad.

O segmento BX representa a diagonal do pavimento, uma vez prolongada intersecta a linha do horizonte em 00 e qualquer paralela de BX quando prolongada irá intersectar a linha do horizonte no mesmo ponto. Através da semelhança de triângulos, podemos mostrar que a distância de 00 a C é igual à distância de 0' a C'. Consideremos os seguintes triângulos semelhantes, H'C'O' e H'B A, estabelecendo a razão entre os seus lados correspondentes:

$$\frac{\overline{H'C'}}{\overline{BH'}} = \frac{\overline{O'C'}}{\overline{AB}}$$

Por outro lado, também XC00 e XAB são triângulos semelhantes, as razões entre as suas alturas e as suas bases deverão ser iguais:

$$\frac{\overline{H'C'}}{\overline{BH'}} = \frac{\overline{00C}}{\overline{AB}}$$

Assim concluímos que $\overline{00C} = \overline{O'C'}$.

Após esta preciosa descoberta analisemos a nova construção proposta por Vingola e Danti, ilustrada como no original:

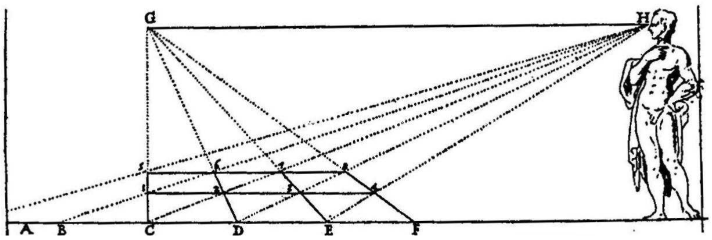


Figura 3.5. Construção do ponto de distância, sugerida por Vingola-Danti.

Tal como antes, começamos por desenhar as ortogonais ao plano do quadro fazendo-as convergir no ponto G. Uma vez conhecida a distância entre o observador e o quadro, marcamos na linha do horizonte o ponto H, representativo da posição ocupada pelo observador. De salientar que a altura do observador coincide com o comprimento do segmento GC, o qual representa a altura a que o ponto de fuga se encontra da linha de terra, razão pela qual numa vista frontal ambos coincidirem. O passo seguinte consiste em unir o ponto H com os pontos inicialmente marcados no segmento CF, as transversais são obtidas pelas intersecções entre as ortogonais e as *diagonais*. Assim, estas peregrinas rectas fornecem directamente as distâncias em profundidade das linhas transversais.

Mesmo no final de um catálogo elaborado por Egnazio Danti, indicando as obras sobre perspectiva publicadas até à data, figura a referência à de Federico Commandino[10]. Este conhecido tradutor de textos gregos estudou afincadamente o *Planisphaerium* de Cláudio Ptolomeu, dedicando especial atenção à já mencionada projecção estereográfica. Consciente da sua aplicação à perspectiva, Commandino redige em 1558 um comentário à obra ptolemaica relacionando-a com este método de representação, o qual viria a despertar o interesse de um dos seus melhores alunos, Guidobaldo Burbon del Monte [11].

Tal como o seu mestre, Guidobaldo nasceu no seio de uma abastada família pertencente à nobreza italiana, o que lhe proporcionou alcançar o título de Marquês de Pesaro. Chegou a exercer o cargo de Inspector Geral das fortificações e cidades da Toscânia, mas sendo um intelectual por excelência abandonou este ofício para se juntar a um grupo de eruditos em Urbino, acompanhando de perto os trabalhos científicos dos aspirantes a investigadores. Um dos talentos descobertos foi Galileu Galilei, que graças a Guidobaldo se tornou em 1592, professor de Matemática na Universidade de Pádua.

Absorvidas as lições do Professor Commandino e envolvido neste ambiente intelectual, eis que surge ao amanhecer do século XVII *Perspectivae libri sex*.

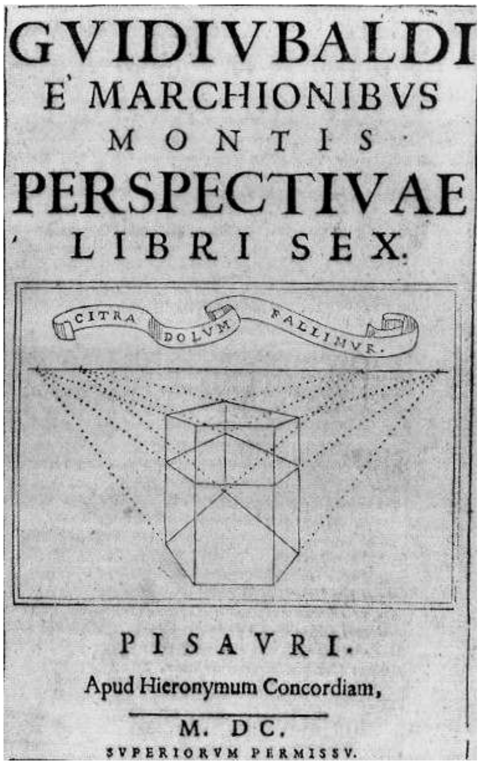


Figura 3.6. Guidobaldo del Monte, *Perspectivae libri sex*, Pesaro, 1600.

Pela primeira vez na história alguém se lembrou daquele mísero *ponto*, essa monáde artística sem a qual a *perspectiva artificialis* não existiria, passando a ser conhecido como *punctum concursus*.

Este tratado reflecte claramente o interesse manifestado por Guidobaldo em relação à convergência das ortogonais. Dedica o primeiro dos seis livros à demonstração por etapas, desde o caso mais simples ao mais geral, da seguinte proposição: *todo o sistema de rectas paralelas do espaço representam-se no plano do quadro por um sistema de rectas paralelas ou concorrentes, e o ponto de concorrência das aparências é a intersecção com o plano do quadro do raio visual paralelo ao sistema dado: as aparências permanecem paralelas apenas no caso do sistema dado for ele próprio paralelo ao quadro.* Os argumentos que permitem demonstrá-la provêm, mais uma vez, dos *Elementos* de Euclides. Analisemos a proposição XXVIII do primeiro livro de *Perspectivae*, onde se demonstra o caso particular de um feixe de rectas paralelas entre si não ser paralelo à linha de terra:

«Se o olho vê linhas paralelas, qualquer que seja o seu número, colocadas no plano de base (plano terra) e não paralelas à linha da secção (linha de terra), e se o plano da secção (plano do quadro) for erguido (elevado perpendicularmente) sobre o plano de base, então as aparências dessas linhas na secção concorrem num só e único ponto de igual altura a que o olho está do plano de base.» [12]

A demonstração que posteriormente fazemos, segue o raciocínio exposto por Guidobaldo no seu tratado. Porém, tem tanto de extensa como de deselegante sendo realizada à custa da figura seguinte, conforme o original.

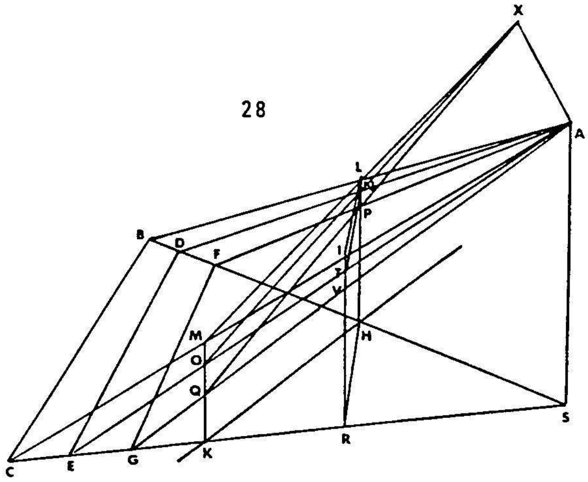


Figura 3.7.Ilustração que acompanha a proposição XXVIII do Livro I de Guidobaldo del Monte.

Sejam $\overline{AS}$ a altura a que o olho, representado pelo ponto A, está do plano base SBC; HK a linha de secção; BC, DE e FG linhas que se encontram no plano de base, mas não paralelas a HK. Seja ainda a secção HLMK perpendicular ao plano de base e sobre esta os segmentos LM, NO e PQ são as aparências das referidas linhas. Provemos que LM, NO e PQ concorrem num só e único ponto, situado à mesma altura do plano de base que o olho (A).

A partir do ponto S, situado no plano de base, desenham-se duas linhas que intersectam a linha da secção e as linhas indicadas nos pontos S, H, F, D, B e S, K, G, E e C. Sejam FPA, DNA, BLA, GQA, EOA e CMA os raios visuais que intersectam a secção nos pontos P, N, L e Q, O, M, respectivamente. Assim, o ponto B aparece na secção em L, o ponto D em N, F em P, e H por sua vez já está na secção, por conseguinte a linha HFDB aparece na secção como HPNL. Como HFDB é uma recta, HPNL também será e do mesmo modo, KQOM também será uma recta.

Por outro lado, o segmento AS e o plano ASB são perpendiculares ao plano de base, e a secção HLMK é erguida perpendicularmente sobre o plano SBC, portanto a linha LH, secção comum aos planos ASB e HLMK [13] será perpendicular ao plano SBC – o que está de acordo com a proposição 18 do Livro XI dos *Elementos*:

Se uma linha recta formar ângulos rectos com um plano, então todos os planos que a contenham são perpendiculares a esse a esse plano.

Analogamente, KM também será perpendicular ao plano SBC, pela proposição 19 do mesmo livro:

Se dois planos intersectados formarem ângulos rectos com qualquer outro plano, então a sua intersecção também forma ângulos rectos com esse plano.

Donde LH e MK são paralelos entre si.

Consideremos agora HR, que é paralelo a BC, DE e FG, e formemos através dos segmentos LH e HR o plano HLIR. Como LH é perpendicular ao plano SBC, então HLIR, pela proposição 18 indicada anteriormente, também será perpendicular ao plano SBC. E seja RI, a secção comum aos planos ASC e HLIR, de acordo com a referida proposição 19, RI também será perpendicular ao plano SBC. E pela proposição 6 do Livro XI dos *Elementos*:

Se duas linhas rectas formarem ângulos rectos com o mesmo plano, então são paralelas entre si.

Concluímos que IR será paralelo a HL e a KM.

Por outro lado, os raios visuais CA, EA e GA intersectam RI nos pontos I, T e V, estes raios e RI estão contidos no mesmo plano, o triângulo ASC. Nestas circunstâncias, RI representará na secção RC.

Consideremos agora LI e NT, o primeiro é a aparência de BC na secção HLIR e o segundo de DE. Como já tínhamos visto BC e DE são paralelas a HR e se considerarmos os triângulos ABC e ALI, verificamos que são semelhantes, pela proposição 2 do Livro VI dos *Elementos*:

Se uma linha recta for desenhada paralelamente a um dos lados de um triângulo, então intersecta os lados do triângulo proporcionalmente; e , se os lados do triângulo forem intersectados proporcionalmente, então a linha que unir os pontos da secção será paralela ao lado do último triângulo.

Assim LI é paralelo a BC e analogamente, NT será paralelo a DE. Pelo mesmo argumento se constata que LI e NT serão paralelas entre si e paralelas a BCDE. Como vimos HL é paralelo a IR, mas LN e IT são respectivamente coincidentes a estes segmentos, portanto também são paralelos entre si, conduzindo Guidobaldo a concluir que LNTI será um paralelogramo.

Por outro lado, supõe que $\overline{IT} = \overline{LN}$. Se considerarmos os triângulos AMO e AIT estamos em condições de aplicar novamente a proposição 2 do Livro VI, e por conseguinte, os segmentos MO e IT são paralelos, tal como MK e IR, razão pela qual os triângulos AMO e AIT são semelhantes, donde:

$\frac{\overline{MA}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{IT}}$, mas $\overline{MA} > \overline{AI}$, logo $\overline{MO} > \overline{IT}$ e consequentemente, $\overline{MO} > \overline{LN}$. Uma vez que MK e LH são na verdade paralelos, como $\overline{MO} > \overline{LN}$ então LM e NO não são paralelas entre si, uma vez que se aproximam e quando prolongadas concorrem em X. Mas se $\overline{IT} = \overline{LN}$,

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{IT}}, \text{ então } \frac{\overline{MA}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{LN}}. \quad (1)$$

Seguindo o raciocínio que fizemos anteriormente, também XMO e XLN são triângulos semelhantes, pelo que $\frac{\overline{MX}}{\overline{XL}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{LN}}$ substituindo em (1) vem $\frac{\overline{MX}}{\overline{XL}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AI}}$. Procedendo analogamente, demonstra-se que $\frac{\overline{MQ}}{\overline{IV}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AI}}$, e supondo que $\overline{IV} = \overline{LP}$, resulta que se unirmos os pontos P e V, o segmento PV será a aparência de FG na secção HLIR. Portanto $\frac{\overline{MA}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{MQ}}{\overline{LP}}$, como $\frac{\overline{MX}}{\overline{XL}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{AI}}$ substituindo obtemos $\frac{\overline{MQ}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{MX}}{\overline{XL}}$. Aplicando novamente a proposição 2 do Livro VI, os segmentos MQ e LP são paralelos e uma vez prolongado PX, QPX será uma linha recta, correspondendo ao lado do triângulo XMQ. Se PQ for prolongado a partir de P, intersecta OX e MX no ponto X. «*E assim para um grande número de linhas paralelas todas concorrem em aparência no ponto X.*»[14] Unamos os pontos A e X, pela referida proposição 2 do Livro VI:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{MX}}{\overline{XL}} \text{ e } \frac{\overline{MI}}{\overline{AI}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{LX}}, \text{ visto que IL é paralelo a AX.}$$

Mas também mostrámos anteriormente que LI é paralelo a BC, DE e FG, por conseguinte é paralelo ao plano de base SBC. «*Assim parece que o ponto X está à mesma altura do plano de base que o olho A. Sendo neste ponto que as linhas aparentes ML, ON e QP concorrem na secção. Foi aquilo pretendemos demostrar.*» [15]

Através desta proposição se torna evidente a correspondência que a perspectiva estabelece entre rectas paralelas e rectas concorrentes e vice-versa.

Perspectivae libri sex ao demonstrar cientificamente as propriedades do ponto de fuga, contribui decididamente para o nascimento da Geometria Projectiva. Neste tratado o *ponto* insignificante adquire um novo estatuto passando a ser o protagonista da história que se continua a desenrolar. Contudo as proposições que aqui se demonstram, justificam pura e simplesmente, a técnica de representação criada por (e para) pintores e artistas em geral. Trata-se, portanto, de uma análise geométrica da construção perspéctica, não havendo referências à localização precisa daquele que agora desempenha o papel principal. A captura desta personagem traiçoeira não viria a ser fácil, apesar de existirem testemunhos da sua presença nas mais ricas obras de artes do Renascimento. Quando a procuramos alcançar escapa-nos, embora permaneça visivelmente diante de nós, parecendo umas vezes tão perto e outras tão longe – estranho fenómeno! Alguém sugere arrojadamente... que a captura continue nem que seja até ao infinito!

A avaliar pelos seus antecedentes este *ponto*, demasiado idoso para andar em correrias, já seduzia o grande sábio Euclides de Alexandria, mas este demasiado ocupado com a sua régua e o seu compasso desenhando figuras concretas, não tinha disposição para cavalgar pelo espaço à sua procura. Além disso, deitaria por terra a sua teoria sobre linhas paralelas – mas verdade seja dita, lá emanou um cheirinho na sua *Óptica*, porém também passou despercebido, ninguém lhe deu muita importância, pelo menos que nós saibamos.

Enquanto os *Elementos* fossem encarados como as tábuas da lei da geometria, dificilmente seria alcançado o matreiro do *ponto*. Já em plena Idade Média, Vitélio foi outra das suas vítimas. Seguidor convicto dos postulados euclidianos, defende que a aparente convergência das paralelas não passa de uma ilusão óptica, «*embora as linhas aparentem convergir, nunca serão vistas como convergentes, uma vez que serão sempre vistas de um qualquer ângulo*»[16]. Continua acrescentando que duas paralelas jamais se poderiam intersectar, uma vez que de dois dos seus pontos em oposição subtenderão sempre um ângulo por muito pequeno que seja. A dificuldade de Vitélio em aceitar a existência deste *ponto*, prende-se com o facto de estar demasiado apegado à definição matemática de ponto, não conseguindo imaginar que este elemento geométrico possa representar os pontos infinitamente distantes das referidas paralelas. Talvez lhe estejamos a pedir demasiado, não nos esqueçamos que implícito nestas ideias se encontra o conceito de limite, e portanto ao prolongarem-se infinitamente as paralelas o ângulo visual subtendido pelos seus pontos extremos aproxima-se de zero – o que era impensável para o físico polaco, uma vez que as suas preocupações incidiam essencialmente nas teorias da visão. De facto, no domínio da psicologia é evidente que «a nossa visão não atinge distâncias infinitas; além disso, não existem na realidade, linhas que infinitamente se prolonguem (...) para nos expressarmos com absoluta correcção, diremos: as linhas paralelas são representadas num quadro de tal modo que, caso nos fosse possível prolongá-las suficientemente, os seus comprimentos no interior do quadro se intersectariam precisamente no mesmo ponto»[17]. Porém, esta discussão estava longe de terminar, pois o conceito de infinito implicava a rejeição das concepções aristotélicas. Continuemos assim a assistir ao desenrolar da história – ver-se-ão realizadas importantes descobertas no próximo episódio.

Enquanto o Marquês de Pesaro baptizava o *ponto* misterioso, o matemático e astrónomo alemão Johannes Kepler[18] entretia-se a examinar aqueles preciosos instrumentos que conduziram Brunelleschi à ribalta. De facto, foi a sua investigação sobre as propriedades ópticas dos espelhos que o conduziram ao estudo das cónicas e lhe permitiram descobrir pontos muito especiais no eixo de cada uma, os quais apelidou de focos. Somente uma prodigiosa imaginação como a de Kepler, poderia dotar a parábola, à semelhança da elipse e da hipérbole, com dois focos; um deles pode ser representado na figura, mas o outro não, está a uma distância infinita, razão pela qual o denomina por *foco cego*.

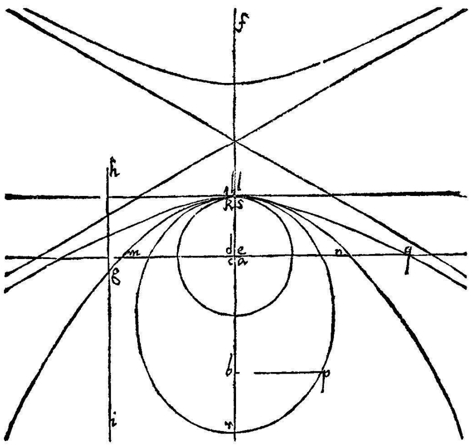


Figura 3.8. As secções cónicas por Johannes Kepler.

Concebendo os focos como pontos dotados de movimento, o génio alemão estuda a elipse tanto para o caso em que os focos coincidem dando lugar a uma circunferência, como para o caso em que um foco permanece fixo e outro se desloca originando uma parábola, ficando este último a uma distância infinita do primeiro.

Por outro lado, mostra que na elipse e na hipérbole os raios de luz que partem de um foco reflectem-se em raios que passam pelo outro. Sugere então que o mesmo devia suceder na parábola, no entanto os raios que partem de um foco reflectem-se em raios paralelos a ele, e portanto o segundo foco da parábola pode estar em ambas as direcções, para dar continuidade às transformações da elipse e da hipérbole numa parábola.

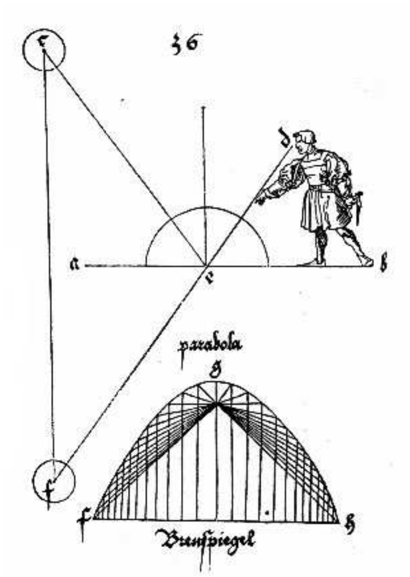


Figura 3.9. Os focos da parábola atribuídos por Kepler.

Deste modo, qualquer recta que una um ponto da parábola ao foco cego é paralela ao eixo, o que significa que as rectas com o mesmo ponto do infinito são paralelas. Foi assim que nasceu a primeira definição de *ponto do infinito*[19]. Ainda que seja indirectamente, Kepler apresenta deste modo um precioso contributo para abraçar aquele *ponto* tão cobiçado pelos artistas.

Nos tratados que se seguiram sobre perspectiva germinaram, ainda de forma imperfeita, interpretações que procuravam alcançar a verdadeira definição do princípio que envolve este místico *ponto*. De realçar a obra de Franciscus Aguilonius [20] intitulada *Opticorum libri sex*, editada em Antuérpia no ano de 1613. Este tratado é uma espécie de síntese que engloba aspectos da ciência clássica, medieval e renascentista. Contudo devemos salientar a inteligência e a lucidez que o autor manifesta neste domínio, tal é a fundamentação das concepções que menciona. Este reitor da Casa Jesuíta de Antuérpia, consegue desvendar um pouco do mistério que envolve a *monáde artística*. No quarto livro de *Opticorum* sugere que *«as paralelas prolongadas em todo o seu comprimento, através da infinitude da distância, parecem convergir exactamente, quer entre si, quer nos raios centrais. Por isso, pressupõe-se que esse ponto se alonga infinitamente no raio central e se separa do olho a uma distância incomensurável»*[21].

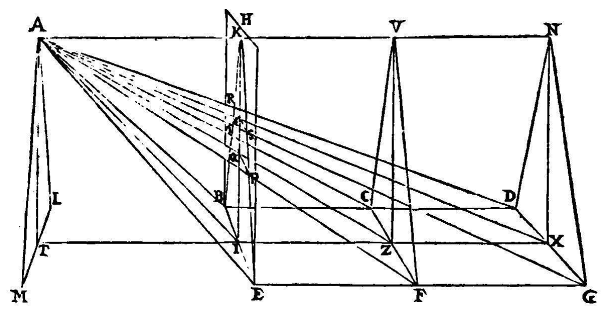


Figura 3.10. Ilustração do princípio do *punctum concursus* por Franciscus Aguilonius.
O segmento TA representa o observador, H o plano de pintura e K o *punctum concursus*.

Começa a ser notória a necessidade de abandonar os postulados euclidianos sobre as linhas paralelas. É urgente a criação de uma nova geometria onde seja demonstrada matematicamente a concorrência das linhas paralelas.

Eis que na plenitude do século XVII, pela mão do francês Girard Desargues [22], surge a desejada solução deste enigma, ainda que envolvida em certa polémica clarifica de uma vez por todas a natureza do *punctum concursus*.

O primeiro tratado deste arquitecto e engenheiro militar foi publicado em 1636, intitulando-se *Exemple de l´une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance, ny d´autre nature qui soit hors du champ de l´ouvrage* [23]. O título demasiado extenso e estranho assim como o difícil texto e a complicada nomenclatura empregues, não proporcionaram um convite à sua leitura. Neste trabalho, Desargues apresenta inovações no campo da perspectiva que não foram bem aceites pela comunidade científica da época, constituída por um elenco de luxo: René Descartes, Pierre Fermat, Gilles Persone Roberval, Étiène e Blaise Pascal, todos orientados pelo frade Marin Mersenne. Duras foram as críticas tecidas por estes eruditos, com excepção do jovem Blaise, à obra de Desargues, o que viria a ser uma constante na sua vida científica.

No ano seguinte à publicação do *Exemple de l´une des manières universelles*, René Descartes apresenta a sua *Geométrie*, deixando encantados os seus compatriotas. Apesar de Desargues estudar atentamente a exposição matemática de Descartes, as suas investigações afastam-no da álgebra aplicada à geometria, e em 1639 publica uma outra obra – *Brouillon Project d´une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*. Mas de facto, nem o título contribuía para ajudar Desargues, uma vez que poderá ser traduzido como o *Esboço tosco de uma tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano*. Por estas razões, o referido círculo de intelectuais nunca levou muito a sério os escritos deste engenheiro militar. Vejamos o conselho dado por Descartes que, vaidoso com o êxito alcançado pela sua *Geométrie* e dada a dificuldade da obra de Desargues, lhe escreve uma carta repleta de ironia:

«(...) podei-vos preparar para escrever um volumoso livro, com explicações completas sobre tudo e suficientemente claras de tal modo que estes gentlemen, que não são capazes de estudar um livro sem bocejar e não sabem exercer a sua imaginação para compreender uma demonstração em Geometria, nem para voltar a página para ver as letras numa figura, não encontrem o que quer que seja no vosso discurso que lhes pareça menos fácil de compreender que a descrição de um palácio numa novela. E, para este fim, parece-me que, para tornar as vossas demonstrações menos pesadas, não estaria fora de questão empregar a terminologia e o estilo do cálculo e da Aritmética, como fiz na minha Geometria (...).» [24]

Estas palavras deixaram certamente Desargues entristecido e desgostoso com a pouca receptividade que as suas obras alcançaram. Talvez por se sentir envergonhado, não publica novamente uma obra com a sua assinatura, e recorre então ao seu amigo Abraham Bosse [25], que na altura preparava um tratado sobre perspectiva – seria nessa publicação que surgiria um texto da sua autoria intitulado *Maniére universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective* (Paris, 1648).

Apesar dos intelectuais comandados pelo padre Mersenne terem desprezado as obras de Desargues, seria no tão censurado *Brouillon Project* que se encontrava a solução do nosso mistério. Essas *demonstrações pesadas* referidas por aquele que foi considerado como o *pai da filosofia moderna*, revestiam-se de simplicidade atendendo ao princípio de continuidade enunciado por Kepler, ou seja, à obtenção de secções cónicas umas através das outras. Para compor o *Brouillon Project*, Desargues investigou as propriedades que se mantinham quando as cónicas eram sujeitas a projecções – o que o levou, à semelhança de Kepler, a dotar a parábola de um segundo foco situado no infinito sendo a partir desta ideia que surgem neste tratado, as primeiras definições de ponto e recta do infinito.

Desargues inicia a exposição sobre este assunto referindo que várias rectas quer sejam paralelas ou *inclinadas para o mesmo ponto*, constituem um *feixe*. Em ambos os casos o feixe de rectas *tende* para um único ponto, o qual é designado por *vértice do feixe*. Porém, num feixe de rectas paralelas o vértice está a uma distância infinita em cada uma delas, enquanto que no feixe de rectas convergentes o vértice localiza-se a uma distância finita. É nesta simplicidade que desabrocha o conceito de *pontos do infinito*. A definição dada está de acordo com a que empregamos nos nossos dias. Ilustramos de seguida este conceito à luz dos conhecimentos que hoje possuímos sobre geometria projectiva e recorrendo a um argumento de continuidade, envolvendo o movimento de pontos e rectas num plano. Por uma questão de simplicidade, em vez de considerarmos um feixe de rectas utilizemos neste raciocínio apenas duas. Suponhamos que as rectas distintas r e r' estão no mesmo plano e não são paralelas, observemos uma projecção entre duas rectas complanares.

Sejam A um ponto pertencente à recta r e P um ponto não pertencente a nenhuma das rectas mencionadas. Uma vez que a geometria projectiva é o ramo da matemática que investiga as propriedades que permanecem invariantes quando as figuras são sujeitas a projecções, ocupando-se assim das propriedades que "transitam" de uma figura para a outra, sobressaí deste conceito uma ideia fundamental – a consideração de uma função. Deste modo, a cada ponto da recta r é possível associar um e um só ponto da recta r'. Pela figura seguinte verficamos que o ponto A de r é associado a A' de r', de tal modo que os pontos A, A' e P sejam colineares. Diz-se, então, que A' é obtido de A por projecção a partir de P, sendo o ponto P o centro de projecção.

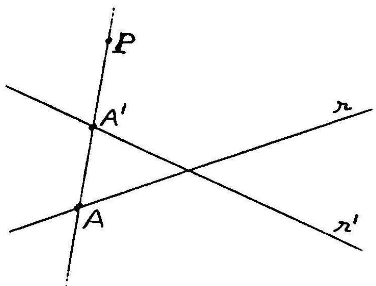


Figura 3.11.

Suponhamos que o ponto A se desloca ao longo da recta r, num sentido ou no outro, assumindo as posições de A1, A2, A3,..., como mostra a figura da página seguinte. Assim, este ponto adquire um tal distanciamento que o exclui do nosso campo visual. À medida que o ponto A se *afasta* a recta PA *aproxima-se* da recta paralela a r que passa por P, e o ponto A' *aproxima-se* do ponto Y.

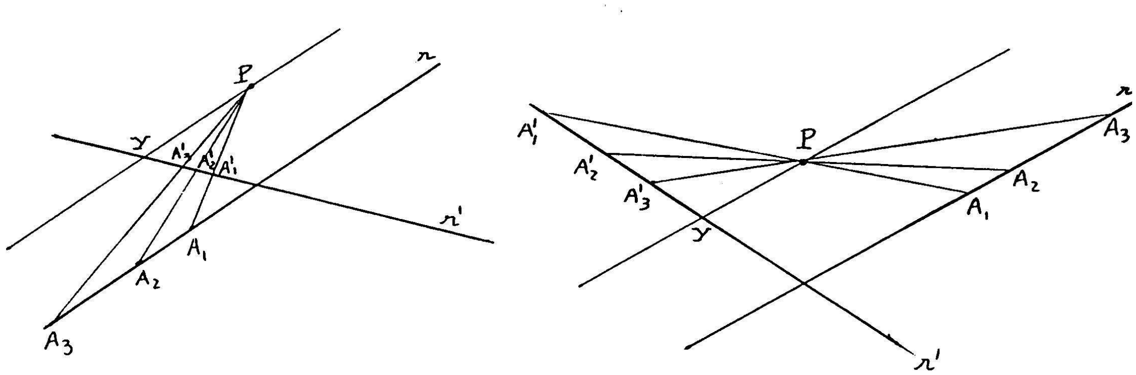


Figura 3.12.

Intuitivamente, constatamos que quando o ponto A se desloca sobre a recta r *para o infinito*, a recta PA *tende* para a paralela a r que passa por P, e o ponto A' *tende* para Y. O que nos conduz a supor que existe na recta r um ponto a uma *distância infinita*, o qual será o ponto do infinito da recta r, que passamos a designar por R_∞. E portanto, à semelhança da projecção realizada no início, também agora pretendemos que R_∞ seja obtido de Y por projecção a partir de P. Ou seja, que se estabeleça uma correspondência entre r e r' associando R_∞ a Y, para tal é necessário que os pontos P, R_∞ e Y sejam colineares. Deste modo o ponto R_∞ não pertence apenas à recta r, como também a todas as paralelas a r, qualquer que seja o ponto P do plano.[26]

O raciocínio indicado por Desargues para definir *recta do infinito* é análogo ao de ponto, substituindo rectas por planos. Assim, planos paralelos ou *inclinados para uma mesma recta* também constituem um feixe e em ambos os casos, os planos *tendem para um mesmo lugar*, designando-o por *eixo do feixe*. A noção de recta do infinito é dada explicitamente de seguida, quando Desargues afirma que os planos paralelos constituem um feixe cujo eixo está em cada um deles a distância infinita de todos os lados, enquanto que os planos convergentes constituem um feixe cujo eixo está em cada um deles a distância finita.[27]

Estas definições permitem a Desargues unificar os conceitos de projecção central e paralela. Na primeira o centro de projecção está a uma distância finita, é o tipo de projecção utilizada pelos pintores, sendo o centro de projecção o olho do pintor. A segunda também conhecida por projecção a partir do infinito, corresponderia ao caso em que o olho do pintor se encontrasse infinitamente distante da cena a pintar e da tela. Contudo, em geometria projectiva deixa de fazer sentido esta distinção, uma vez que na teoria formal não existem linhas paralelas: «duas linhas quaisquer encontram-se sempre e aquelas que outrora foram consideradas linhas paralelas revelaram-se linhas que se encontram num *ponto do* infinito»[28]. Assim projecções centrais e paralelas são unificadas num conceito geral, o conceito de projecção.[29]

Está assim solucionado o nosso enigma, os artistas conseguem criar a impressão adequada de profundidade através da definição de um ponto no infinito, onde se encontram as ortogonais ao quadro pictórico mas paralelas entre si. Importa salientar que todos estes pontos no infinito, se situam numa única *linha do infinito*, como ilustra o esquema perspéctico do admirável *S. Jerómino* de Albrecht Dürer.

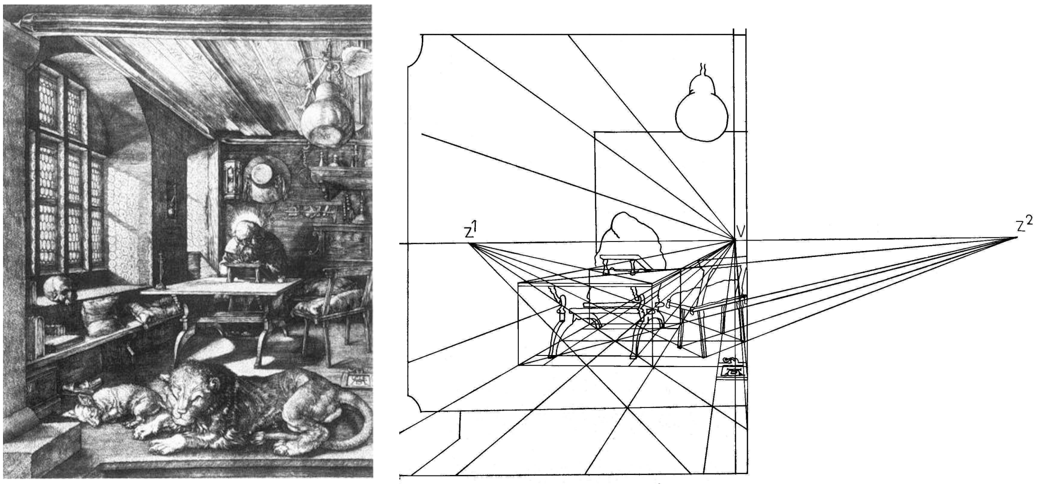


Figura 3.13. À esquerda o original *S. Jerónimo no seu estúdio* de Dürer datado de 1514, e à direita o esquema perspéctico mostra três *pontos no infinito* (Z^1, V e Z^2) situados numa única linha, a *linha do infinito*.

Deste modo chegamos às designações hoje atribuídas: ponto de fuga, linha de fuga e linha do horizonte. Elementos geométricos tão rudimentares e ao mesmo tempo tão poderosos, sem os quais a construção albertiana e a perspectiva em geral, não teriam qualquer significado. É curioso como estes habitantes da *Flatland* conjugados numa obra de arte concebem a terceira dimensão!

Notas

[1] Pintor e teórico italiano, nasceu em Borgo San Sepolcro em 1406, onde também morreu em 1492. Em 1442, na sua terra natal exerceu o cargo de conselheiro da cidade, onde realizou várias pinturas, entre as quais o *Baptismo de Cristo*. Trabalhou também para as cortes de Urbino e Ferrara, desse labor resta-nos apenas a *Flagelação de Cristo*. Nove anos mais tarde inicia uma nova fase da sua actividade com a execução dos frescos da Igreja de S. Francisco em Arezzo, cujo tema principal é a História da Santa Cruz e que constituem a sua obra prima. Em 1459, em Roma produziu frescos no Vaticano na actual estância de Heliodoro. Regressa definitivamente a Borgo San Sepolcro, onde permanecerá até à sua morte. Durante estes anos elaborou os seus dois famosos tratados *De Prospectiva Pingendi* e *De Quinque Corporibus Regularibus*.

[2] Este tratado foi oferecido ao duque Frederico de Urbino. É constituído por três partes: na primeira aborda a perspectiva de figuras planas, na segunda a perspectiva de sólidos e na terceira a perspectiva de cabeças humanas.

[3] Brusatin, *op. cit*., p. 309.

[4] Comar, *La perspective en jeu*, Découvertes Gallimard, 1992, p. 38.

[5] (1445-1524)

[6] Xavier, *Perspectiva*, *Perspectiva Acelerada e Contraperspectiva*, FAUP, Porto, 1997, p. 51.

[7] Pintor, gravador e teórico da arte alemã, nasceu em Nuremberga em 1471 e morreu em 1528.

[8] (1468-1528)

[9] (1494-1595)

[10] (1509-1575)

[11] (1545-1607)

[12] Citado em *Les Cahiers de Perspective nº4, points de vue*, IREM de Basse-Normandie, Université de Caen, 1987, p. 237.

[13] Na versão original, Guidobaldo indica o plano HLMK apenas pela diagonal HM, tratando-se de uma prática comum da época.

[14] Citado em *Cahiers de Perspective nº4*, p. 238.

[15] *Ibidem.*

[16] Citado por Erwin Panofsky, *A perspectiva como forma simbólica*, p. 91.

[17] Guido Hauck, *Lehrbuch der malerischen Perspective*, Berlim: Springer 1910, p. 24. Citação reproduzida por Erwin Panofsky em *Ibidem*.

[18] (1571-1630)

[19] Esta teoria foi exposta por Kepler nos seus *Paralipómenos a Vitélio*, publicado em Frankfurt no ano de 1604. Na versão que seguimos de William H. Donahoue publicado por Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000, este tema é abordado no capítulo 4, p. 106 e seguintes.

[20] Também conhecido por François d'Aguilon.

[21] Citado por Erwin Panofsky em *op. cit.*, p. 92.

[22] (1591-1661)

[23] As iniciais S.G.D.L. significam que o autor era Sr. Girard Desargues de Lyon.

[24] Citação reproduzida por John Flauvel e Jeremy Gray em *The History of Mathematics, A Reader*, Washington DC: Mathematical Association of America, 1997, p. 371. Também a encontramos no livro de Eduardo Veloso intitulado *Geometria* publicado pelo Ministério da Educação e Instituto de Inovação Educacional, 1998, p. 300.

[25] (1602-1676)

[26] Sobre a obra de Desargues e sobre alguns aspectos da geometria projectiva consultamos o texto manuscrito de Carlos Sá intitulado *História da Geometria Projectiva*, referente a um curso organizado por ocasião do 1º Encontro Luso-Brasileiro sobre História da Matemática, 1993. Este assunto encontra-se na páginas 6 e 7.

[27] *Ibidem*, pp. 19 e seguintes.

[28] Devlin, *Matemática: A ciência dos padrões*, traduzido por Alda Maria Durães, Porto Editora, 2002, p. 138.

[29] Devemos introduzir esta nota para relembrarmos que o próprio Alberti ao abordar os tipos de sombras, descreve de forma correcta estes dois tipos de projecções apesar de não lhes atribuir qualquer designação. Os raios solares produzem sombras, que não são mais que projecções paralelas, enquanto que os raios provenientes de luz artificial, ao incidirem num objecto projectam-no como uma projecção central.

Apêndice

A *inversão kepleriana* e a justificação matemática dos *enganos do olhar*

«Não é de hoje que o ar está espalhado circularmente em torno das terras. É uma lei da natureza, e como tal é lógico pensar que tenha perdurado desde a fundação do mundo até aos nossos dias. Por consequência, deve ser razoável pensar que não houve qualquer época sem *refracção*.»[1] São estas graciosas palavras com que Johannes Kepler apresenta os *Paralipómenos a Vitélio*, uma obra fundamental que nos permitirá colocar o derradeiro ponto final na distinção entre a *perspectiva naturalis* e a *artificialis*. A refracção, esse fenómeno responsável por tantas maravilhas, propõe ao génio alemão longas e insistentes investigações para alcançar a glória ao descobrir que a inversão das imagens percepcionadas pelos órgãos da visão ocorre na retina, e não nessa estrutura filosófica conhecida por cristalino, como supunha Alhazen.

O interesse de Kepler pela ciência óptica surgiu enquanto estudava o eclipse solar a 10 de Julho de 1600. À semelhança do seu amigo Tycho Brahé [2], constatou que o diâmetro lunar medido através de um instrumento, uma espécie de câmara, era menor durante o eclipse do que noutras ocasiões, embora a lua não estivesse mais afastada. Um tal Straker, sugeriu-lhe na altura que a solução para este enigma seria encontrada na teoria óptica, mais especificamente na teoria da refracção. Seja lá quem for este sujeito, a verdade é que devia ter algum crédito junto de Kepler, uma vez que o astrónomo alemão se debruçou de imediato sobre os trabalhos dos perspectivistas medievais, nomeadamente de Vitélio e Pecham.

Kepler percebeu que a observação astronómica depende da propagação da luz e da percepção realizada pelo observador, sendo por isso indispensável para um astrónomo o conhecimento da teoria da visão. A procura de soluções para o problema do diâmetro lunar levou-o a estudar o funcionamento do órgão da visão. De facto, para este génio alemão o saber não ocupava lugar, o que se deduz das palavras dirigidas a Rudolfo II, arquiduque da Aústria, rei da Boémia e da Hungria, a quem dedica a composição deste volumoso livro qualificado apenas como suplemento ao de Vitélio:

«Como era preciso dar uma explicação completa da visão tal como acontece na refracção, nos simulacros de objectos vistos e nas cores, não nos devemos surpreender que eu tenha feito digressões (...), a propósito das secções cónicas (...), a propósito das maravilhas da óptica (...), a propósito da natureza da luz e das cores e ainda sobre outros assuntos. Mesmo que estas questões não contribuam em nada para a astronomia, merecem serem estudadas por si mesmas.» [3]

Durante o Renascimento os esquemas representativos da estrutura anatómica do olho aproximaram-se consideravelmente dos modelos que hoje são usados na oftalmologia. Um dos pioneiros neste domínio foi o Reverendo Egnazio Danti. Enquanto Vingola defendia a teoria medieval, referindo que o centro do olho correspondia ao centro do humor cristalino, Danti tomou conhecimento dos estudos de anatomia ocular realizados pelo espanhol Valverde, o qual tinha localizado esta estrutura na região dianteira do olho, imediatamente atrás da pupila. Influenciado por este progresso, Danti elabora o esquema que ilustramos na figura que se segue, esquema este que consta também do tratado *La due regole della prospettiva pratica*, editado em Roma em 1583.

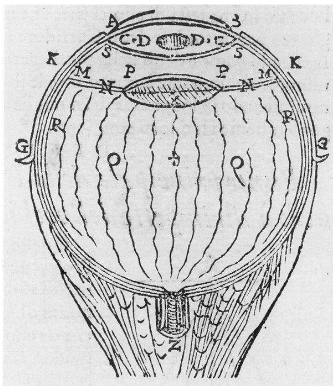


Figura 1. Estrutura anatómica do olho, de acordo com Egnazio Danti.
Onde D/D- pupila, P/P- cristalino, Q- humor aquoso, Z- nervo óptico.

Coincidência ou não, neste mesmo ano, não sabemos se antes ou depois desta publicação, surge um diagrama da anatomia ocular idêntico ao de Danti num pequeno volume intitulado *De corporis humanis structura et usu...libri III* da autoria de um professor da faculdade de medicina da Universidade de Basileia, Felix Platter [4].

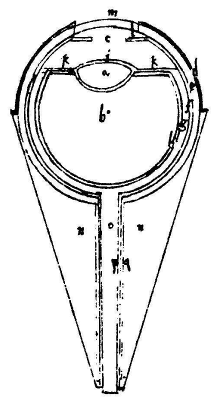


Figura 2. Anatomia ocular, segundo Felix Platter.

Este professor menciona no seu livrinho que o cristalino é uma lente natural através da qual a retina vê o mundo exterior, e portanto tem de estar localizado na região frontal do olho. O pequeno texto de Platter viria a ser fundamental para a teoria de Kepler, que segundo os historiadores terá sido o seu amigo Johannes Jessen [5], autor de *Anatomia Pragensis*, quem lhe terá falado do estudo realizado pelo professor de Basileia.

Tanto para Kepler, como para Alhazen e os restantes perspectivistas ocidentais, o mecanismo da visão baseia-se na análise puntiforme do corpo observado. Se os raios luminosos provenientes dos pontos do campo visual se propagam em todas as direcções até alcançarem o olho do observador, então estabelecem no órgão da visão uma correspondência um-para-um entre os pontos provenientes da radiação e os que foram estimulados dentro do olho. Kepler sublinha que de cada ponto do objecto visível viajam infinitos raios de luz até ao olho, onde banham a córnea, preenchem a pupila e estruturam um cone com vértice no ponto de onde partiram, localizando-se a base dentro do olho. Por outras palavras, os raios levemente refractados atravessam a córnea e convergem para a superfície do cristalino, onde se encontra a base do cone de radiação, deste modo, o génio alemão conceptualiza a radiação em infinitos cones. Mas neste aspecto não existe grande diferença com a tradição da perspectiva conhecida da Idade Média. As inovações germinam quando Kepler começa a investigar o que sucede à radiação depois de atingir o humor cristalino.

Os perspectivistas medievais simplificaram grande parte do problema ao dirigirem a sua atenção para os raios perpendiculares, os quais são propagados em linhas rectas até encontrarem a superfície do cristalino, onde divergem a sua trajectória, prosseguindo posteriormente para o nervo óptico. Mas Kepler não podia ignorar os raios que não incidiam perpendicularmente e por conseguinte, havia que os relacionar não apenas com os outros raios, mas também com a multiplicidade de refracções que ocorriam – o que o levou a estudar as propriedades da focagem de lentes. Não satisfeito com a análise com que se deparou sobre este assunto na literatura disponível, pois as obras medievais apenas referiam um estudo elementar de esferas que queimam, mostrando que todos os raios que partem de um ponto luminoso convergem num simples foco do outro lado das esfera, o sábio alemão coloca as mãos à obra e decide fazer ele próprio algumas experiências. Utilizando uma esfera transparente, indicada na figura seguinte por EFHG, coloca-a à frente de um observador, cujos olhos são representados pelos pontos B e C, os quais pretendem ver o objecto indicado por A. No ponto I situa-se o centro da esfera e nos ponto E, G, F e H ocorre a refracção, visto a esfera apresentar uma densidade diferente à do meio exterior.

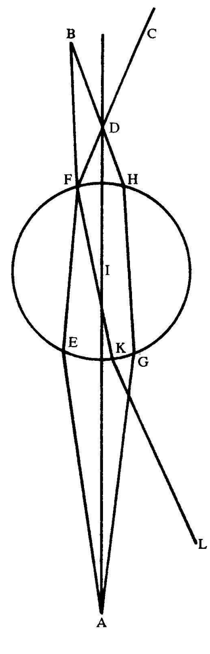


Figura 3.

Kepler constata que sendo E um ponto de refracção, EF é o raio refractado de AE e analogamente HG é o raio refractado de AG, ambos sofrem nova refracção em F e H respectivamente, convergindo posteriormente para o ponto D. Assim a imagem de A observada pelos dois olhos através da esfera será formada em D.

Verifica por outra experiência que os raios que se propagam junto ao centro da esfera intersectam o eixo central num ponto mais afastado do que os que são provenientes da *periferia*. Na figura seguinte, o raio representado por KB incide nas proximidades do eixo DAF, sendo ligeiramente refractado em B e C e intersectando o eixo em F, já o raio LG incide tangencialmente na esfera, refracta-se em G e H e intersecta o eixo no ponto I.

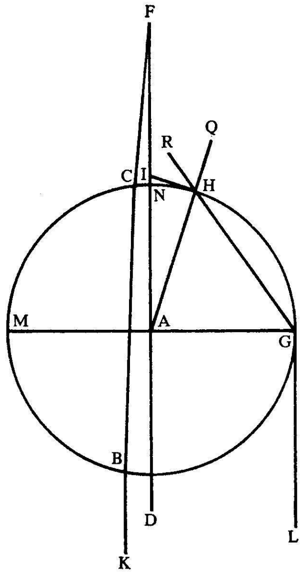


Figura 4.

Como resultado final da incidência de inúmeros raios na esfera forma-se, o que Kepler designa por, *envelope hiperbólico*.

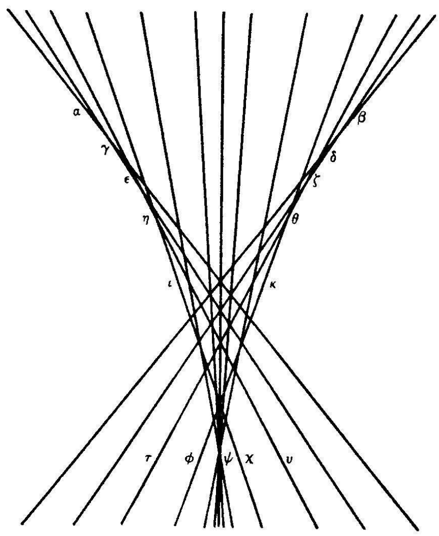


Figura 5.

Mas as experiências ainda não terminaram. Junto a uma esfera transparente coloca uma abertura pela qual os raios luminosos são obrigados a passar. Na região oposta a esse orifício insere uma folha de papel argumentando que a imagem transmitida pelos raios será invertida e *desenhada* nessa folha.

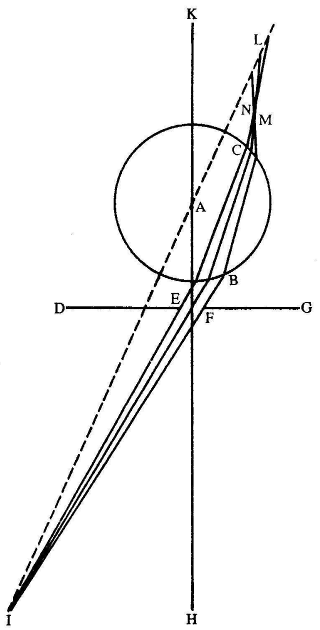


Figura 6.

Kepler considera que o ponto A é o centro da esfera indicada e EF a abertura colocada antes dela. O objecto observado é representado por HI e a folha de papel é inserida em KL. Os raios provenientes de I passam através da abertura e após duas refracções, intersectam a região MN. Se não fosse o orifício EF usado na experiência, a imagem de I atingiria L antes de MN. Por outro lado, os raios que viajam de H propagam-se ao longo da região central da esfera produzindo a sua imagem em K. Assim a folha de papel colocada em KL cria a imagem invertida do objecto em HI.

O sábio alemão pretendia agora aplicar a experiência realizada, embora com algumas modificações, ao mecanismo da visão, apesar do cristalino ser mais lenticular que esférico. Como referimos, o cone de radiação é refractado pela combinação entre o humor aquoso e o cristalino, visto em primeiro lugar a refracção ocorrer na córnea (cobertura do humor aquoso) e sendo a radiação de seguida novamente refractada quando transpõe a superfície posterior do cristalino para o humor vítreo. Assim, para poder aplicar os seus ensaios ao órgão da visão, Kepler combina o humor aquoso com o cristalino e apesar de não obter exactamente uma esfera, aproxima-se o suficiente para permitir aplicar a experiência realizada.

Regressando ao cone luminoso constata que este é primeiramente refractado na córnea convergindo levemente para a superfície do cristalino. Aí a radiação é formada num segundo cone convergente, tendo a mesma base que o primeiro mas o vértice situado mais atrás do que o anterior. Este segundo cone prossegue até encontrar a superfície posterior do cristalino, onde os raios são refractados afastando-se da perpendicular à superfície, sendo formado um pequeno e atenuado cone com o vértice na retina. *«Por conseguinte todos os raios provenientes de um ponto visível convergem finalmente noutro ponto.»* [6]

Antes de terminarmos esta brilhante demonstração, convém ilustrarmos o processo de formação das imagens na retina. Como Kepler não apresenta nenhuma figura a acompanhar esta conclusão final, recorremos a uma conhecida imagem da *Dióptrica* de René Descartes, publicada em 1637, a qual constituía um apêndice, tal como a *Geometria* e os *Meteoros*, do *Discurso do Método*.

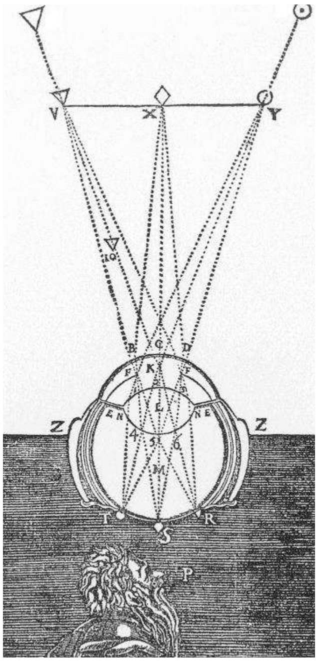


Figura 7. A inversão da imagem observada na retina segundo Descartes.

Onde: BCD- córnea TSR- retina
FF- íris T- imagem de Y
K- pupila S- imagem de X
L- cristalino R- imagem de V

Os cones de radiação originados nos pontos V, X e Y do campo visual formam as suas bases na córnea, representada na figura por BCD. Ultrapassados os diversos humores, convergem para os novos vértices R, S e T respectivamente. Assim, o cone originado no ponto V, localizado no extremo esquerdo, encontra o novo vértice no ponto R, situado no lado direito da retina; o cone proveniente de Y, extremo direito, atinge a retina no ponto T, localizado na região esquerda e o cone originado em X dada a perpendicularidade dos raios, alcança a retina no ponto S continuando a sua trajectória pelo nervo óptico:

«Por conseguinte a visão ocorre através da pintura das coisas visíveis, na superfície côncava da retina. O que está à direita no exterior é pintado no lado esquerdo da retina; o que está do lado esquerdo é pintado no lado direito; o que está em cima é pintado em baixo; e o que está em baixo é pintado em cima (...) Portanto, se fosse possível isolar esta pintura na retina das restantes partes do olho (...) e se junto dela estivesse um homem com uma visão suficientemente perspicaz, perceberia o contorno do hemisfério (ou seja, campo visual) através da estreitíssima retina.» [7]

De facto se existiam ainda dúvidas quanto à distinção entre a perspectiva natural e a artificial, elas dissipam-se totalmente com esta descoberta fenomenal. Constatamos pela demonstração efectuada, que as imagens que observamos são projectadas numa superfície côncava, enquanto as regras da perspectiva linear estabelecem a projecção de imagens numa superfície plana. Assim, apesar da perspectiva linear projectar linhas rectas como rectas, o nosso órgão da visão percepciona-as a partir do centro de projecção como curvas convexas.

Embora Kepler tenha descoberto a projecção das imagens na retina e tendo sido também estudante da perspectiva linear, não fez a correcta distinção entre as duas perspectivas, o que o conduziu ao equívoco numa discussão com Wilhelm Schickhardt [8] sobre a trajectória de um meteoro observado em 1623. Schickhardt observou o meteoro em alguns locais do sul da Alemanha e redigiu um trabalho intitulado *Weiterer Bericht von der Fliegenden Liecht-kugel* (Tubingen,1624) acerca da aparente trajectória curvilínea de um corpo celeste. Porém, para não perder a actualidade acabou por compô-lo à pressa, o que lhe valeu inúmeras críticas. Não hesitante em defender o seu trabalho perante os que o atacavam, escreveu um pequeno apontamento, uma espécie de panfleto, cujo título denota o espírito humorista deste professor: *A Bola de Fogo, que trata como cartilha, da luz milagrosa aparecida recentemente, o referido in specie e também meteoros semelhantes in generis (...) isto é, uma espécie de óptica Alemã* – onde é defendido convictamente que a trajectória de um corpo celeste, apesar de nos parecer curva, é na verdade quase rectilínea:

«Seja como for, mesmo que fosse, não o pode ter sido de forma evidente, isso só se pode ter dado apparenter et optice. A visão foi induzida em erro de duas maneiras que passo a esclarecer. Digo, em primeiro lugar, que todas as linhas, mesmo as mais rectas, surgem ligeiramente curvas, caso não estejam directamente diante dos olhos ou atravessem o seu eixo. Mas não há pintor que faça fé nisto. Por isso, para pintar as partes rectas de um edifício, todos usam linhas rectas, apesar de, segundo a verdadeira arte de perspectiva, tal ser incorrecto.» [9]

Este matemático alemão prova nesta obra a retilinearidade da trajectória de um corpo celeste, contrariando a hipótese de Kepler que a suponha como curvilínea. Para a demonstração Schickhardt utiliza um quadrilátero BDKM, tendo o olho o centro em G.

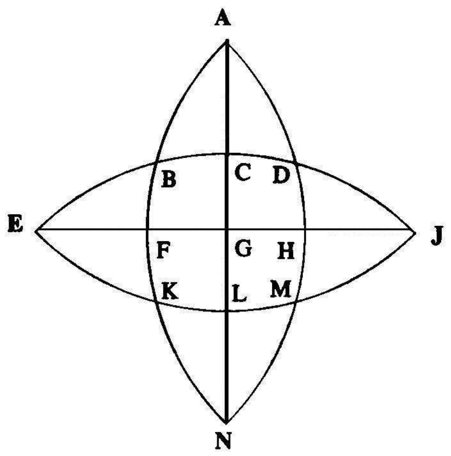


Figura 8.

Dada a posição em que o olho se encontra e como os quatro lados estão diante dele, o comprimento dos lados do quadrilátero diminuem à medida que estes se aproximam dos quatro pontos exteriores A, E, J e N. Este professor baseia-se no postulado de que *quanto mais próximo se encontrar o objecto, maior parecerá ser e, inversamente, quanto mais distante estiver, tanto mais pequeno se nos afigurará.* Acrescenta que um simples dedo é suficiente para a demonstração – *«posto perto dos olhos esconde uma povoação inteira, mas afastado, mal chega para um campo»*[10]. Pela figura verificamos que os segmentos mais próximos do olhar são CL e FH, e que por este motivo irão parecer maiores. Já os lados BD, DM, MK e KB como estão mais afastados dos olhos afiguram-se menores, assim ao aproximarem-se dos pontos exteriores tornam-se mais estreitos e forçosamente curvos, *«não como se fossem um telhado e produzissem um ângulo agudo nos pontos C, F, H e L, antes suave e gradualmente, sem se dar por isso, assemelhando-se a um ventre, o que convém a um arco deste género. Não há pois fidelidade à natureza, quando um artista desenha uma parede direita com linhas rectas. Senhores artistas que dizeis a isto?!»* [11]

Kepler reconheceu humildemente o seu erro e colocando o orgulho de lado, assume e rectifica o seu equívoco:

«Confesso não ser totalmente verdadeiro, conforme neguei, que as linhas rectas não possam ser apresentadas como curvas, no céu, a não ser por meio de refracção, o mesmo acontecendo com as paralelas ou outras. Desdisse-me dessa negação. Ela visava a posição segundo a qual as projecções das coisas visíveis eram tratadas no cérebro como se fossem projectadas numa superfície plana. As percepções eram registadas como gráficas e perspectivas o que, de acordo com a distância a que se está dos objectos terminais, ordena os traços representados sob forma recta, sobre a superfície do quadro, em linha recta. Mas a nossa visão não dispõe de uma superfície plana, em bloco, em que esteja contemplada a pintura de uma semiesfera. Vê sim essa imagem do céu, atravessada por cometas, e que cria em si mesma, de forma esférica, por um instinto natural. Se a imagem dos objectos for projectada numa superfície côncava, com linhas rectas de extensão, as representações dessas linhas não serão rectas, mas curvas, à semelhança do que se verifica no círculo da maior das esferas, caso seja visto do seu centro, como ensinamos que se deve fazer em projecção, nos astrolábios circulares.» [12]

Contudo, Schickhardt não está repleto de razão. Se de facto é verdade que a trajectória de um corpo celeste se afigure quase como rectilínea, isso não implica que os pintores tenham que representar as partes rectas de edifícios como curvas. Tal como demonstra Kepler através das seguintes palavras:

«Schickhardt confunde as coisas que não se devem misturar. Todas as representações de linhas rectas no plano do quadro, que se dirigem paralelamente, para o ângulo de visão, convergem num ponto de visão no plano do quadro. Em contrapartida, todas as linhas rectas, paralelas a sim próprias, assumem uma curvatura, não acima do plano do quadro, mas no que se imagina do hemisfério visível. Essas linhas curvam-se para cada lado, rectas a partir do olho que lhes é perpendicular. Não são, assim, curvas nem na realidade nem na pintura, mas apenas na aparência, ou seja, aparentam ser curvas.» [13]

Apesar de somente no século XVII ser descoberta a projecção de imagens na retina, as distorções manifestadas por essa projecção já eram sobejamente conhecidas na Antiguidade. Recordemo-nos da óptica clássica, onde Euclides refere alguns enunciados que estão de acordo com a nossa visão mas que se opõem à perspectiva linear. E no entanto o sábio grego não teve em consideração questões de natureza anatómica, baseou-se simplesmente na sua experiência de observador. Porém, foi devido a algum conhecimento que existia neste domínio que permitiu aos artistas, essencialmente renascentistas, introduzirem medidas que atenuassem as distorções causadas pela visão, procurando que o desfasamento entre a perspectiva natural e a artificial quase não existisse, pois só assim a representação perspéctica poderia ser uma tradução fiel da imagem formada na retina. Contudo, verificaram que por vezes surgiam algumas discrepâncias, fruto da diferença entre a relação dos ângulos visuais e do segmento obtido por projecção na superfície plana. Como exemplo, podemos referir o conhecido paradoxo de Leonardo da Vinci [14], ilustrado na figura seguinte:

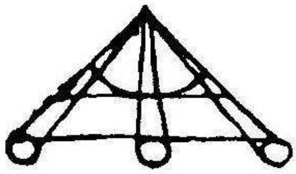


Figura 9. *Paradoxo de Leonardo,* pertencente ao Códice Madrid II.

No desenho está representada uma fila de colunas todas iguais, mas parece que se tratam de diferentes posições de um mesmo objecto. A designação de paradoxo deve-se ao facto das colunas mais afastadas parecem maiores do que as mais próximas, o que contradiz a nossa experiência visual. Esta distorção é motivada pelas amplitudes dos ângulos α, β e δ e pelos comprimentos dos segmentos AB, CD e EF.

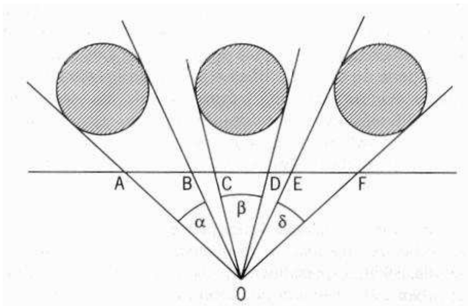


Figura 10.

De facto a amplitude do ângulo α é igual à do ângulo δ, mas ambas são maiores que a do ângulo β. Em relação aos segmentos referidos, verificamos que o comprimento de AB é igual ao de EF e ambos são maiores do que o comprimento de CD. Devido à distorção originada, Leonardo apresenta no seu desenho a diferença entre a perspectiva no quadro plano e no quadro circular, o qual corresponderia melhor à visão natural, uma vez que vimos todas as colunas com a mesma largura.

Este é apenas um dos vários exemplos que ocorreram no Renascimento. Para Leonardo, as distorções periféricas merecem ser estudada pelos artistas, por esse motivo indica no seu *Tratado de Pintura* que a perspectiva é constituída essencialmente por três partes:

«(...) a primeira é a diminuição que fazem as quantidades dos corpos a diversas distâncias; a segunda parte é a que trata da diminuição das cores de tais corpos; a terceira, é aquela que diminui o conhecimento das figuras dos limites que têm tais corpos à distância.» [15]

Assim, uma vez que o olho não é digno de confiança, fica o conselho do mestre Leonardo para aqueles que pretendem triunfar com as suas obras:

«Os que se enamoram da prática sem a ciência são como os marinheiros que embarcam no navio sem leme ou bússola, que não têm nunca a certeza para onde se dirigem. A prática deve edificar-se sempre sobre uma boa teoria, da qual é porta e guia a perspectiva, sem a qual nada se faz bem.» [16]

Notas

[1] Kepler, *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*, versão inglesa de William H. Donahue, Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000, p. 13.

[2] Nasceu na Dinamarca em 1546, mas foi em Praga que alcançou o apogeu da sua carreira de astrónomo, sendo convidado por Rudolfo II para comandar as investigações astronómicas na sua corte. Foi neste posto que Kepler se tornou seu assistente após terminar os seus estudos na Academia Luterana em Graz. Morreu em Praga no ano de 1601.

[3] Kepler, *op. cit.*, p. 6.

[4] (1536-1614)

[5] (1566-1621) Foi professor de medicina em Wittenburg entre 1596 e 1601 e posteriormente mudou-se para Praga onde conheceu Kepler.

[6] Kepler, *op. cit*., p. 219.

[7] *Ibidem*, p. 221.

[8] Professor de línguas orientais e matemática em Tübingen.

[9] Citado por Erwin Panofsky em *A perspectiva como forma simbólica*, p. 75.

[10] *Ibidem*, p. 76.

[11] *Ibidem*.

[12] *Ibidem*.

[13] *Ibidem*, p. 78.

[14] (1452-1519)

[15] Leonardo da Vinci, *Tratado de Pintura*, versão castelhana de Mario Pittaluga, Editorial Losado, Buenos Aires, 1943, pp. 181 e 182.

[16] *Ibidem*, p. 51.

Bibliografia

AAVV, *La Prospettiva Rinascimentale*, Codificazione e trasgressioni, Florença, Centro Di, 1980.

ACKERMAN, James; *Leonardo's Eye*, Journal of the Warburg and Courtauld Intitutes, nº 41, pp. 109-146, 1978.

ALBERTI, Leon Battista, *De la pintura y outros escritos sobre arte*, tradução e notas de Rocío de la Villa, Editorial Tecnos, 1999.

ALBERTI, Leon Battista, *De Re Aedificatoria*, tradução castelhana de Javier Riviera e Javier Frescrillo Nunez, Akal, 1991.

ALBERTI, Leon Battista, *Divertissements Mathématiques*, versão francesa de Pierre Souffrin, Seuil, Paris, 2002.

ALBERTI, Leon Battista, *On Painting*; traduzido por Cecil Grayson com introdução e anotação de Martin Kemp, Penguin Classics, 1991.

ALBERTI, Leon Battista, *Opere Volgari*, a cura di Cecil Grayson, vol. III, Bari, Gius. Laterza & Figli, 1973.

ALBERTI, Leon Battista, *Sobre la Pintura*, tradução anotada e ilustrada por Joaquin Valencia, Fernando Torres, 1976.

ALBUQUERQUE, Luís, *Estudos de História*, vol. I, Actas Universitatis Conimbrigensis por Ordem da Universidade de Coimbra, 1974.

ALMEIDA, A. A. Marques de, *Estudos de História da Matemática*, Inquérito Universidade, 1997.

ABADIA, Ramón, *Leon Battista Alberti y la teoria de la creación artística no Renascimento*, Colégio oficial de Arquitectos de Áragon, 1992.

ARISTÓTELES, *De anima*, versão francesa de J. Tricot; Paris: Librairie Philosofique J. Vrin, 1947.

ARISTÓTELES, *Metafísica*, versão portuguesa de Vincezzo Cocco, Atlântida, 1969,

ARISTÓTELES; EUCLIDES, *Sobre as linhas indivisíveis, Mecânica, Óptica, Catóptrica, Fenómenos*, traduzidos por Paloma Ortiz Garcia; Editorial Gredos, Madrid; 2000.

ARNHEIM, Rudolf, *Art and visual perception a psychology of the creative eye*, University of California Press, 1984.

ASENSI, Fernando Izquierdo, *Geometria descritiva superior y aplicada*, Editorial Dossat, Madrid, 1985.

AUTHIER, Michel, *A refracção e o "esquecimento" cartesiano*, Elementos para uma História das Ciências, vol. II: Do fim da Idade Média a Lavoisier, pp. 69-96; tradução de Rui Pacheco, Magda Figueiredo, Ana Paula Costa e Ana Simões; Terramar; 1995-1996.

BALTRUSAITIS, Jurgis, *Anamorphoses*: *Les Perspectives Dépravées-II*, Flammarion, Paris, 1996.

BARDESCHI, M. Dezzi e Outros, *Leon Battista Alberti*, versão castelhana de Josep Rovira e Anna Muntada, Editorial Stylos, 1988.

BENEVOLO, Leonardo, *La captura del infinito*, versão castelhana de Margarita Garcia Galán, Celeste, 1994.

BLUNT, Anthony, *La teoria de las artes en Itália 1450-1600*, versão castelhana de José Luis Cremades, Ediciones Cátedra, 1956.

BOYER, Carl, *História da Matemática*, tradução de Elza Gomide, S. Paulo, Edgard Blücher, 1974.

BURKE, Robert Belle, *The Opus Majus of Roger Bacon*, University of Pennsylvania Press, 1928.

BRUSATIN, M., *Desenho/Projecto*, Criatividade-Visão, Enciclopédia Einaudi, volume 25, pp. 298-335, tradução de Maria Bragança, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1992.

CHASTEL, André; *Arte y humanismo en Florencia em tiempos de Lorenzo el Manifico*; versão castelhana de Luis Jiménez e Luis Esteves; Cátedra, 1982.

COELHO, Latino, *A Ciência na Idade Média e as Enciclopédias desse tempo*, Colecção Filosofia & Ensaios, Guimarães Editores, Lisboa, 1988.

COMAR, Philipe, *La perspective en jeu*, Découvertes Gallimard, 1992.

CORNFORD, Francis Macdonald; *Plato´s Cosmology: The Timaeus of Plato translated with running commentary*, London: Routledge & Kegan Paul, 1956.

CORTESÃO, Armando, *Cartografia portuguesa e Geografia de Ptolomeu*; Comunicação apresentada à Classe de Ciências em sessão de 8 de Outubro de 1964, Sep. de Bol. da Academia das Ciências de Lisboa, v. 36 [1964].

COSTA, A. e BRUSATIN, M., *Visão*, Criatividade-Visão, Enciclopédia Einaudi, volume 25, pp.242-273, tradução de Maria Bragança; Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1992.

DAMISCH, Hubert, *The origin of perspective*; versão inglesa de John Goodman, London: the MIT Press, 1995.

DANTE, *Convívio,* tradução de Carlos Eduardo de Soveral, Guimarães Editores, 1992.

DESCARTES, René, *A Geometria,* traduzido por Emílio Lopes, Editorial Prometeu, 2001.

DEVLIN, Keith, *Matemática: A ciência dos padrões*, traduzido por Alda Maria Durães, Porto Editora, 2002.

DÜRER, Albrecht, *Géométrie*, présentation et traduction de Jeanne Peiffe, Seuil, 1993.

EDGERTON, Samuel, *The Renaissance rediscovery of linear perspective,* New York: Basic Books, 1975.

EECKE; Paul Ver, *Euclide: L'optique et la catoptrique,* Desclée de Brouwer et C^{ie}, 1938.

EUCLIDES, *Elementos de Geometria*, versão latina de Frederico Commandino, revistos por Aníbal Faro, Edições Cultura, 1944.

FAUVEL, John e GRAY, Jeremy; *The History of Mathematics: A Reader,* Washington DC: Mathematical Association of America, 1997.

FIELD, J. V., *Alberti, the Abacus and Piero della Francesca's proof of perspective*, Journal of the society for Renaissance studies, vol. 11, pp. 66-88,1977.

FIELD, J. V., *Piero della Francesca treatment of edge distortion*, Journal of the Warburg and Courtauld Institutes, nº 49, pp. 61-90, 1986.

FIELD, J. V., *The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance,* Oxford University Press, 1997.

FLOCON, Albert e TATON, René, *La Perspective*, Presses Universitaires de France, Paris, 1963.

FRANCESCA, Piero della, *De la perspective en peinture*, versão francesa de Jean-Pierre Le Goff, In Media Res, 1998.

FRANGENBERG, Thomas, *The Image and the Moving Eye: Jean Pélerin to Guidobaldo del Monte*, Journal of the Warburg and Courtauld Institutes, nº 49, pp. 150-171, 1986.

GALILEU, Galilei; GRASSI, Horatio; GUIDUCCI, Mário; KEPLER, Johann; *The controversy on the comets of 1618*, translated by Stillman Dake and C.D. O'Malley, University of Pennsylvania Press, 1960.

GILBERT, Thérèse, *La perspective en question,* Ciaco éditeur, 1987.

GOFF, Jacques Le, *Os intelectuais na Idade Média*, traduzido por Margarida Sérvulo Correia, Gradiva, 1984.

GOMBRICH, Ernst Hans, *Arte e Ilusão: um estudo da psicologia da representação pictórica*, traduzido por Raul Sá Barbosa, São Paulo: Martins Fonseca, 1995.

GOMBRICH, Ernst Hans, *História da Arte*, traduzido por Álvaro Cabral, Zahar Editores: Rio de Janeiro, 1983.

GRAYSON, Cecil, *Studi su Leon Battista Alberti*, a cura di Paola Claut, L.S. Olschki, 1998.

HEATH, Thomas, *A History of Greek Mathematics*, vol. I, Oxford University Press, 1921.

HEATH, Thomas, *Mathematics in Aristotele,* Oxford University Press, 1949.

HEATH, Thomas, *The thirteen Books of Euclid's Elements*, vol. I, II, III, Dover Publications, New York, 1956.

IREM, *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Ellipses, 1993.

IREM de Basse-Normandie, *Les Cahiers de la perspective nº1, points de vue*, Université de Caen, 1981.

IREM de Basse-Normandie, *Les Cahiers de la perspective nº2, points de vue*, Université de Caen, 1982.

IREM de Basse-Normandie, *Les Cahiers de la perspective nº4, points de vue*, Université de Caen, 1987.

IVINS, William, *On the racionalization of sight,* A Da Capo Press, 1938.

JANSON, H. W., *História da Arte*, traduzido por J. A. Ferreira Almeida e Maria Manuela Rocheta Santos, Fundação Calouste Gulbenkian, 1998.

KEMP, Martin, *Leonardo and the Visual Pyramid*, Journal of the Warburg and Courtauld Institutes, nº40, pp.128-149, 1977.

KEMP, Martin, *The Science of Art: Optical themes in the west art from Brunelleschi to Seurat*, Yale University Press, 1990.

KEPLER, Johannes, *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*; translated by William H. Donahue, Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000.

KOYRÉ, Alexandre, *Do Mundo fechado ao Universo Infinito,* traduzido por Jorge Pires, Gradiva, 2001.

LEGRAND, Gérard, *A Arte do Renascimento*, tradução de Maria Filomena Melo, Edições 70, 1999.

LAERTIUS, Diogenes, *Lives of eminent philosophers*, versão inglesa de R. D. Hicks, vol. I, Harvard University Press, 1972.

LEJEUNE, Albert, *Euclide et Ptolémée: deux stades de l´optique géométrique grecque*, Louvain: Blibliothèque de l´Université, 1948.

LEONARDO da Vinci e ALBERTI, Leon Battista, *El Tratado de la Pintura por Leonardo da Vinci y los tres libros que sobre el mismo arte escribió Leon Bautista Alberti*, traduzido e ilustrado por Don Diego António Rejon De Silva, Imprensa Real de Madrid, 1784.

LEONARDO da Vinci, *Tratado de Pintura*, versão castelhana de Mario Pittaluga, Editorial Losado, Buenos Aires, 1943.

LINDBERG, David, *John Pecham and the Science of Optics*, The University of Wisconsin Press,1970.

LINDBERG, David, *Roger Bacon and Origins of Perspectiva in the Middle Ages*; Clarendon Press, Oxford, 1996.

LINDBERG, David, *The Science of Optics*, Science in the Middle Ages, The University of Chicago Press, pp. 338-368, 1978.

LINDBERG, David, *Theories of vision from Al-Kindi to Kepler*, The University of Chicago Press, 1976.

LORIA, Gino, *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*, Paris: Gauthier-Villars, 1929.

LORIA, Gino, *Storia della geometria descritiva*, Milano: Ulrico Hoepli, 1921.

LOSEE, John, *Introdução Histórica à Filosofia da Ciência*, tradução de Carlos Lains, Terramar, 1998.

LUCRECIO, Tito, *De la nature*, versão francesa de Henri Clouard, Flammarion, 1964.

MARTINEZ, Rafael, *Del ojo: ciencia y representación*, Ciencias 66, Abril-Junho, pp. 46-57, 2002.

MIELI, Aldo, *O papel mundial da ciência árabe*; Resumo de uma comunicação apresentada no Curso de Férias de Cascais, organizado pela Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa, tradução de Arlindo Camilo Monteiro, 1937.

MUGLER, Charles, *Dictionnaire historique de la terminologie optique grecque*, Paris, Klincksiek, 1964.

MURTINHO, Vítor, *"La Piú Grassa Minerva". A Representação do Lugar*, tese de doutoramento, Universidade de Coimbra, 2001.

MURTINHO, Vítor, *Perspectivas: o Espelho Maior ou o Espaço do Espanto*, Edições do departamento de Arquitectura da FCTUC, 2000.

NEGRO, Carlos del, *Considerações sobre a perspectiva de Euclides e a perspectiva linear*, Rio de Janeiro: Universidade do Brasil, 1953.

PACHECO, Francisco, *Arte de la pintura*, Cátedra, 1990.

PANOFSKY, Erwin, *A perspectiva como forma simbólica*, tradução de Elisabete Antunes, Edições 70, 1999.

PANOFSKY, Erwin, *Renascimento e Renascimentos na Arte Ocidental,* tradução de Fernando Neves, Editorial Presença, 1960.

PARRONCHI, Alessandro, *Studi sulla dolce prospettiva*, Aldo Martello Editore, Milan, 1964.

PECHAM, John, *Tratatus de Perspectiva*, edited by David Lindberg, The Franciscan Institute, 1972.

Pedro Nunes 1502-1578, novas terras, novos mares e o que mays he: novo ceo e novas estrellas; Ministério da Cultura, Biblioteca Nacional de Lisboa, 2002.

PLATÃO, *A República*, tradução e notas de Maria Helena Pereira, Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

PLATÃO, *Menón*, versão francesa de Bernard Biettre, Nathan, 1990.

PLATÃO, *Parménides*, tradução e notas de Maria José Figueiredo e introdução de José Trindade Santos, Instituto Piaget, 2001.

PLINIO, *Textos de historia del arte*, versão espanhola de Maria Esperanza Torrego, Visor, Madrid, 1988.

PROCLUS, *A commentary on the first book of Euclid´s Elements*; translated by Glenn Morrow, Princeton University Press, 1970.

PTOLOMEU, Claúdio, *Geographia*; with an introduction by R. A. Skelton, Amsterdam: Theatrum Orbis Terrarum, 1966.

RICHTER, Jean Paul, *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, Vol. I, Dover Publications, New York, 1970.

SÁ, Carlos, *História da Geometria Projectiva*, manuscrito referente a um curso organizado por ocasião do 1º Encontro Luso-Brasileiro sobre História da Matemática, 1993.

SERRES, Michel, *As Origens da Geometria,* tradução de Ana Simões e Maria da Graça Pinhão, Terramar, 1997.

SILVA, Luciano Pereira da, *Obras Completas*, vol. I, Divisão de Publicações e Biblioteca Agência Geral das Colónias, Lisboa, 1943.

SMITH, A. Mark, *Alhacen's theory of Visual Perception*, Vol. I e II, American Philosophical Society, 2001.

SIMON, Gérard, *Le regard, l'être et l'apparence dans l'Optique de l'Antiquté*, Seul, 1988.

TATON, René (direcção), *Histoire générale des sciences*, vol. I e II, Paris, PUF, 1958.

TAYLOR, Alfred Edward, *A commentary on Plato´s Timaeus*, Oxford Clarendon Press, 1928.

UPJOHN, Everard, WINGET, Paul, MAHLER, Jane, *História Mundial da Arte*, vol. III: O Renascimento, traduzido por Manuela França, Bertrand Editora, 1965.

VASARI, Giorgio, *Les vies des meilleurs peintres, sculpteurs et architectes*, vol. 3, edition commentée sous la direction d'André Chastel, Arts: Berger-Levrault, 1983.

VASCONCELOS, Fernando de Almeida, *História das Matemáticas na Antiguidade*, Livrarias Aillaud e Bertrand, 1965.

VELOSO, Eduardo, *Geometria*, Ministério da Educação e Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VESCOVINI, Graziella Federici, *Studi sulla Prospettiva Medievale*, G. Giappichelli Editore, Torino, 1987.

VITRÚVIO, *Os dez livros de Arquitectura*, traduzido por H. Rua, Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico, 1998.

WHITE, John, *Nascimiento y renascimiento del espacio pictórico*, versão castelhana de Esther Gómez, Alianza Editorial, 1994.

WRIGHT, Lawrence, *Tratado de Perspectiva*, versão castelhana de Francisco Martin, Editorial Stylos,1985.

XAVIER, João Pedro, *Perspectiva, Perspectiva Acelerada e Contraperspectiva*, FAUP, Porto, 1997.

ZUVILLAGA, Javier Navarro, *Imagenes de la perspectiva*, Siruela, 1996.

Origem das ilustrações

Capa: *El Tratado de la Pintura por Leonardo da Vinci y los tres libros que sobre el mismo arte escribió Leon Bautista Alberti*, traduzido por Don Diego Silva, Imprensa Real de Madrid, 1784.
Interpretação da imagem: Esta estampa reflecte de modo perfeito o que Alberti pretende transmitir aos artistas. A figura feminina que encontramos é Minerva, mãe da arte e da ciência, ao lado de um menino dedicado à pintura. Mostra-lhe com uma mão um livro e com a outra o campo, ensinando-lhe que a instrução nos escritos científicos e a imitação da natureza nas suas obras o conduzirão à desejada perfeição. Do outro lado vê-se um figurante com vários instrumentos matemáticos denotando a necessidade que a pintura tem da geometria e da perspectiva.

Capítulo 0

Capa: extraída da página de Paul Calter com o endereço:
http://www.math.dartmouth.edu/%7Ematc/math5.geometry/unit11/unit11.html#alberti

Contra capa: Sirigati, *La pratica di prospettiva*, 1596. Extraída de Zuvillaga, *Imágenes de la perspectiva*, Siruela, 1996, p. 33.
Interpretação da imagem: As duas figuras femininas que flanqueiam esta ilustração representam a Geometria, à esquerda, e a Perspectiva, à direita, com os seus respectivos instrumentos.

figs. 1, 2, 3, 6: *El Tratado de la Pintura por Leonardo da Vinci y los tres libros que sobre el mismo arte escribió Leon Bautista Alberti*, traduzido por Don Diego Silva, Imprensa Real de Madrid, 1784, pp. 201, 203, 204, 207.

figs. 4, 9, 10, 12: Alberti, *On Painting*, versão inglesa de Cecil Grayson, Penguin Classics, 1991, pp. 24, 49, 50, 52.

figs. 5, 18-21: Kemp, *The Science of Art: Optical themes in the west art from Brunelleschi to Seurat*, Yale University Press, 1990, pp. 22, 23.

fig. 7: Hoogstraeten, *Inleyding tot de hooge schoole (...)*,1678. Retirada de Zuvillaga, *Imágenes de la perspectiva,* Siruela, 1996, p. 456.

fig. 8: Dubreuil, *La perspective pratique nécessaire à tous peintres, graveurs, sculpteurs... et autres se servant du dessin*,1642-1649. Extraída de Zuvillaga, *Imagenes de la perspectiva*, Siruela, 1996, p. 459.

fig.11: Bosse, *Traité de pratiques géométrales et perspectives enseignées dans l´Academie royale de la peinture et sculpture*, 1665. Extraída de Zuvillaga, *Imágenes de la perspectiva*, Siruela, 1996, p. 205.

fig. 13: disponível on-line em http://www.kfki.hu/~arthp/html/l/lorenzet/ambrogio/

figs. 14, 15: IREM, *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Ellipses, 1993, p.206.

figs. 16, 17: IREM de Basse-Normandie, *Les cahiers de la perspective nº4, points de vue,*, Université de Caen, 1987, pp. 11, 13.

figs. 22, 23, 24: AAVV, *La Prospettiva Rinascimentale*, Codificazione e trasgressioni, Florença, Centro Di, 1980, pp. 111, 112.

Capítulo 1

Capa: detalhe do quadro a *Geometria* de Laurent de La Hyre, datado de 1649. Extraído de Field, *The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance*, Oxford University Press, 1997, p. 218.

fig. 1.1: Retirada de Field, *The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance*, Oxford University Press, 1997, p. 5.

fig. 1.2: Serres, *Origens da Geometria*, tradução de Ana Simões e Maria da Graça Pinhão, Terramar, 1997, p. 107.

fig. 1.3: Retirada de Silva, *Obras Completas,* vol. I, Divisão de Publicações e Biblioteca Agência Geral das Colónias, Lisboa, 1943, p. 274.

fig. 1.4: Euclides, *Óptica*, na versão de Paloma Ortiz Garcia, Editorial Gredos, Madrid, 2000, p.196.

fig. 1.6: Gilbert, *La perspective en question*, Ciaco éditeur, 1987, p. 175.

fig. 1.7: Alberti, *On Painting*, versão inglesa de Cecil Grayson, Penguin Classics, 1991, p. 50.

Capítulo 2

Capa: Edmé-Sébastien Jeaurat, *Traité de perspective*, 1750. Extraída de Zuvillaga, *Imágenes de la perspectiva*, Siruela, 1996, p. 59.
Interpretação da imagem: Encontramos nesta ilustração um engenho para determinar a secção da pirâmide visual. Onde dois dos *putti* observam por um visor, enquanto outro mede com um compasso os ângulos formados pelos raios visuais, e um quarto toma nota das medidas que lhe são transmitidas.

fig. 2.1: adaptado Cornford, *Plato´s Cosmology: The Timaeus of Plato translated with running commentary*, London: Routledge & Kegan Paul, 1956, p. 155.

figs. 2.2, 2.6, 2.7, 2.9, 2.17: Negro, *Considerações sobre a perspectiva de Euclides e a perspectiva linear*, Rio de Janeiro: Universidade do Brasil, 1953, pp. 8, 15, 11, 16.

figs. 2.3-2.5, 2.8, 2.10-2.12, 2.19-2.21, 2.25, 2.27-2.31: Euclides, *Óptica*, na versão de Paloma Ortiz Garcia, Editorial Gredos, Madrid, 2000, pp. 136-146, 153, 154, 158, 176.

fig. 2.13: Kircher, *Ars magna lucis et umbrae in decem libros digesta*,1646. Retirado de Zuvillaga, *Imagenes de la perspectiva*, Siruela, 1996, p. 411.

figs. 2.15, 2.16, 2.62, 2.68: Wright, *Tratado de Perspectiva*, versão castelhana de Francisco Martin; Editorial Stylos, 1985, pp.163, 160, 54, 71.

fig. 2.14: Dürer, *Géométrie*, versão francesa de Jeanne Peiffer, Seuil, 1993, p. 279.

figs. 2.18, 2.22, 2.23, 2.32, 2.57: Panofsky, *A perspectiva como forma simbólica*, tradução de Elisabete Antunes, Edições 70, 1999, pp. 35, 136, 135, 38, 86, 87.

fig. 2.24: IREM, *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Ellipses, 1993, p.203.

figs. 2.26, 2.40-2.43, 2.45: Lindberg, *Theories of vision from Al-Kindi to Kepler*, The University of Chicago Press, 1976, pp. 150, 153, 20, 27, 50, 110.

fig. 2.33: Vitrúvio, *Os dez livros de Arquitectura*, na versão de H. Rua, Departamento de Engenharia Civil do Instituto Superior Técnico, 1998, p. 13

figs. 2.34, 2.44, 2.47: Smith, *Alhacen's theory of Visual Perception*, vol. I, American Philosophical Society, 2001, pp. xxxii, li, lxi.

figs. 2.46, 2.48, 2.49, 2.51, 2.52: Smith, *Alhacen's theory of Visual Perception*, vol. II, American Philosophical Society, 2001, pp. 405, 536, 406.

fig. 2.35: adaptado de Flocon e Taton, *La Perspective*, Presses Universitaires de France, Paris, 1963, p.10.

fig. 2.36: Lejeune, *Euclide et Ptolémée: deux stades de l´optique géométrique grecque*, Louvain: Blibliothèque de l´Université, 1948, p. 54.

fig. 2.37: Edgerton, *The Renaissance rediscovery of linear perspective*, New York: Basic Books, 1975, p.101.

fig. 2.38: Cortesão, *Cartografia portuguesa e Geografia de Ptolomeu*, Comunicação apresentada à Classe de Ciências em sessão de 8 de Outubro de 1964; Sep. de Bol. da Academia das Ciências de Lisboa, v. 36 [1964], p.19.

fig. 2.39: IREM de Basse-Normandie *Les cahiers de la perspective nº4, points de vue*, Université de Caen, 1987, p. 193.

fig. 2.50: Lindberg, *The Science of Optics* in Science in the Middle Ages, The University of Chicago Press, 1978, p. 348.

figs. 2.53, 2.54: Retirado de Burke, *The Opus Majus of Roger Bacon*, University of Pennsylvania Press, 1928, p. 442, 467.

figs. 2.53, 2.55: Lindberg, *Roger Bacon and Origins of Perspectiva in the Middle Ages*, Clarendon Press, Oxford, 1996, pp. 43, 225.

fig. 2.56: *Pedro Nunes, 1502-1578, novas terras, novos mares e o que mays he: novo ceo e novas estrellas* publicado pela Biblioteca Nacional de Lisboa, p. 63.

figs. 2.58, 2.59, 2.60: Lindberg, *John Pecham and the Science of Optics*, The University of Wisconsin Press, 1970, p. 97, 115, 251.

fig. 2.61: Retirada de *Istambul*, Guia American Express, 1998, p. 73.

figs. 2.63, 2.66, 2.67, 2.69: Kemp, *The Science of Art: Optical themes in the west art from Brunelleschi to Seurat*, Yale University Press, 1990, p. 8, 12, 17.

fig. 2.64: diponível no site http://www.kfki.hu/~arthp/html/l/lorenzet/ambrogio/

fig. 2.65: Field, *The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance*, Oxford University Press, 1997, p. 39.

Capítulo 3

Capa: Edmé-Sébastien Jeaurat, *Traité de perspective*, 1750. Extraída de Zuvillaga, *Imágenes de la perspectiva*, Siruela, 1996, p. 59.
Interpretação da imagem: Os *putti* estão empenhados em "alcançar o infinito" sob o olhar atento da Perspectiva que se encontra no arco à direita, possuindo uma régua e um compasso. Junto ao quadro de linhas alguns *putti* marcam-o com uma corda aplicando uma escala de perspectiva, outros discutem sobre o desenho no papel e o último desanuvia traçando a sombra de uma vara vertical.

fig. 3.1:Francesca, *Prospectiva Pingendi*, versão francesa de Jean-Pierre Le Goff**,** In Media Res, 1998, p. 49.

fig. 3.2: Field, *Alberti, the Abacus and Piero della Francesca's proof of perspective* in Journal of the society for Renaissance studies, nº 11, p. 79.

fig. 3.3: Veloso, *Geometria*, Ministério da Educação e Instituto de Inovação Educacional, 1998, p. 294.

fig. 3.4: adaptado do artigo *Alberti's perspective construction* da autoria de Tony Philips publicado pela Sociedade Americana de Matemática no Boletim de Janeiro de 2002. Esta imagem encontra- se disponível no site http://www.ams.org/new-in-math/cover/alberti1.html.

fig. 3.5: Vingola, *Le due regole della prospettiva pratica di M.J.B da V., com i commentari del R.P.M. Egnatio Danti dell'ordine dei Predicatori, Matematico dello Studio di Bologna*, 1583. Extraído de Xavier, *Perspectiva, Perspectiva Acelerada e Contraperspectiva*, FAUP, Porto, 1997, p. 84.

fig. 3.6: Retirado de Field, *The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance*, Oxford University Press, 1997, p. 174.

fig. 3.7: Retirado de IREM de Basse-Normandie, *Les Cahiers de la perspective nº4 points de vue*, 1987, p. 235.

fig. 3.8: Kepler, *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*, versão inglesa de William H. Donahue, Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000, p. 108.

fig. 3.9: Dürer, *Géométrie*, versão francesa de Jeanne Peiffer, Seuil, 1993, p. 179.

figs. 3.10, 3.13: Kemp, *The Science of Art: Optical themes in the west art from Brunelleschi to Seurat*, Yale University Press, 1990, pp. 103, 60, 61.

figs. 3.11, 3.12: Sá, *História da Geometria Projectiva*, manuscrito referente a um curso organizado por ocasião do 1º Encontro Luso-Brasileiro sobre História da Matemática, 1993, pp.3, 7.

Apêndice

figs. 1, 8: Kemp, *The Science of Art: Optical themes in the west art from Brunelleschi to Seurat*, Yale University Press, 1990, pp. 80, 247.

fig. 2: Lindberg, *Theories of vision from Al-Kindi to Kepler*, The University of Chicago Press, 1976, p. 177.

figs. 3, 4, 5, 6: Kepler, *Optics: Paralipomena to Witelo & Optical Part of Astronomy*, versão inglesa de William H. Donahue; Green Lion Press, Santa Fe, New Mexico, 2000, p. 192, 197, 211, 213.

fig. 7: Descartes, *La diotrique*, 1637. Extraída de Lindberg, *The Science of Optics* in Science in the Middle Ages, The University of Chicago Press, 1978, p. 355.

fig. 9: Leonardo da Vinci, Códice Madrid II. Retirada de Zuvillaga, *Imágenes de la perspectiva*, Siruela, 1996, p. 396.

fig. 10: Panofsky, *A perspectiva como forma simbólica*, tradução de Elisabete Antunes, Edições 70, 1999, p. 72.